

Ein vereinfachtes Verfahren der Lebensrückversicherung gegen natürliche Prämien

Autor(en): **Albers, Gunther**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **47 (1947)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966852>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein vereinfachtes Verfahren der Lebensrückversicherung gegen natürliche Prämien

Von *Gunther Albers*, Hamburg

Die Lebensrückversicherung gegen natürliche Prämien (einjährige Risikoprämien) kommt zwar in Deutschland — im Gegensatz zu anderen Ländern — nicht sehr häufig vor, es lohnt sich aber wohl doch, sich näher mit ihr zu befassen, da sie unverkennbare Vorzüge gegenüber der «normalen» Methode, der Rückversicherung eines festen Teils der Versicherungssumme, besitzt. Wenn man von der Rückversicherung anomaler Risiken absieht, besteht der eigentliche Zweck der Rückversicherung in der Nivellierung der riskierten Summen, also des Teils der Versicherungssummen, der noch nicht durch die angesammelten Reserven gedeckt ist. Dieser Zweck kann jedenfalls mit der normalen Methode nur sehr viel unvollkommener erreicht werden als mit der reinen Risikorückversicherung. Auch entspricht die normale Rückversicherung nicht dem Grundsatz, den rückversicherten Teil des Bestandes so klein wie möglich zu halten. Zwar ist mit der Lebensrückversicherung gegen natürliche Prämien auch keine vollkommene Lösung des Problems möglich; dieses Verfahren stellt aber doch wohl das zurzeit beste dar, denn der geniale Vorschlag von Berger auf dem Aktuarkongress in London 1927¹⁾, der eine vollkommene Nivellierung ohne Abgabe von Versicherungssummen an den Rückversicherer ergibt, lässt sich kaum durchführen. Auch bezüglich des Arbeitsaufwandes ist die normale Methode nicht günstiger, jedoch wird es als unangenehm empfunden, dass bei der reinen Risikorückversicherung die Exzedenten und Prämien jedes Jahr neu gerechnet werden müssen. Es soll daher ein Verfahren gezeigt werden, bei dem der gesamte Exzedent und die gesamte Rückversicherungsprämie in einem Rechnungsgang ermittelt werden können.

¹⁾ S. Transactions of the Eighth International Congress of Actuaries, Vol. IV, S. 343 ff.

Wenn man sämtliche Versicherungen zusammenfassen will, muss man naturgemäss darauf verzichten, die Exzedenten aus den genauen riskierten Summen zu berechnen. Da jedoch die Festsetzung des Selbstbehalts durchweg nur auf Grund roher Schätzungen erfolgt, dürfte die näherungsweise Berechnung der riskierten Summen kaum den Wert eines Verfahrens herabsetzen. Es kommt noch hinzu, dass der genaue Exzedent sowieso während eines Jahres in vielen Fällen schwankt, da häufig Vorversicherungen mit verschiedenen Versicherungsbeginnen bestehen. Andererseits dürfen die Abweichungen natürlich auch nicht zu gross werden, so dass also z. B. die Annahme eines einfachen linearen Fallens des riskierten Kapitals sich nicht als empfehlenswert darstellt.

Man kann aber zu einer brauchbaren Methode gelangen, wenn man berücksichtigt, dass die Höhe der Reserve und damit des riskierten Kapitals weitgehend von dem im Versicherungsverhältnis enthaltenen Sparvorgang abhängig ist, wenn man also den Einfluss der Sterblichkeit auf die Reservebildung ausschaltet. Für die gemischte Versicherung z. B. ergibt sich dann als Prämienreserve beim Abschlusskostensatz α

$${}_m V_{x, \bar{n}} \sim 1 - (1 + \alpha) \frac{a_{\overline{n-m}|}}{a_{\bar{n}|}}$$

und als riskiertes Kapital

$${}_m R_{x, \bar{n}} \sim \frac{1 + \alpha}{a_{\bar{n}|}} a_{\overline{n-m}|}$$

Der Unterschied gegenüber den exakten Werten ist bekanntlich die Reserve für eine sogenannte «Totenrente», also ein Betrag, der auch häufig bei der Berechnung der Deckungsrückstellung vernachlässigt wird. Wir bezeichnen nun den Näherungswert mit R' und erhalten durch Umformung

$${}_m R'_{x, \bar{n}} = \frac{1 + \alpha}{a_{\bar{n}|}} \cdot \frac{1}{d} - \frac{1 + \alpha}{a_{\bar{n}|}} \cdot \frac{1}{d} \cdot v^{n-m}$$

$${}_m R'_{x, \bar{n}} = \frac{1 + \alpha}{a_{\bar{n}|}} \cdot \frac{1}{d} - \frac{1 + \alpha}{a_{\bar{n}|}} \cdot \frac{1}{d} \cdot v^n \cdot r^m$$

$${}_m R'_{x, \bar{n}} = \frac{1 + \alpha}{1 - v^n} - \frac{1 + \alpha}{1 - v^n} \cdot v^n \cdot r^m$$

Bezeichnen wir weiter das Beginnjahr mit y , das Berechnungsjahr mit z und das Endjahr mit u , so ist

$$m = z - y$$

und

$${}_m R'_{x, \overline{n}|} = \frac{1 + \alpha}{1 - v^n} - \frac{1 + \alpha}{1 - v^n} \cdot v^{y+n} \cdot r^z$$

Bei der Versicherung mit festem Auszahlungstag ergibt sich entsprechend

$${}_m R'_{x, \overline{n}|} = \frac{v^n + \alpha}{1 - v^n} - \frac{v^n + \alpha}{1 - v^n} \cdot v^{y+n} \cdot r^z$$

Todesfallversicherungen mit abgekürzter Beitragszahlungsdauer lassen sich bekanntlich auf gemischte Versicherungen zurückführen, und zwar durch die Annahme

$$\begin{aligned} {}_m R_x &= P_x \cdot a_{x+m, \overline{n-m}|} + d \cdot a_{x+m} = (P_x + d) \cdot a_{x+m, \overline{u-m}|} \\ P_x \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{D_{x+m}} + d \cdot \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} &= (P_x + d) \frac{N_{x+m} - N_{x+u}}{D_{x+m}} \\ N_{x+u} &= N_{x+n} \cdot \frac{P_x}{P_x + d} \end{aligned}$$

In diesem Fall bedeutet P_x die sogenannte gezillmerte Nettoprämie. Bei einfachen Todesfallversicherungen nimmt man zweckmässigerweise an, dass sie gemischte Versicherungen etwa auf das 90. oder 85. Lebensjahr seien.

Mit dem angegebenen Verfahren kann man also ein riskiertes Kapital stets in der Form berechnen

$${}_m R'_x = K_1 - K_2 \cdot r^z$$

und für eine beliebige Gruppe aus

$$\Sigma R' = \Sigma K_1 - r^z \Sigma K_2$$

wobei K_1 und K_2 Werte bezeichnen, die sich während der Vertragsdauer bzw. Beitragszahlungsdauer nicht ändern. Weiter gilt stets die Beziehung

$$K_2 = K_1 \cdot v^{y+n}$$

Ist der in Einheiten des riskierten Kapitals ausgedrückte Selbstbehalt S , so beträgt der gesamte Exzedent

$$\Sigma E = \Sigma (K_1 - S) - r^z \Sigma K_2$$

Die Berechnung des gesamten Exzedenten stellt allerdings erst einen Teil des Problems dar, da wir für die Ermittlung der Rückversicherungsprämie die Exzedenten der einzelnen Alter mit den entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeiten multiplizieren müssen. Es leuchtet ein, dass wir für unseren Zweck der Sterbenswahrscheinlichkeit einen analytischen Ausdruck zugrunde legen müssen. Unter den bekannten Ausdrücken nimmt der aus dem Gesetz von Gompertz-Makeham sich ergebende zweifellos den ersten Platz ein, da er die beobachteten Werte in ausreichender Annäherung wiedergibt. Hier- nach ist

$$q_x = 1 - s g^{c^x(c-1)} = 1 - e^{\ln s + c^x(c-1) \ln g}$$

Dieser Ausdruck ist jedoch zu kompliziert, um eine gesamte Ermittlung der Rückversicherungsprämie zu ermöglichen. Man kann ihn aber mit grosser Annäherung durch einen anderen, einfacheren Ausdruck ersetzen. Wir können nämlich wegen der allgemein gültigen Beziehung

$$\ln(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots$$

schreiben

$$q_x = 1 - e^{\ln s + c^x(c-1) \ln g - \frac{1}{2} [c^x(c-1) \ln g]^2 + \dots} \cdot e^{\frac{1}{2} [c^x(c-1) \ln g]^2 - \dots}$$

$$q_x = 1 - s [1 + c^x(c-1) \ln g] \cdot e^{\frac{1}{2} [c^x(c-1) \ln g]^2 - \frac{1}{3} [c^x(c-1) \ln g]^3 + \dots}$$

Für die für die Rückversicherung in Betracht kommenden Alter ist

$$e^{\frac{1}{2} [c^x(c-1) \ln g]^2 - \frac{1}{3} [c^x(c-1) \ln g]^3 + \dots} \sim 1$$

da c ungefähr 1,1 beträgt und $(-\ln g)$ durchweg kleiner als 0,001 ist.

Wir erhalten dann

$$q_x \sim 1 - s [1 - c^x(c-1)(-\ln g)]$$

$$q_x \sim 1 - s + s(c-1)(-\ln g) c^x$$

bzw. wenn $1 - s = a$, und $s(c-1)(-\ln g) = b$

$$q_x \sim a + b c^x$$

Eine noch bessere Annäherung erhält man u. U., wenn man die Parameter a , b und c nicht direkt aus den Gompertz-Makehamschen Konstanten berechnet, sondern dadurch, dass man z. B. drei Werte der Funktion $q_x = a + bc^x$ durch bekannte Werte festlegt.

Unter dieser Annahme beträgt die Prämie RP für den Exzedenten im m -ten Versicherungsjahr

$$RP = E(a + bc^{x+m-1}) = K_1 - S - r^z K_2 \cdot (a + bc^{x+m-1})$$

Wir führen nun als neue Grösse das rechnungsmässige Geburtsjahr $g = y - x$ ein und erhalten

$$RP = (K_1 - S - r^z K_2) \cdot (a + bc^{z-g-1})$$

$$RP = a(K_1 - S) - aK_2 r^z + b(K_1 - S) c^{t-g-1} c^z - bK_2 c^{t-g-1} (rc)^z$$

Da der Exponent z für das praktische Rechnen zu gross ist, kann man noch ein feststehendes Jahr t einführen, etwa 1940. Dann wird

$$RP = a(K_1 - S) - aK_2 r^t r^{z-t} + b(K_1 - S) c^{t-g-1} c^{z-t} - bK_2 r^t c^{t-g-1} (rc)^{z-t}$$

Jetzt setzen wir $H_1 = a(K_1 - S)$

$$H_2 = aK_2 r^t$$

$$H_3 = b(K_1 - S) c^{t-g-1}$$

$$H_4 = bK_2 r^t c^{t-g-1}$$

Daraus ergibt sich

$$RP = H_1 - H_2 r^{z-t} + H_3 c^{z-t} - H_4 (rc)^{z-t}$$

und die Rückversicherungsprämie für den ganzen Bestand

$$\Sigma RP = \Sigma H_1 - r^{z-t} \Sigma H_2 + c^{z-t} \Sigma H_3 - (rc)^{z-t} \Sigma H_4$$

Die Aufschläge für Verwaltungskosten werden dadurch berücksichtigt, dass man die ursprünglichen Konstanten a und b ändert. Einen Aufschlag im Verhältnis zum Exzedenten erhält man durch ein Vergrössern von a , und einen Aufschlag im Verhältnis zur Prämie durch das Multiplizieren von a und b mit einem Faktor.

Den gesamten Exzedenten errechnet man aus der Gleichung

$$\Sigma E = \frac{1}{a} [\Sigma H_1 - r^{z-t} \Sigma H_2]$$

Es ist praktisch empfehlenswert, wenn in einer besonderen Spalte der Wert c^{t-g-1} festgehalten wird. Bei einer eventuellen Änderung des Selbstbehaltes — von S auf S' — kann dann die neue Rückversicherungsprämie ($\Sigma \overline{RP}$) aus der bisherigen (ΣRP) berechnet werden durch die Beziehung

$$\Sigma \overline{RP} = \Sigma RP - (S' - S) (na + bc^{z-t} \Sigma c^{t-g-1})$$

(n = Anzahl der Versicherungen).

Es ist erforderlich, dass man für jede Versicherung weiss, in welchem Jahr das riskierte Kapital unter den Selbstbehalt sinkt, weil sie dann aus dem Bestand genommen werden muss. Dieses Jahr (w) ergibt sich aus

$$r^{w-t} = \frac{H_1}{H_2}$$

Der nächstkleinere Wert in der Tabelle der Aufzinsungsfaktoren r^n zeigt an, wieviel Jahre nach dem festen Jahr t die Rückversicherung abläuft.

Bei den bisherigen Überlegungen ist angenommen worden, dass als Rückversicherungsperiode das Versicherungsjahr gewählt wird, während es tatsächlich praktischer ist, einheitlich das Kalenderjahr zu nehmen. Hierdurch ergeben sich jedoch in den Formeln keine Änderungen, lediglich das rechnungsmässige Geburtsjahr g kann sich um 1 verändern.

Risikozuschläge sind durch eine Änderung von g zu berücksichtigen, indem man feststellt, welchem Eintrittsalter der erhöhte Beitrag im Tarif des Versicherten entspricht. Die Differenz gegenüber dem wahren Eintrittsalter ist von g abzuziehen.

Für die Erfassung von Versicherungen von zwei verbundenen Leben bestehen zwei Möglichkeiten. Man kann sie einmal getrennt behandeln und besondere Konstanten a , b und c berechnen. Praktischer ist es aber wohl, die beiden Personen für sich im allgemeinen Bestand zu erfassen. Man muss dann nur für eine Person vereinbaren, dass bei ihrem Tode die Prämie für die andere für die gerade laufende Versicherungsperiode zurückgegeben wird.