Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 47 (1947)

Artikel: Theorie und Anwendung der "oskulatorischen" Interpolationsformeln

Autor: Michalup, Erich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966853

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Theorie und Anwendung der «oskulatorischen» Interpolationsformeln[1]

Von *Erich Michalup*, Caracas, Venezuela

Die Anwendung der Becker-Zeunerschen Methode zur Berechnung von Volkssterbetafeln hat zur Voraussetzung, dass bei der Volkszählung nach dem Geburtsdatum gefragt wird und dass die Statistik der Sterbefälle Geburts- und Todestag ausweist. Eine diesbezügliche Resolution wurde vom Internationalen Statistischen Kongress im Haag [1] auf Antrag von Baumhauer gefasst. Dieser Forderung wurde in der Schweiz durch das am 1. Jänner 1876 in Kraft getretene Bundesgesetz betreffend Feststellung und Beurkundung des Zivilstandes und die Ehe [2] Rechnung getragen, und die bisher veröffentlichten allgemeinen schweizerischen Volkssterbetafeln [3] wurden mit zwei Ausnahmen [4] nach der Becker-Zeunerschen Methode berechnet. Die beiden Tafeln 1881/1888 und 1889/1900 wurden auf Grund der Böckhschen Methode konstruiert, doch konnte Steiner-Stoss feststellen [5], dass es vom praktischen Standpunkt aus nebensächlich ist, ob die Becker-Zeunersche Methode oder die Böckhsche zur Anwendung gelangt, da die festgestellten Abweichungen nicht einmal die Grösse der Differenzen erreichen, die durch die Ausgleichung bewirkt werden.

Während nun in den meisten Staaten des europäischen Kontinentes die Becker-Zeunersche Methode zur Anwendung gelangt, die eine theoretisch einwandfreie Grundlage hat, wird in England, den Dominions, in den Vereinigten Staaten Nordamerikas und in Lateinamerika bei den Volkszählungen im allgemeinen nur nach den vollendeten Altersjahren gefragt, wodurch es unmöglich gemacht wird, eine Volkssterbetafelkonstruktion nach Becker-Zeuner durchzuführen.

---

[1]) Zu dieser Arbeit wurde ich durch eine Bemerkung des Herrn Dr. Renfer in seinem Jubiläumsbericht «Vierzig Jahre Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker» (Mitteilungen, Band 45/2, Seite 182) angeregt.

Die Frage nach vollendeten Altersjahren bringt nun Resultate hervor, deren Genauigkeit zum Teil vom Grade des Bevölkerungsniveaus abhängt, und ihr Studium hat eine umfangreiche Literatur hervorgebracht [6]. Der bemerkenswerteste systematische Fehler, der bei allen diesen Volkszählungen immer wieder, wenn auch in verschiedener Stärke, auftritt, ist die Über- bzw. Unterbesetzung einzelner Altersklassen, weshalb bei der Verarbeitung der Volkszählungsergebnisse immer Gruppen gebildet werden müssen, um zu annehmbaren Ergebnissen zu gelangen. In früheren Jahren wurden die Volkszählungsergebnisse nur in Fünfer- oder Zehnergruppen veröffentlicht, und die Besetzung der einzelnen Altersklassen musste durch Anwendung von Interpolationsformeln bestimmt werden. Wenn aber zwischen den Werten einer Reihe neue Werte durch Anwendung der gewöhnlichen Interpolationsformeln gewonnen werden sollen, so werden im allgemeinen in den höheren Differenzen gewisse Diskontinuitäten auftreten. Um nun diese Erscheinung auszumerzen, wurde ein doppeltes Verfahren angewendet, und zwar wurden die gesuchten Werte provisorisch durch Anwendung der gewöhnlichen Interpolationsformel mit konstanten vierten Differenzen und dann endgültig mittels der sogenannten Sinuskurve

$$\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{10}\right) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 9$$

berechnet. Diese mühevolle Methode wurde verlassen, als Sprague [7] eine neue Interpolationsformel ableitete, und zwar so, dass die aufeinanderfolgenden Interpolationskurven an den gemeinsamen Punkten sowohl gleiche Tangenten als auch gleiche Krümmungsradien aufweisen.

Um zwischen den Punkten u_0 und u_1 zu interpolieren, werden zwei biquadratische Parabeln bestimmt. Die erste geht durch die 5 Punkte u_{-2} bis u_2, und die zweite durch die 5 Punkte u_{-1} bis u_3. Durch Gleichsetzung des ersten und zweiten Differentialquotienten der beiden Partialkurven und aus der Bedingung, dass die Interpolationskurve durch die beiden Punkte u_0 und u_1 hindurchgehen soll, werden die 6 Konstanten einer Parabel fünften Grades bestimmt, woraus schliesslich die gesuchte Gleichung der Interpolationskurve hervorgeht. Karup hat auf Grund des Gedankenganges von Sprague eine Formel abgeleitet [8], die nur den ersten Differentialquotienten

berücksichtigt, so dass sie nicht mehr oskulatorisch, sondern nur noch tangierend ist. Da an die Interpolationskurve weniger Bedingungen gestellt werden, verwendet die Karupsche Formel nur vier gegebene Werte, während Sprague deren sechs benötigt. Karups Formel wurde dann später auf eine andere Art von King abgeleitet.

Der Effekt sowohl der Spragueschen als auch der Karup-Kingschen Interpolationsformeln war nun tatsächlich eine merklich glattere Verbindungskurve, doch erwähnte Lidstone in der Diskussion von Kings Arbeit [9], dass die dritten Differenzen der interpolierten Werte in vielen Fällen in der Mitte der Fünfergruppen etwas heftige Sprünge aufweisen. Diese Bemerkung scheint bisher nicht weiter untersucht worden zu sein und wird darauf später noch zurückgekommen. Lidstone [10] zeigte auch, wie die Spraguesche und die Karupsche Interpolationsformeln auf einem etwas anderen Wege entwickelt werden können, und zwar verwendet er die von Karup erwähnte Tatsache, dass sich diese beiden Formeln von den gewöhnlichen Interpolationsformeln nur durch das letzte Glied unterscheiden, das derart konstruiert ist, dass eben an den Punkten, wo die Interpolationskurven zusammenstossen, eine glatte Verbindung eintritt. Buchanan [11] hat nun auf diesem Gebiete das erstemal die von Sheppard [12] eingeführte Zentraldifferenzenbezeichnung in der von Everett [13] entwickelten Form angewendet. Durch Einführung der beiden Operatoren

$$\delta u_0 = u_{\frac{1}{2}} - u_{-\frac{1}{2}}; \qquad \mu u_0 = \frac{1}{2}\left(u_{\frac{1}{2}} + u_{-\frac{1}{2}}\right)$$

ergibt sich die zweite Zentraldifferenz

$$\delta^2 u_0 = u_1 - 2u_0 + u_{-1} \; (= \Delta^2 u_{-1})$$

und die vierte Zentraldifferenz wird

$$\delta^4 u_0 = u_2 - 4u_1 + 6u_0 - 4u_{-1} + u_{-2} \; (= \Delta^4 u_{-2})$$

Die Newton-Stirlingsche Interpolationsformel schreiben wir nun, indem die Bezeichnungsweise von Liechti [14] etwas abgeändert wird,

$$y_x = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x^2}{1\cdot 2}\Delta^2 u_0 + \frac{x(x^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 u_0 + \frac{x^2(x^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 u_0 + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^5 u_0 + \ldots$$

Die Entfernung von u_0 sei x und die Entfernung von u_1 sei ξ, so dass $x + \xi = 1$, woraus sich die folgende transformierte Formel

$$y_x = \begin{array}{l} \xi u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2-1)}{6}\delta^2 u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)}{120}\delta^4 u_0 + \ldots \\ + x u_1 + \dfrac{x(x^2-1)}{6}\delta^2 u_1 + \dfrac{x(x^2-1)(x^2-4)}{120}\delta^4 u_1 + \ldots \end{array}$$

ergibt.

Es werden von Buchanan drei kubische Parabeln bestimmt. Die erste (A) geht durch die Punkte u_{-1} bis u_2 hindurch, die zweite (B) durch die Punkte u_{-2} bis u_1 und die dritte (C) durch die Punkte u_0 bis u_3. Um nun zwischen u_0 und u_1 zu interpolieren, wird eine Parabel fünften Grades bestimmt, wobei der Wert des ersten und zweiten Differentialquotienten im Punkte u_0 gleich ist dem arithmetischen Mittel der entsprechenden Werte der beiden Kurven (A) und (B), und im Punkte u_1 gleich ist dem arithmetischen Mittel der entsprechenden Werte der beiden Kurven (A) und (C).

An dieser Stelle möge eine Arbeit von Gini [15] erwähnt werden, der ebenfalls Partialkurven und die früher erwähnte Bildung von Mittelwerten anwendet und zu einer Formel gelangt, die es ermöglicht, die Besetzungszahlen der einzelnen Alter durch die Fünfergruppen auszudrücken, während die bisher erwähnten Formeln z. B. die von der höchsten Altersgruppe an aufsummierte Reihe interpolieren, um durch Differenzenbildung die Besetzungszahlen der einzelnen Alter zu finden. Es scheint bis jetzt unbekannt gewesen zu sein, dass die Formel von Gini, die übrigens bisher weder in der englischen noch nordamerikanischen Literatur erwähnt wurde, mit der Buchananschen Formel identisch ist, ein Umstand, der auch bei Besprechung von Ginis Arbeit im Journal des englischen Aktuarinstitutes [16] übersehen wurde.

Auf der von Buchanan verwendeten Mittelbildung basiert auch eine von Shovelton veröffentlichte tangierende Interpolationsformel [17]. Um zwischen u_0 und u_1 zu interpolieren, bestimmt er zwei biquadratische Parabeln, die durch die Punkte u_{-2} bis u_2 (A) bzw. u_{-1} bis u_3 (B) hindurchgehen und eine Interpolationskurve vierten Grades, welche dieselbe Tangente wie die Kurve (A) im Punkte u_0 und wie die Kurve (B) im Punkte u_1 hat. Als weitere Bedingung ver-

langt er, dass der Durchschnittswert der Ordinaten der Interpolationskurve zwischen u_0 und u_1 gleich ist dem arithmetischen Mittel der Durchschnittswerte der Ordinaten der beiden Kurven (A) und (B) im selben Intervall.

Die Mitarbeit der nordamerikanischen Aktuare hat verhältnismässig früh eingesetzt, denn bereits im Jahre 1906 entwickelte Henderson [18] eine tangierende Interpolationsformel, die ähnlich gute Resultate liefert wie die schon erwähnte Formel von Shovelton. In zwei Arbeiten von Reilly [19], die aus theoretischen Gründen sehr bemerkenswert sind, wird eine Verallgemeinerung der Methoden von Sprague und Lidstone gegeben, und es wird das interessante Resultat gewonnen, dass die beiden Methoden nur dann zur selben Formel führen, wenn der Grad des Polynoms das Doppelte des Kontaktgrades nicht übersteigt.

Das den bisher erwähnten Entwicklungen zugrunde liegende Prinzip war, dass die Ableitungen der Interpolationskurve an den gemeinsamen Punkten einen durch Partialkurven bestimmten Wert annehmen müssen. Von diesem Prinzip ist nun Henderson [20] dadurch abgewichen, dass er die Werte der Ableitungen der Interpolationskurven an den gemeinsamen Punkten einander gleichsetzt und darauf verzichtet, dass sie einen bestimmten Wert annehmen müssen. Ausserdem verwendete er die Hypothese, dass die sechsten Zentraldifferenzen den Wert Null haben, wodurch die erste Ableitung dieser Formel diskontinuierlich wird.

Jenkins [21] Arbeiten fussen auf der von Karup erwähnten Tatsache, dass sich die oskulatorischen Interpolationsformeln von den gewöhnlichen nur durch das letzte Glied unterscheiden, und auf der von Henderson eingeführten Änderung, wonach auf die Verwendung von Partialkurven verzichtet wird. In einer Tabelle [22] bringt Jenkins 16 Formeln mit ein bis vier kontinuierlichen Ableitungen und bemerkt, dass die einzige von den in der Tabelle enthaltenen Formeln, die bereits früher veröffentlicht wurde, die Karupsche ist, doch scheint er übersehen zu haben, dass die danebenstehende Formel bereits im Jahre 1906 von Henderson mitgeteilt wurde.

Den bisher entwickelten Formeln liegt die stillschweigende Annahme zugrunde, dass die gegebenen Werte, zwischen denen interpoliert werden soll, exakt und absolut korrekt sind. Nun trifft dies aber in den für den Versicherungsmathematiker wichtigsten Zahlen-

reihen nicht zu, sondern es handelt sich da fast immer um Werte, die nur annäherungsweise richtig sind. Es ist daher weder vom theoretischen noch vom praktischen Standpunkt aus erforderlich, dass die Interpolationskurve tatsächlich an den sogenannten Kardinalpunkten die durch die Beobachtung oder sonstwie errechneten Werte annimmt, es genügt, wenn die Interpolationskurve, ähnlich wie es die graphische Ausgleichsmethode verlangt, nur in der Nähe der Kardinalpunkte vorbeigeht. Eine Bemerkung von Fassel [23] hat nun Jenkins aufgegriffen und darauf verzichtet, dass die Interpolationskurve durch die Kardinalpunkte hindurchgeht. Seine beiden diesbezüglichen Arbeiten [24] müssen als grundlegend angesehen werden. Er begnügt sich, von den Interpolationskurven zu verlangen, dass sie und ihre beiden ersten Ableitungen an den gemeinsamen Punkten gleiche Werte annehmen, und nennt sie aus diesem Grunde modifizierte (modified) oskulatorische Interpolationsformeln, während sie Greville und Schoenberg [25] glättende (smoothing) Formeln bezeichnet. Es scheint aber, dass ausgleichende (graduating) oskulatorische Interpolationsformeln eine bessere Benennung ist, da die auf der Jenkinsschen Methode fussenden Interpolationsformeln tatsächlich eine Mischung von Interpolation und Ausgleichung darstellen. Diese Formeln haben nun die Aufmerksamkeit englischer Aktuare auf sich gezogen, und Buchanan [26] zeigt durch verschiedene Anwendungen, dass die erhaltenen Resultate sehr zufriedenstellend sind. Auch Reid und Dow [27] untersuchen den theoretischen und praktischen Erfolg der durch die Anwendung der Jenkinsschen Formel erzielt wird, und insbesondere beschäftigen sie sich mit der Bestimmung der Kardinalpunkte und einer Abänderung der Formel, dass z. B. die Quadrate der dritten Differenzen der interpolierten Werte ein Minimum ergeben oder dass die tatsächlichen und die nach der Ausgleichung zu erwartenden Todesfälle gleich sind etc. Eine theoretisch sehr interessante Untersuchung von Kerrich [28] beschäftigt sich mit den Interpolationsmethoden, die dem Spragueschen und Jenkinsschen Typus angehören und mit ihren Beziehungen zu der von den skandinavischen Aktuaren (Nyboelle und Steffensen) entwickelten pseudo-analytischen Ausgleichung. Eine ziemlich umfassende Darstellung der allgemeinen Theorie der oskulatorischen Interpolationsformeln gibt Greville [29].

Wie aus der Jenkinsschen Formel hervorgeht, werden die Kardinalpunkte nicht reproduziert, und der Unterschied zwischen den unaus-

geglichenen und ausgeglichenen Werten an den Kardinalpunkten beträgt $^1/_{36}$ des negativen Wertes der vierten Zentraldifferenz. Wenn daher die vierten Zentraldifferenzen immer dasselbe Vorzeichen aufweisen, was z. B. im allgemeinen der Fall sein wird, wenn die Kardinalpunkte auf einer Makehamkurve liegen, so wird ein vollkommen zufriedenstellendes Resultat kaum erreicht werden. Es ist daher erforderlich, um gute Ergebnisse zu erhalten, dass die vierten Zentraldifferenzen klein sind und häufig, womöglich alternativ, ihr Vorzeichen wechseln. Es ist nun merkwürdigerweise gefunden worden, dass die letztere Bedingung fast immer in genügendem Masse bei den praktischen Anwendungen erfüllt ist.

Es ist schon früher erwähnt worden, dass Reid und Dow eine Abänderung der Jenkinsschen Formel ins Auge gefasst hat, um die Quadrate der dritten Differenzen der interpolierten Werte zu einem Minimum zu machen. Beers' Arbeit [30] basiert auf einem ähnlichen Gedankengang, und zwar verzichtet er auf die Eigenschaft, dass die Ableitungen der Interpolationskurve an den gemeinsamen Punkten gleiche Werte haben und stellt die Bedingung, eine die Kardinalpunkte reproduzierende Interpolationsformel zu finden, so dass die Summe der Quadrate der fünften Differenzen ein Minimum wird, wobei er ebenfalls nur das letzte Glied der gewöhnlichen Interpolationsformel entsprechend abändert, aber verlangt, dass sie gleich den Formeln von Sprague und Shovelton korrekt bis zu den vierten Differenzen sei. In seiner folgenden Arbeit [31] entwickelte er eine neue ausgleichende Interpolationsformel, korrekt bis zu den dritten Differenzen, wobei er die Quadrate der vierten Differenzen zu einem Minimum macht, doch ist der Unterschied der ausgeglichenen und unausgeglichenen Werte an den Kardinalpunkten merklich grösser ($-0.043\,\delta^4 u_1$), so dass die Anwendungsmöglichkeit dieser Formel etwas eingeschränkter ist. Etwas Ähnliches wäre über eine Formel von Greville [32] zu sagen, bei der der Unterschied $-0.0538\,\delta^4 u_1$ beträgt. Greville entwickelt in dieser Arbeit noch eine Reihe anderer Formeln, die auf analogen Voraussetzungen beruhen. Der Vollständigkeit halber wäre noch eine Arbeit von Vaughan [33] zu erwähnen, der einige ausgleichende Interpolationsformeln entwickelt und als Grundlage einer Formel den sogenannten Ausgleichskoeffizienten verwendet.

In der am Schluss folgenden Übersicht sind einige Interpolationsformeln in der Everettschen Form aufgenommen.

Das Glättekriterium

Bevor an eine kritische Untersuchung der bisher vorgeschlagenen Interpolationsformeln geschritten werden kann, muss zunächst einmal festgestellt werden, was eine oskulatorische Interpolationsformel leisten soll und worauf sich eine Beurteilung der Güte von solchen Formeln zu gründen hat. Die Überlegung «*Die Natur macht keine Sprünge*» ist im Grunde genommen der wichtigste theoretische Grundsatz der Interpolations- und Ausgleichsrechnung. Bei der Ausgleichung will man eine unregelmässige Reihe von Beobachtungsdaten durch eine regelmässige, glatte Zahlenreihe ersetzen, die natürlich den beobachteten Werten möglichst gut folgen soll, ebenso soll durch die Interpolation eine glatte Verbindung zwischen den Kardinalpunkten bewerkstelligt werden. Was ist nun aber diese glatte Verbindung und welche Kriterien sind anzuwenden? Im allgemeinen begnügt man sich, eine Reihe als glatt zu bezeichnen, wenn die dritten Differenzen klein sind, wenn sie keine zu grossen Sprünge aufweisen, und meistens beschränken sich die Autoren auf eine Untersuchung der Reihe der dritten Differenzen. Seal [34] meint, dass ein Kriterium bezüglich der Glätte leicht formuliert werden kann, nämlich, die Reihe der zweiten oder dritten Differenzen darf keine grossen Sprünge zeigen, während King [35] auch die fünften Differenzen berücksichtigt und seiner Ansicht Ausdruck gibt, dass die Differenzen, wenn nicht klein, so doch ein bestimmtes Gesetz befolgen sollen, denn, wenn auch kleine dritte oder fünfte Differenzen als Beweis für eine gute Ausgleichung angesehen werden können, ist das Gegenteil nicht richtig, dass die Ausgleichung schlecht ist, wenn die dritten Differenzen gross sind.

Der Begriff der *Glätte* ist wohl fundamental, aber bisher noch nicht genau definiert worden, und aus diesem Grunde ist es bisher nicht gelungen, ein allgemein anerkanntes Kriterium aufzustellen. Der Grund liegt darin, dass das in der Ausgleichsrechnung übliche und theoretisch fundierte Glättekriterium — kleine dritte Differenzen — ohne irgendwelche Änderungen auch auf Interpolationsformeln übertragen wurde. Nun ist es aber aus theoretischen Gründen nicht zulässig, immer nur dieselbe Differenzenreihe zu untersuchen, unabhängig von der Anzahl der Differenzen, welche die Interpolationsformel verwendet. Die gewöhnliche Interpolationsformel mit konstanten $(n-1)$-ten Differenzen verwendet zur Bestimmung der interpolierten Werte die an

«n» Punkten gegebenen Werte, und bei Anwendung auf eine Parabel $(n-1)$-ter Ordnung verschwinden die n-ten Differenzen. Um aber irgendwelche Werte, die auf dieser Parabel liegen, zu berechnen, ist es nicht notwendig, eine Interpolationsformel anzuwenden, sondern diese Werte können auch durch direkte Berechnung gefunden werden. Die der Anwendung von Interpolationsformeln zugrunde liegende Hypothese ist die Annahme, dass die zwischen den gegebenen Punkten gelegenen Werte annäherungsweise durch Parabeln bestimmt werden können. Die Eigenschaft, dass die Interpolationskurven an den gemeinsamen Punkten gleiche Werte und gleiche Ableitungen haben sollen, und die Tatsache, dass das zugrunde liegende Gesetz nicht bekannt ist, hat zur Folge, dass die $(n-1)$-ten Differenzen nicht konstant sein werden und daher die n-ten Differenzen nicht verschwinden. Die Gleichsetzung der Ableitungen soll nun bewirken, dass die $(n-1)$-ten Differenzen kontinuierlich verlaufen, ohne irgendwelche Sprünge aufzuzeigen, und dass die n-ten Differenzen kleine Grössen werden, die um den Wert Null schwingen.

Wir werden daher aus diesen theoretischen Erwägungen Interpolationskurven als glatt bezeichnen, wenn sowohl die Grösse als auch die Vorzeichen der ersten Differenzenreihen kontinuierlich und regelmässig verlaufen, und zwar ist dieselbe Anzahl von Differenzen in Betracht zu ziehen, als von der Interpolationsformel verwendet werden. Ausserdem soll sich auch die Summe der Werte der Differenzen ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen von einer Differenzenreihe zur anderen verringern. Es wären daher z. B. bei der Karup-Kingschen Interpolationsformel die ersten drei Differenzen diesbezüglich zu untersuchen und bei den anderen bisher erwähnten Formeln die ersten fünf Differenzenreihen. Anstatt nun tatsächlich alle diese Differenzenreihen zu untersuchen, genügt es wohl, die letzte, also die dritte oder die fünfte Differenzenreihe zu untersuchen, denn wenn diese regelmässig ist, so müssen es natürlich auch die vorherigen Differenzenreihen sein. Wenn man sich nur auf die Summe der absoluten Werte der Differenzenreihen beschränkt, kann man leicht zu Fehlschlüssen gelangen, wie noch später gezeigt werden soll. Dabei darf nicht ausser acht gelassen werden, dass auch die ausgeglichenen Werte den beobachteten möglichst gut folgen sollen. Doch hier steht man abermals vor einem analogen Problem. Man verlangt, wie z. B. Simonett [36] ausführt, dass die Gesamtsumme der Abweichungen möglichst klein

sein soll, damit die Summe der ausgeglichenen mit der Summe der beobachteten Werte fast übereinstimmt, mit anderen Worten, die positiven und negativen Abweichungen sollen einander gleich sein; ferner sollen die mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen aufsummierten Abweichungen oft Null oder nahezu Null sein, damit zwischen der Summe der ausgeglichenen Werte und der entsprechenden Summe der Beobachtungsdaten bis zu jeder Stelle ein möglichst kleiner Unterschied besteht. Daraus folgt, dass oft ein Zeichenwechsel der aufsummierten Differenzen eintreten soll. Wenn z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeiten ausgeglichen werden, soll der Unterschied zwischen den erwarteten und tatsächlichen Sterbefällen möglichst klein sein, doch darf die Bedeutung dieses letzteren Punktes nicht überschätzt werden. Man darf nicht ausser acht lassen, dass die in der Praxis tauglichen Interpolations- oder Ausgleichsformeln ohne Einführung von Gewichten angewendet werden, weshalb schon dieser Umstand gewisse kleine Abweichungen rechtfertigt. Die Herausgeber des Journals des englischen Aktuarinstitutes weisen auch darauf hin [37], dass die Kleinheit der Abweichungen als Beweis für die Güte der Ausgleichung nicht in Betracht gezogen werden kann, wenn die Beobachtungsdaten systematische Abweichungen aufweisen, und eine analytische Kurve, wie z. B. die Makehamkurve, die nur wenige Konstante aufweist, die aus der ganzen vorhandenen Wertemasse bestimmt werden, mag bessere Resultate ergeben als eine Kurve, die zu sehr den mit Fehlern behafteten Originaldaten folgt. Es werden nunmehr im nachfolgenden auf Grund des neu aufgestellten Kriteriums einige der bisher in Vorschlag gebrachten und früher erwähnten Formeln untersucht, wobei festgestellt werden wird, dass keine dieser Formeln dem neu aufgestellten Kriterium vollauf genügt, und auf Grund dieser Ergebnisse wird versucht, eine neue Formel abzuleiten, die eher geeignet ist, als in dieser Hinsicht zufriedenstellend bezeichnet zu werden.

Kritik der bisher veröffentlichten oskulatorischen Interpolationsformeln

Eine systematische Behandlung dieses Problems erfordert, dass sowohl die Interpolationsformeln als auch deren Differenzen in einer klaren und deutlichen Form dargestellt werden, und zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, die Zentraldifferenzen durch die gegebenen Werte

auszudrücken. Mit Rücksicht auf die Definition der Zentraldifferenzen ergibt sich für die

	gewöhnliche Interpolationsformel dritter Ordnung:					Karup-Kingsche Interpolationsformel:				
x	y_x	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	y_x	u_{-1}	u_0	u_1	u_2
0·0	125	0	125	0	0	125	0	125	0	0
0·2	125	–6	108	27	–4	125	–8	114	21	–2
0·4	125	–8	84	56	–7	125	–9	87	53	–6
0·6	125	–7	56	84	–8	125	–6	53	87	–9
0·8	125	–4	27	108	–6	125	–2	21	114	–8

und für die dritten Differenzen:

x	$\delta^3 y_x$	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	$\delta^3 y_x$	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3
0·0	125	–1	3	–3	1	0	125	–3	9	–9	3	0
0·2	125	–1	3	–3	1	0	125	–3	9	–9	3	0
0·4	125	–1	3	–3	1	0	125	–3	9	–9	3	0
0·6	125	–5	19	–27	17	–4	125	0	2	–6	6	–2
0·8	125	4	–17	27	–19	5	125	2	–6	6	–2	0

Dieses Ergebnis zeigt, dass bei Intervallfünftelungen, die in der Praxis die weitaus wichtigsten sind und die auch fast ausschliesslich in dieser Arbeit berücksichtigt werden, die ersten drei dritten Differenzen gleich sind, zwischen dem dritten und vierten Glied erfolgt ein deutlich sichtbarer Sprung und ebenso zwischen dem vierten und fünften Glied, doch ist der Sprung bei der Karup-Kingschen Formel bedeutend geringer; andererseits sind die ersten drei Differenzen im Vergleich mit der gewöhnlichen Interpolationsformel gerade auf das Dreifache erhöht. Zwischen den dritten Differenzen der Karup-Kingschen Formel besteht nun ein merkwürdiger Zusammenhang

$$-\frac{3}{2}\,\delta^3 y_{0\cdot 6} = \delta^3 y_{1\cdot 0} = \delta^3 y_{1\cdot 2} = \delta^3 y_{1\cdot 4} = -\frac{3}{2}\,\delta^3 y_{1\cdot 8}$$

der besagt, dass die von Lidstone festgestellten Sprünge aus der theoretischen Grundlage der Formel zu erklären sind. Es sei gleich hier bemerkt, dass selbstverständlich diese Sprünge nicht so deutlich zum Vorschein kommen, wenn anstatt der Originaldaten deren Logarithmen

oder andere Funktionen, z. B. log p_x oder, wie von King vorgeschlagen wurde, log $(0 \cdot 1 + q_x)$ etc. interpoliert werden und wenn das Resultat nur aus drei- oder vierstelligen Zahlen bestehen soll. Die zweite merkwürdige Eigenschaft beider Formeln ist, dass die ersten drei Differenzen in jeder Fünfergruppe gleich sind. Nun kann auf dieselbe Art nachgewiesen werden, dass dieses letztere Ergebnis bei allen Formeln auftritt, die den dritten Grad nicht übersteigen, was zweifellos zu einer theoretisch fundierten Kritik dieser Formeln berechtigt. Hiezu gehören z. B. die beiden Formeln von Henderson und die ausgleichende Interpolationsformel von Jenkins.

Hendersons Formel vom Jahre 1906:								Dritte Differenzen:							
x	y_x	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	$\delta^3 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	750	0	0	750	0	0	0	750	3	–21	48	–48	21	–3	0
0·2	750	8	–66	688	142	–24	2	750	3	–21	48	–48	21	–3	0
0·4	750	9	–78	534	336	–57	6	750	3	–21	48	–48	21	–3	0
0·6	750	6	–57	336	534	–78	9	750	0	–7	24	–32	22	–9	2
0·8	750	2	–24	142	688	–66	8	750	–2	9	–22	32	–24	7	0

Hendersons Formel vom Jahre 1921:								Dritte Differenzen:							
x	y_x	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	$\delta^3 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	750	0	0	750	0	0	0	750	1	–11	28	–28	11	–1	0
0·2	750	6	–56	668	162	–34	4	750	1	–11	28	–28	11	–1	0
0·4	750	8	–73	524	346	–62	7	750	1	–11	28	–28	11	–1	0
0·6	750	7	–62	346	524	–73	8	750	5	–34	84	–102	67	–24	4
0·8	750	4	–34	162	668	–56	6	750	–4	24	–67	102	–84	34	–5

Jenkins' ausgleichende Formel:								Dritte Differenzen:							
x	y_x	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	$\delta^3 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	4500	–125	500	3750	500	–125	0	4500	6	–66	168	–168	66	–6	0
0·2	4500	–64	39	3508	1222	–204	–1	4500	6	–66	168	–168	66	–6	0
0·4	4500	–27	–188	2894	2076	–247	–8	4500	6	–66	168	–168	66	–6	0
0·6	4500	–8	–247	2076	2894	–188	–27	4500	5	–54	129	–112	27	6	–1
0·8	4500	–1	–204	1222	3508	39	–64	4500	1	–6	–27	112	–129	54	–5

Ein etwas anderes Ergebnis erhalten wir, wenn wir mit der gewöhnlichen Interpolationsformel oder mit der Karup-Kingschen Formel das Intervall in drei Teile teilen wollen.

Gewöhnliche Interpolationsformel:	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	Karup-Kingsche Interpolationsformel:	u_{-1}	u_0	u_1	u_2
$81\ y_0$	0	81	0	0	$81\ y_0$	0	81	0	0
$81\ y_{1/3}$	−5	60	30	−4	$81\ y_{1/3}$	−6	63	27	−3
$81\ y_{2/3}$	−4	30	60	−5	$81\ y_{2/3}$	−3	27	63	−6

denn die dritten Differenzen betragen:

	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3		u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3
$81\ \delta^3 y_0$	3	−9	9	−3	0	$81\ \delta^3 y_0$	9	−27	27	−9	0
$81\ \delta^3 y_{1/3}$	7	−25	33	−19	4	$81\ \delta^3 y_{1/3}$	3	−12	18	−12	3
$81\ \delta^3 y_{2/3}$	−4	19	−33	25	−7	$81\ \delta^3 y_{2/3}$	−3	12	−18	12	−3

doch liegt hier ein Resultat vor, das doch vielfach gemeinsame Erscheinungen mit den für die Intervallfünftelungen vorgefundenen Formeln aufweist, denn $\delta^3 y_0$ erhält bei Anwendung der Karup-Kingschen Formel den dreifachen Wert im Vergleich mit der gewöhnlichen Interpolationsformel, andererseits wird der Sprung von $\delta^3 y_{1/3}$ und $\delta^3 y_{2/3}$ bedeutend ermässigt, und bei der Karupschen Formel besteht ausserdem die Beziehung $\delta^3 y_{1/3} = -\delta^3 y_{2/3}$.

Die vorliegenden Ergebnisse lassen daher den Schluss zu, dass die Karup-Kingsche Formel vom theoretischen und teilweise auch vom praktischen Standpunkt aus nicht zu Resultaten führt, die als vollkommen befriedigend bezeichnet werden können.

Den Interpolationsformeln fünfter Ordnung ist zweifellos eine grössere Bedeutung zuzuschreiben, weil sie bei der Berechnung der interpolierten Werte mehr Glieder mitwirken lassen und daher angenommen werden darf, dass sie in vielen Fällen zufriedenstellendere Resultate erbringen werden. Entsprechend dem früher aufgestellten Kriterium wird sich das Interesse in erster Linie dem Verlauf der Reihe der fünften Differenzen zuwenden. Wenn die Interpolationsformel niedriger als fünften Grades ist, dann wird, wie leicht ein-

zusehen, immer $\delta^5 y_0 = 0$ sein, ebenso wie bei Intervallfünftelungen durch die gewöhnliche Interpolationsformel dritter Ordnung oder durch die Karup-Kingsche Formel, und nur bei Interpolationsformeln vom fünften oder höheren Grade werden die $\delta^5 y_0$ nicht verschwinden. Ausserdem findet man die merkwürdige Erscheinung, dass bei den Formeln dritten Grades die unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens aufsummierten fünften Differenzen innerhalb der Fünferintervalle den Wert Null ergeben, das heisst, dass die Summe der Werte der positiven und negativen Differenzen einander gleich ist. Dies ist der Fall bei beiden Formeln von Henderson und bei der ausgleichenden oskulatorischen Interpolationsformel von Jenkins. Dieser Umstand ergibt eine sehr einfache Kontrolle der durchgeführten numerischen Rechnungen und erklärt auch gewisse Beziehungen, die zwischen den Differenzen bestehen, wie z. B. bei der gewöhnlichen Interpolationsformel dritter Ordnung

$$-\frac{13}{4}\,\delta^5 y_{0\cdot 2} = \delta^5 y_{0\cdot 4} = -\,\delta^5 y_{0\cdot 6} = \frac{13}{4}\,\delta^5 y_{0\cdot 8}$$

bei der Spragueschen Formel

$$-\frac{6}{5}\,\delta^5 y_{0\cdot 6} = \delta^5 y_{1\cdot 0} = -\frac{6}{5}\,\delta^5 y_{1\cdot 4}$$

Bei der Formel von Henderson vom Jahre 1921 besteht die Beziehung

$$\delta^5 y_{0\cdot 2} = -\,\delta^5 y_{0\cdot 8}; \quad \delta^5 y_{0\cdot 4} = -\,\delta^5 y_{0\cdot 6}$$

bei Jenkins' ausgleichender Interpolationsformel ergibt sich

$$\delta^5 y_{0\cdot 2} = \frac{1}{3}\,\delta^5 y_{0\cdot 4} = -\frac{1}{3}\,\delta^5 y_{0\cdot 6} = -\,\delta^5 y_{0\cdot 8}$$

und bei der praktischen Anwendung beider Formeln zeigt sich daher eine systematische Unregelmässigkeit in der fünften Differenzenreihe, die im Widerspruch zu dem vorhin aufgestellten Glättekriterium steht.

Um sich ein besseres Bild machen zu können, seien im nachstehenden die fünften Differenzen von einigen der erwähnten Formeln angeführt:

Gewöhnliche Interpolationsformel dritter Ordnung:							Jenkins ausgleichende Interpolationsformel:							
x	$\delta^5 y_x$	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	$\delta^5 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	125	0	0	0	0	0	4500	0	0	0	0	0	0	0
0·2	125	–4	16	–24	16	–4	4500	–1	12	–39	56	–39	12	–1
0·4	125	13	–52	78	–52	13	4500	–3	36	–117	168	–117	36	–3
0·6	125	–13	52	–78	52	–13	4500	3	–36	117	–168	117	–36	3
0·8	125	4	–16	24	–16	4	4500	1	–12	39	–56	39	–12	1

Hendersons Formel vom Jahre 1906									Hendersons Formel vom Jahre 1921							
x	$\delta^5 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	$\delta^5 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	750	0	0	0	0	0	0	0	750	0	0	0	0	0	0	0
0·2	750	–3	14	–24	16	1	–6	2	750	4	–23	56	–74	56	–23	4
0·4	750	1	2	–22	48	–47	22	–4	750	–13	81	–207	278	–207	81	–13
0·6	750	4	–22	47	–48	22	–2	–1	750	13	–81	207	–278	207	–81	13
0·8	750	–2	6	–1	–16	24	–14	3	750	–4	23	–56	74	–56	23	–4

Bei den Formeln vierten Grades, z. B. den reproduzierenden Interpolationsformeln von Shovelton und Jenkins, muss selbstverständlich $\delta^5 y_0 = 0$ sein, und die Summe der sechsten Differenzen, unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens, ergibt folglich für jede Fünfergruppe den Wert Null, z. B. sechste Differenzen von Shoveltons tangierender Interpolationsformel:

x	$\delta^6 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	2500	–13	57	–90	50	15	–27	8
0·2	2500	15	–50	25	100	–175	110	–25
0·4	2500	15	–90	225	–300	225	–90	15
0·6	2500	–25	110	–175	100	25	–50	15
0·8	2500	8	–27	15	50	–90	57	–13

Die Formel von Buchanan ergibt, wie praktische Berechnungen zeigen, nicht besonders gute Resultate, ebenso von Reilly und Jenkins abgeleitete reproduzierende Interpolationsformeln mit kontinuierlichen dritten und vierten Ableitungen, mit anderen Worten, bei Anwendung des vorhin aufgestellten Kriteriums auf diese Formeln erhalten wir

nicht so zufriedenstellende Ergebnisse wie bei Anwendung von anderen Kriterien, die nicht so streng sind. Es wurde z. B. von Jenkins darauf hingewiesen, dass die Ermässigung des Grades bei ausgleichenden Interpolationsformeln den Vorteil mit sich bringt, dass sie Differenzenreihen von grösserer Glätte und weniger irregulären Schwankungen hervorbringt. Aus den vorstehenden Untersuchungen und den nachfolgenden Entwicklungen geht jedoch hervor, dass diese Behauptung nicht den Tatsachen entspricht, und weiter ergibt sich die Schlussfolgerung, dass die Abänderung des letzten Gliedes der gewöhnlichen Interpolationsformel derart beschaffen sein soll, dass sie zu keiner Gradermässigung führt, wenn in den höheren Differenzenreihen systematische Unregelmässigkeiten vermieden werden sollen.

Ableitung neuer Interpolationsformeln

Wir gehen von der Karupschen Feststellung aus, dass sich die oskulatorischen Interpolationsformeln von den gewöhnlichen nur durch das letzte Glied unterscheiden, und setzen daher wie Jenkins

$$y_x = \begin{array}{l} \xi u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2-1)}{6}\delta^2 u_0 + \varphi(\xi)\,\delta^4 u_0 \\ \\ + x u_1 + \dfrac{x(x^2-1)}{6}\delta^2 u_1 + \varphi(x)\,\delta^4 u_1 \end{array}$$

wobei wir annehmen, dass die Darstellung

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$$

gilt. Die Ableitungen der Interpolationskurve sind daher

$$y'_x = -u_0 - \frac{3\xi^2-1}{6}\delta^2 u_0 - \varphi'(\xi)\,\delta^4 u_0 + u_1 + \frac{3x^2-1}{6}\delta^2 u_1 + \varphi'(x)\,\delta^4 u_1$$

$$y''_x = \xi\,\delta^2 u_0 + \varphi''(\xi)\,\delta^4 u_0 + x\,\delta^2 u_1 + \varphi''(x)\,\delta^4 u_1$$

$$y'''_x = -\delta^2 u_0 - \varphi'''(\xi)\,\delta^4 u_0 + \delta^2 u_1 + \varphi'''(x)\,\delta^4 u_1$$

$$y''''_x = \varphi''''(\xi)\,\delta^4 u_0 + \varphi''''(x)\,\delta^4 u_1$$

und die Ableitungen der Funktion $\varphi(x)$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 \\
\varphi''(x) &= 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \\
\varphi'''(x) &= 6d + 24ex + 60fx^2 \\
\varphi''''(x) &= 24e + 120fx
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung der Funktionswerte an der Stelle u_1 ergibt sich für die erste Kurve $x = 1$, $\xi = 0$ und für die zweite Kurve $x = 0$, $\xi = 1$, folglich

$$\varphi(0)\,\delta^4 u_0 + u_1 + \varphi(1)\,\delta^4 u_1 = u_1 + \varphi(1)\,\delta^4 u_1 + \varphi(0)\,\delta^4 u_2$$

oder

$$\varphi(0)\,(\delta^4 u_0 - \delta^4 u_2) = 0 \tag{A}$$

welche Bedingung nur dann erfüllt sein kann, wenn $\varphi(0) = 0$ ist, da nach Voraussetzung die vierten Zentraldifferenzen nicht einander gleich sind, woraus folgt, dass $\varphi(0) = a = 0$.

Aus der Gleichsetzung der ersten Ableitungen im Punkte u_1

$$-u_0 + \frac{1}{6}\,\delta^2 u_0 - \varphi'(0)\,\delta^4 u_0 + u_1 + \frac{2}{6}\,\delta^2 u_1 + \varphi'(1)\,\delta^4 u_1 =$$

$$= -u_1 - \frac{2}{6}\,\delta^2 u_1 - \varphi'(1)\,\delta^4 u_1 + u_2 - \frac{1}{6}\,\delta^2 u_2 + \varphi'(0)\,\delta^4 u_2$$

ergibt sich

$$-(u_0 - 2u_1 + u_2) + \frac{1}{6}(\delta^2 u_0 + 4\delta^2 u_1 + \delta^2 u_2) = \varphi'(0)\,(\delta^4 u_0 + \delta^4 u_2) - 2\varphi'(1)\,\delta^4 u_1$$

oder

$$\frac{1}{6}\,\delta^4 u_1 = \varphi'(0)\,(\delta^4 u_0 - 2\delta^4 u_1 + \delta^4 u_2) + 2\delta^4 u_1 \varphi'(0) - 2\delta^4 u_1 \varphi'(1)$$

und schliesslich

$$\varphi'(0)\,\delta^6 u_1 = 2\delta^4 u_1 \left[-\varphi'(0) + \varphi'(1) + \frac{1}{12} \right] \tag{C}$$

Da in der endgültigen Formel sechste Zentraldifferenzen nicht vorkommen sollen, muss der Koeffizient von δ^6 verschwinden,

$$\varphi'(0) = b = 0$$

und daher auch der Klammerausdruck auf der rechten Seite

$$\varphi'(1) = b + 2c + 3d + 4e + 5f = -\frac{1}{12}$$

Die Kontinuität der zweiten Ableitungen im Punkte u_1 verlangt

$$\varphi''(0)\,\delta^4 u_0 + \delta^2 u_1 + \varphi''(1)\,\delta^4 u_1 = \delta^2 u_1 + \varphi''(1)\,\delta^4 u_1 + \varphi''(0)\,\delta^4 u_2$$

oder
$$\varphi''(0)\,(\delta^4 u_0 - \delta^4 u_2) = 0 \qquad \text{(D)}$$

daher $\varphi''(0) = 2c = 0$.

Die dritten Ableitungen werden kontinuierlich im Punkte u_1, wenn die Gleichung

$$-\delta^2 u_0 - \varphi'''(0)\,\delta^4 u_0 + \delta^2 u_1 + \varphi'''(1)\,\delta^4 u_1 = -\delta^2 u_1 - \varphi'''(1)\,\delta^4 u_1 + \delta^2 u_2 + \varphi'''(0)\,\delta^4 u_2$$

erfüllt ist. Durch Zusammenfassung der entsprechenden Glieder erhalten wir

$$-(\delta^2 u_0 - 2\delta^2 u_1 + \delta^2 u_2) = \varphi'''(0)\,(\delta^4 u_0 + \delta^4 u_2) - 2\varphi'''(1)\,\delta^4 u_1$$

und nach Umformung

$$-\varphi'''(0)\,\delta^6 u_1 = 2\delta^4 u_1 \left[-\varphi'''(1) + \varphi'''(0) + \frac{1}{2}\right] \qquad \text{(E)}$$

Das Nichtauftreten von sechsten Differenzen in der Formel verlangt

$$\varphi'''(0) = 6d = 0$$

und daraus folgt

$$\varphi'''(1) = 6d + 24e + 60f = \frac{1}{2}$$

Kontinuierliche vierte Ableitungen ergeben sich aus

$$\varphi''''(0)\,\delta^4 u_0 + \varphi''''(1)\,\delta^4 u_1 = \varphi''''(1)\,\delta^4 u_1 + \varphi''''(0)\,\delta^4 u_2$$

oder
$$\varphi''''(0)\,(\delta^4 u_0 - \delta^4 u_2) = 0 \qquad \text{(F)}$$

was bedeutet, dass $\varphi''''(0) = 24e = 0$

Wenn die Interpolationsformel die gegebenen Werte reproduzieren soll, muss noch die Bedingung

$$\varphi(1) = a + b + c + d + e + f = 0 \qquad \text{(B)}$$

erfüllt sein.

Um nun eine ausgleichende Interpolationsformel zu bestimmen, deren erste drei Ableitungen kontinuierlich sind, müssen die Gleichungen

$$a = b = c = d = 0$$

$$4e + 5f = -\frac{1}{12}$$

$$24e + 60f = \frac{1}{2}$$

erfüllt sein, woraus die Werte

$$e = -\frac{15}{240}, \qquad f = \frac{8}{240}$$

folgen. Die endgültige Formel lautet daher

$$\text{M}3 \equiv \begin{array}{l} \xi u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2-1)}{6}\,\delta^2 u_0 + \dfrac{\xi^4(8\xi-15)}{240}\,\delta^4 u_0 \\ + x u_1 + \dfrac{x(x^2-1)}{6}\,\delta^2 u_1 + \dfrac{x^4(8x-15)}{240}\,\delta^4 u_1 \end{array}$$

mit einer Abweichung von $-{}^7/_{240}\,\delta^4 u_1$ an den Kardinalpunkten, die auch in folgender Form geschrieben werden kann:

x	y_x	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3
0·0	750000	–21875	87500	618750	87500	–21875	0
0·2	750000	–11008	7965	582220	205630	–34740	–67
0·4	750000	–4131	–32420	482990	346860	–42355	–944
0·6	750000	–944	–42355	346860	482990	–32420	–4131
0·8	750000	–67	–34740	205630	582220	7965	–11008

Die fünften Differenzen sind:

x	$\delta^5 y_x$	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
0·0	750000	–960	4800	–9600	9600	–4800	960	0
0·2	750000	–877	4452	–9105	9440	–5055	1212	–67
0·4	750000	81	204	–2235	5280	–5685	2964	–609
0·6	750000	609	–2964	5685	–5280	2235	–204	–81
0·8	750000	67	–1212	5055	–9440	9105	–4452	877

Wenn jedoch die interpolierten Werte durch die Fünfergruppen G_x ausgedrückt werden sollen, ergibt eine einfache Umformung die Darstellung:

x	y_x	G_{x-10}	G_{x-5}	G_x	G_{x+5}	G_{x+10}
0·0	750000	–10867	68668	105198	–12932	–67
0·2	750000	–6877	33508	132738	–8492	–877
0·4	750000	–3187	6748	142878	6748	–3187
0·6	750000	–877	–8492	132738	33508	–6877
0·8	750000	–67	–12932	105198	68668	–10867

Die durch die Anwendung dieser neuen Formel erzielten Resultate lassen erkennen, dass die Verbindung der interpolierten Werte bedeutend glatter ist als bei Anwendung irgendeiner der bisher in Vorschlag gebrachten Formeln und daher diesen überlegen ist. Die fünften Differenzen sind klein und liegen auf einer Wellenlinie, ohne irgendwelche Sprünge zu zeigen, und auch die sechsten Differenzen geben immer sehr gute Resultate. Dieser Umstand lässt nun die Vermutung aufkommen, dass bei Berücksichtigung höherer Ableitungen die Glätte zunehmen wird, aber das ist nicht der Fall, denn es treten in der Mitte der Fünfergruppen der fünften Differenzen merkliche Sprünge auf. Die Rechnung ergab:

Formel	Anzahl der kontinuierlichen Ableitungen	Abweichungen an den Kardinalpunkten	Koeffizient von $\delta^4 u_1$
M 4	4	$-\frac{11}{480}$	$-\frac{x^5(26-15x)}{480}$
M 5	5	$-\frac{115}{5376}$	$-\frac{x^6(504-536x+147x^2)}{5376}$
M 6	6	$-\frac{25}{1344}$	$-\frac{x^7(136-159x+48x^2)}{1344}$
M 7	7	$-\frac{28}{1584}$	$-\frac{x^8(297-506x+297x^2-60x^3)}{1584}$

Auch die Kardinalpunkte reproduzierenden Formeln mit höheren kontinuierlichen Ableitungen geben keine besseren Resultate:

Formel	Anzahl der kontinuierlichen Ableitungen	Koeffizient von $\delta^4 u_1$
5 M	5	$\frac{x^6(x-1)(-46x^2+137x-105)}{168}$
6 M	6	$\frac{x^7(x-1)(-75x^2+211x-152)}{192}$

Wenn der Grad der Funktion $\varphi(x)$ auf 4 ermässigt wird, wodurch $f=0$, und unter der Annahme, dass nur die beiden ersten Ableitungen kontinuierlich sind, ergibt sich

$$a=b=c=0$$

$$3d+4e=-\frac{1}{12}$$

$$24e=\frac{1}{2}$$

woraus $$d=-\frac{8}{144},\quad e=\frac{3}{144}$$

folgt und schliesslich die Formel

$$\mathrm{M}\,2 = \begin{array}{l} \xi u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2-1)}{6}\,\delta^2 u_0 + \dfrac{\xi^3(3\xi-8)}{144}\,\delta^4 u_0 \\ + x u_1 + \dfrac{x(x^2-1)}{6}\,\delta^2 u_1 + \dfrac{x^3(3x-8)}{144}\,\delta^4 u_1 \end{array}$$

Die Abweichung an den Kardinalpunkten beträgt $-{}^5/_{144}\,\delta^4 u_1$. Die durch ihre Anwendung erzielten Ergebnisse sind nicht so gut wie bei Anwendung der Formel M 3, doch schneidet sie im Vergleich mit der ausgleichenden Formel von Jenkins z. B. sehr gut ab. Setzen wir in den obigen Gleichungen $e = 0$, erhalten wir $3\,d = -{}^1/_{12}$, Jenkins' Formel.

Wird nun vorausgesetzt, dass die sechsten Differenzen verschwinden, so ergeben sich einige interessante Resultate. Die Hypothese von verschwindenden sechsten Differenzen wurde, soweit festgestellt werden konnte, nur einmal, und zwar bei der Entwicklung von Hendersons Formel vom Jahre 1921, verwendet. Unter dieser Voraussetzung werden die beiden Bedingungsgleichungen (C) und (E) transformiert in

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) + \frac{1}{12} \tag{c}$$

oder

$$2c + 3d + 4e + 5f = -\frac{1}{12}$$

und

$$\varphi'''(0) = \varphi'''(1) - \frac{1}{2} \tag{e}$$

oder

$$24e + 60f = \frac{1}{2}$$

woraus hervorgeht, dass die Grössen b und d unbestimmt bleiben. Um nun unter der Voraussetzung von verschwindenden sechsten Differenzen eine ausgleichende Interpolationsformel zu erhalten, deren erste vier Ableitungen kontinuierlich sind, wären die Konstanten aus den Bedingungsgleichungen (A), (c), (D), (e) und (F) zu bestimmen.

Setzt man willkürlich $b = 0$, so folgt aus den Bedingungsgleichungen

$$a = b = c = e = 0$$

$$3d + 5f = -\frac{1}{12}$$

$$60f = \frac{1}{2}$$

und die Formel

$$\text{M4A} \equiv \begin{array}{l} \xi u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2 - 1)}{6}\,\delta^2 u_0 + \dfrac{\xi^3(\xi^2 - 5)}{120}\,\delta^4 u_0 \\ \\ x u_1 + \dfrac{x(x^2 - 1)}{6}\,\delta^2 u_1 + \dfrac{x^3(x^2 - 5)}{120}\,\delta^4 u_1 \end{array}$$

Die Abweichung an den Kardinalpunkten beträgt $-{}^1/_{30}\,\delta^4 u_1$. Bei Anwendung dieser Formel treten nun ähnliche Erscheinungen auf wie bei den früher entwickelten Formeln M 4 bis M 7, nämlich ein Sprung in der Reihe der fünften Differenzen, und zwar in der Mitte der Fünfergruppen, der besonders deutlich zum Vorschein kommt, wenn man die Reihe der sechsten Differenzen bildet. Dabei ist zu bemerken, dass die Summe der absoluten Werte der fünften Differenzen bei allen Beispielen, die zu diesem Zwecke gerechnet wurden, äusserst klein ist und, was die Grösse anlangt, mit der Formel M 3 konkurrieren kann. Der erwähnte Sprung in der Differenzenreihe bewirkt daher weniger zufriedenstellende Resultate, doch sind diese Sprünge kaum zu erkennen, wenn die interpolierten Werte nur auf drei oder vier Ziffern berechnet werden sollen. Die Formel M 4 A ist daher besonders geeignet, zu zeigen, dass die ausschliessliche Betrachtung der Grösse der Differenzen oder deren Summe nicht als Kriterium geeignet ist und dass daher dem vorhin aufgestellten Glättekriterium mehr Bedeutung beizumessen wäre.

Wenn wir noch auf Grund der Annahme von verschwindenden sechsten Zentraldifferenzen Interpolationsformeln untersuchen, welche die Kardinalpunkte reproduzieren, so ergeben sich, wenn die Kontinuität der ersten drei Ableitungen verlangt wird, die Bedingungsgleichungen

$$a = c = 0$$

$$b + d + e + f = 0$$

$$3d + 4e + 5f = -\frac{1}{12}$$

$$24e + 60f = \frac{1}{2}$$

Setzt man $f = 0$, um den Grad der Funktion $\varphi(x)$ auf 4 zu reduzieren, folgt

$$b = \frac{5}{144}, \quad d = -\frac{8}{144}, \quad e = \frac{3}{144}$$

und die Interpolationsformel lautet:

$$y_x \equiv \begin{array}{l} \xi u_0 + \dfrac{\xi(\xi^2-1)}{6}\delta^2 u_0 + \dfrac{\xi(\xi-1)(3\xi^2-5)}{144}\delta^4 u_0 \\ + x u_1 + \dfrac{x(x^2-1)}{6}\delta^2 u_1 + \dfrac{x(x-1)(3x^2-5)}{144}\delta^4 u_0 \end{array}$$

Wird jedoch $b = 0$ gesetzt, so folgt

$$d = \frac{7}{24}, \quad e = -\frac{12}{24}, \quad f = \frac{5}{24}$$

Diesen Werten jedoch entspricht die berühmte Spraguesche Interpolationsformel, die hier unter ganz anderen Voraussetzungen abgeleitet wurde. Wenn jedoch die Kontinuität der ersten vier Ableitungen verlangt wird, so folgt unter Annahme von verschwindenden sechsten Zentraldifferenzen

$$a = c = e = 0$$

$$b + d + f = 0$$

$$3d + 5f = -\frac{1}{12}$$

$$60f = \frac{1}{2}$$

woraus $$b = \frac{4}{120}, \quad d = -\frac{5}{120}, \quad f = \frac{1}{120}$$

folgt, und diesen Werten entspricht die gewöhnliche Interpolationsformel mit konstanten fünften Differenzen.

Schliesslich wäre noch eine Gruppe zu erwähnen, der die Formeln angehören, die unter der Voraussetzung, dass die sechsten Differenzen verschwinden, nur kontinuierliche erste und dritte Ableitungen haben. Die Bedingungsgleichungen sind

$$a = 0$$

$$b + c + d + e + f = 0$$

$$2c + 3d + 4e + 5f = -\frac{1}{12}$$

$$24e + 60f = \frac{1}{2}$$

Es stehen zur Verfügung fünf Unbekannte und drei Gleichungen, so dass zwei Grössen willkürlich festgesetzt werden können. Nehmen wir an, dass $b = f = 0$, so ergibt sich die bereits erwähnte tangierende Interpolationsformel von Shovelton. Eine neue tangierende, die Kardinalpunkte reproduzierende Interpolationsformel, also $b = 0$, deren Reproduktionsgrad 4 ist und die ausserdem die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate der fünften Differenzen ein Minimum wird, lautet

$$\text{MMT} \equiv \begin{aligned} &\xi u_0 + \frac{\xi(\xi^2-1)}{6}\delta^2 u_0 + \frac{\xi^2(\xi-1)(145\xi^2-168\xi-175)}{2376}\delta^4 u_0 \\ &+ x u_1 + \frac{x(x^2-1)}{6}\delta^2 u_1 + \frac{x^2(x-1)(145x^2-168x-175)}{2376}\delta^4 u_1 \end{aligned}$$

Wenn nun in dieser Formel die Zentraldifferenzen durch die gegebenen Werte ersetzt werden und die Koeffizienten auf vier Dezimalen gekürzt werden, um eine in der Praxis leichter anwendbare Formel zu erhalten, ergibt sich die Formel BM, die von Beers unter vollständigem Verzicht auf Kontinuität von Differentialquotienten abgeleitet wurde, ein bemerkenswertes Ergebnis. Zu dieser Gruppe

gehört auch die von Greville abgeleitete Formel GM. Ergänzend wäre zu bemerken, dass die Formel von Beers in dem später zu behandelnden Beispiel tatsächlich die kleinste Summe der Quadrate der fünften Differenzen ergibt, und es scheint vom theoretischen Standpunkt aus bemerkenswert, dass andere Formeln, die ebenfalls zu dieser Gruppe gehören, wohl eine grössere Summe der Quadrate der fünften Differenzen hervorbringen, während die Summe der absoluten Werte der fünften Differenzen geringer ist als bei Anwendung von Beers Formel. Von diesen Formeln seien zwei angeführt:

$$\text{MMA} \equiv \begin{array}{l} \xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\delta^2 u_0 + \frac{1}{960}\xi(\xi-1)(150\xi^3-205\xi^2-13\xi-6)\delta^4 u_0 \\ + x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\delta^2 u_1 + \frac{1}{960}x(x-1)(150x^3-205x^2-13x-6)\delta^4 u_1 \end{array}$$

$$\text{MMC} \equiv \begin{array}{l} \xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\delta^2 u_0 + \frac{1}{1920}\xi(\xi-1)(350\xi^3-485\xi^2+3\xi-14)\delta^4 u_0 \\ + x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\delta^2 u_1 + \frac{1}{1920}x(x-1)(350x^3-485x^2+3x-14)\delta^4 u_1 \end{array}$$

Aus diesem Beispiel geht nun hervor, was auch bei anderen Untersuchungen gefunden wurde, dass die Formel, die in einem gegebenen Falle die Summe der Quadrate einer bestimmten Differenzenreihe zu einem Minimum macht, nicht mit der Formel identisch sein muss, welche die kleinste Summe der absoluten Werte dieser Differenzenreihe hervorbringt. Auf dieses sicherlich interessante Resultat soll bei anderer Gelegenheit zurückgekommen werden.

In der Praxis werden im allgemeinen nur Interpolationsformeln angewendet, die maximal fünf Differenzen berücksichtigen. Wenn man daher aus theoretischen Gründen Interpolationsformeln mit sieben Differenzen untersuchen will, so geht man von der Darstellung aus

$$y_x \equiv \begin{array}{l} \xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\delta^2 u_0 + \frac{1}{120}\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)\delta^4 u_0 + \varphi(\xi)\delta^6 u_0 \\ + x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\delta^2 u_1 + \frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)\delta^4 u_1 + \varphi(x)\delta^6 u_1 \end{array}$$

und erhält durch Differenzierung die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(0)\,\delta^8 u_1 = 2\delta^6 u_1 \left(\varphi'(1) - \varphi'(0) - \frac{1}{60}\right)$$

$$\varphi''(0) = 0$$

$$\varphi'''(0)\,\delta^8 u_1 = 2\delta^6 u_1 \left(\varphi'''(1) - \varphi'''(0) + \frac{1}{8}\right)$$

$$\varphi''''(0) = 0$$

$$\varphi^{\mathrm{V}}(0)\,\delta^8 u_1 = 2\delta^6 u_1 \left(\varphi^{\mathrm{V}}(1) - \varphi^{\mathrm{V}}(0) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi^{\mathrm{VI}}(0) = 0$$

wobei

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7$$

Folgt man dem Entwicklungsgang von Jenkins, um eine reproduzierende Interpolationsformel mit vier kontinuierlichen Ableitungen zu erhalten, so ergibt sich aus den Bedingungsgleichungen

$$a = b = c = d = e = 0$$

$$f + g + h = 0$$

$$5f + 6g + 7h = \frac{1}{60}$$

$$60f + 120g + 210h = -\frac{1}{8}$$

und daher die bereits von Jenkins veröffentlichte Formel

$$y_x \equiv \begin{aligned} &\xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\,\delta^2 u_0 + \frac{1}{120}\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)\,\delta^4 u_0 - \frac{1}{240}\xi^5(\xi-1)(9\xi-13)\,\delta^6 u_0 \\ &+ x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\,\delta^2 u_1 + \frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)\,\delta^4 u_1 - \frac{1}{240}x^5(x-1)(9x-13)\,\delta^6 u_1 \end{aligned}$$

Als ausgleichende Interpolationsformel erhält man bei willkürlicher Nullsetzung von h, wodurch der Grad auf 6 ermässigt wird,

$$y_x = \begin{array}{l} \xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\delta^2 u_0 + \frac{1}{120}\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)\delta^4 u_0 + \frac{1}{1920}\xi^5(22-13\xi)\delta^6 u_0 \\ + x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\delta^2 u_1 + \frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)\delta^4 u_1 + \frac{1}{1920}x^5(22-13x)\delta^6 u_1 \end{array}$$

Wird jedoch $f = 0$ gesetzt, so ergibt sich die Formel

$$y_x = \begin{array}{l} \xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\delta^2 u_0 + \frac{1}{120}\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)\delta^4 u_0 + \frac{1}{3360}\xi^6(35-22\xi)\delta^6 u_0 \\ + x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\delta^2 u_1 + \frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)\delta^4 u_1 + \frac{1}{3360}x^6(35-22x)\delta^6 u_1 \end{array}$$

Will man eine die Kardinalpunkte reproduzierende Formel bestimmen, deren erste drei Abteilungen kontinuierlich sind, ergibt sich die bereits von Jenkins veröffentlichte Formel, während sich nach der Spragueschen Methode die im Anhang aufgenommenen Formeln ergeben, die von Reilly in einer anderen Schreibweise mitgeteilt wurden.

Wird jedoch der Ableitung die Hypothese von verschwindenden achten Zentraldifferenzen zugrunde gelegt, folgt aus den Bedingungsgleichungen

$$a = c = e = g = 0$$

$$3d + 5f + 7h = \frac{1}{60}$$

$$60f + 210h = -\frac{1}{8}$$

$$2520h = \frac{1}{2}$$

woraus dann unter der weiteren Annahme, dass die ersten sechs Ableitungen kontinuierlich sind, die ausgleichende Interpolationsformel

$$y_x = \begin{array}{l} \xi u_0 + \frac{1}{6}\xi(\xi^2-1)\delta^2 u_0 + \frac{1}{120}\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)\delta^4 u_0 + \frac{1}{5040}\xi^3(\xi^2-7)^2\delta^6 u_0 \\ + x u_1 + \frac{1}{6}x(x^2-1)\delta^2 u_1 + \frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4)\delta^4 u_1 + \frac{1}{5040}x^3(x^2-7)^2\delta^6 u_1 \end{array}$$

hervorgeht. Die reproduzierende Interpolationsformel verlangt noch

$$b + d + f + h = 0$$

und als Resultat gewinnen wir die Konstanten

$$b = -\frac{36}{5040}, \quad d = \frac{49}{5040}, \quad f = -\frac{14}{5040}, \quad h = \frac{1}{5040}$$

und als Formel die gewöhnliche Interpolationsformel mit siebenten Differenzen in Everetts Form.

Wie wir gesehen haben, führen die Ableitungen nach der Spragueschen Methode nicht immer zu denselben Resultaten wie andere Methoden. Der Unterschied der Ergebnisse wird zum Teil durch den verschiedenen Reproduktionsgrad bewirkt. Die Methoden von Sprague und Lidstone führen fast immer auf Formeln, die einen höheren Reproduktionsgrad aufweisen als die mittels der Funktion $\varphi(x)$ abgeleiteten. Die nach beiden Methoden abgeleiteten Formeln fünfter Ordnung besitzen einen Reproduktionsgrad von 4, während der Reproduktionsgrad von den mittels der Funktion $\varphi(x)$ entwickelten Formeln im allgemeinen nur 3 ist. Dies bewirkt auch, dass der Grad der Funktion $\varphi(x)$ bei den Formeln, die dem Spragueschen oder Lidstoneschen Typus angehören, im allgemeinen höher sein muss. Da die Lidstonesche Methode nur das letzte Glied der Interpolationsformel abändert, weisen folglich die mittels seiner Methode abgeleiteten Formeln einen höheren Reproduktionsgrad auf, als die nach anderen Methoden gebildeten Formeln. Aus den bisherigen theoretischen Untersuchungen geht hervor, dass keine dieser Methoden von vornherein einen sicheren Schluss auf den Verlauf der höheren Differenzenreihen zulässt, und soll die Untersuchung dieses interessanten Problems bei anderer Gelegenheit in Angriff genommen werden.

Praktische Anwendungen

A.

Zunächst soll die Anwendbarkeit der früher abgeleiteten Interpolationsformel für Intervalldrittelungen auf das von Greville behandelte Problem gezeigt werden. Es handelt sich um die Konstruktion einer Sterbetafel für die farbige Frauenbevölkerung im Staate Georgia der Vereinigten Staaten. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten weisen nämlich an den Kardinalpunkten 67 und 72 eine Verminderung auf, und um diese sicherlich nicht den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende Erniedrigung auszumerzen, fand er nach einigen Versuchen eine Formel, die jedoch den anderen Nachteil hat, dass sie die Ablebenswahrscheinlichkeiten bis etwa zum Alter 50 bedeutend vergrössert, dann gegenüber den Beobachtungen verringert etc. Da die beobachtete Unregelmässigkeit besonders bei den Altern 67 und 72 auftritt, können diese beiden Werte einer Ausgleichung unterzogen werden. Verwendet man z. B. die Ablebenswahrscheinlichkeiten für die Alter 47, 62, 77 und 92, um das Mittelintervall zu dritteln, erhält man bei Anwendung der gewöhnlichen Interpolationsformel

$q_{67} = 0.049015$ (original); und 0.054422 (interpolierter Wert);

$q_{72} = 0.047986$ (original); und 0.056718 (interpolierter Wert).

Aus der nachstehenden Tabelle ist das Ergebnis zu ersehen, welches sicherlich den praktischen Wert der Intervalldrittelungen zu Auge führt. Die Originaldaten stehen in der zweiten Kolonne, die von Greville bestimmten in der dritten, und die vierte Kolonne enthält die Werte an den Kardinalpunkten, die bei Anwendung der Formel M 3 resultieren, wenn für die Alter 67 und 72 an Stelle der Originalwerte die oben erwähnten interpolierten Werte verwendet werden.

Alter	Einjährige Ablebenswahrscheinlichkeit		
x	Originalwerte	Greville	Formel M 3
17	0.005276		
22	0.007695		
27	0.009243	0.00959	0.00921
32	0.010995	0.01228	0.01113
37	0.014991	0.01590	0.01477
42	0.018620	0.02134	0.01887
47	0.026750	0.02895	0.02651
52	0.035785	0.03718	0.03643
57	0.050372	0.04322	0.04955
62	0.053004	0.04764	0.05326
67	0.049015	0.05225	0.05440
72	0.047986	0.05856	0.05648
77	0.062616	0.07252	0.06266
82	0.082943	0.09078	0.08514
87	0.127088	0.10861	0.12358
92	0.129191		
97	0.143769		

B.

Die Konstruktion der venezolanischen Volkssterbetafel 1941/1942

Im nachstehenden soll nun die Anwendung der neu abgeleiteten Formel M 3 auf die Konstruktion der obigen Sterbetafel gezeigt werden, der die Volkszählung vom 7. Dezember 1941 und die Sterbefälle der zwei Jahre 1941/42 zugrunde liegen. Die Wanderungsbewegung wurde nicht berücksichtigt und hätte auch kaum einen nennenswerten Einfluss ausgeübt, da sie in diesem Zeitraum sehr gering war. Ferner wurde darauf verzichtet, die Bevölkerung für den 31. Dezember 1941 zu berechnen, da die geringen Abänderungen sicherlich die Ergebnisse nicht geändert hätten, denn die aus der Volkszählung sich ergebenden Besetzungszahlen, die für die einzelnen Alter veröffentlicht wurden, weisen ganz bedeutende systematische Unregelmässigkeiten auf. Die Sterbefälle sind nur in 10jährigen Altersgruppen veröffentlicht worden, mit Ausnahme der ersten 10 Lebensjahre, welche in drei Gruppen 0–1, 1–5 und 5–10 geteilt wurden.

Bei der Volkszählung wurde auch eine Gruppe «unbekannten Alters» mitgeführt (6908 Personen), die proportionell auf die verschiedenen Gruppen aufgeteilt wurden, das heisst, die Originalgruppen

(Kolonne 1) wurden mit 3850771 : 3843863 multipliziert (Kolonne 2). Die von Deming [38] ausgearbeitete Methode zur Aufteilung dieser Gruppe konnte nicht angewendet werden, da die erforderlichen statistischen Unterlagen nicht beschafft werden konnten.

Um aus den Zehnergruppen die gewünschten Fünfergruppen zu gewinnen, wurden die Zehnerintervalle der aufsummierten Lebenden (Kolonne 3) und Toten (Kolonne 5) mit Hilfe der gewöhnlichen Interpolationsformel mit konstanten fünften Differenzen

$$256\, y_{25} = 3\, y_0 - 25\, y_{10} + 150\, y_{20} + 150\, y_{30} - 25\, y_{40} + 3\, y_{50}$$

halbiert und so die Werte für die Alter 25, 35, ... etc. gewonnen. Der dem Alter 15 entsprechende Wert wurde durch Anwendung der Palmqvistschen Interpolationsformel [39] aus den Altern 10, 20 und 30 bestimmt. Durch Differenzenbildung wurden — mit Ausnahme der ersten drei Gruppen — die erforderlichen Fünfergruppen errechnet (Kolonnen 4 und 6).

Palmqvist geht von der Taylorschen Reihenentwicklung

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)$$

aus, macht von der Eulerschen Substitution

$$z = \frac{h}{\alpha + h}, \qquad h = \frac{\alpha z}{1 - z}$$

Gebrauch und erhält bei Vernachlässigung von höheren als den zweiten Potenzen von z

$$f(x+h) = f(x) + \alpha f'(x)\, z + \alpha z^2 \left[f'(x) + \frac{\alpha}{2} f''(x) \right]$$

Der Parameter α wird nun so bestimmt, dass der Koeffizient von z^2 verschwindet.

$$\alpha = -\frac{2f'(x)}{f''(x)}$$

Werden die Werte $f(x-\varepsilon)$, $f(x)$, $f(x+\varepsilon)$ als bekannt vorausgesetzt und wird der Abstand der Ordinate des gesuchten Wertes von x mit h bezeichnet, bekommt man nach Durchführung der obigen Substitutionen die endgültige Formel

$$f(x+h) = f(x) - \frac{2h\,[f(x)-f(x-\varepsilon)]\,[f(x+\varepsilon)-f(x)]}{[f(x-\varepsilon)-2f(x)+f(x+\varepsilon)]\,h-[f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)]\,\varepsilon}$$

wobei im gegenwärtigen Falle $h = 5$ und $\varepsilon = 10$ zu setzen wäre.

Zur Bestimmung der Besetzungszahlen der Lebenden bzw. Toten an den Kardinalpunkten für die Alter 7, 12, 17 und 22 wurde von der gewöhnlichen Interpolationsformel fünfter Ordnung Gebrauch gemacht.

$$y_7 = 0.176896\,G_5 + 0.068416\,G_{10} - 0.074624\,G_{15} + 0.036416\,G_{20} - 0.007104\,G_{25}$$

$$y_{12} = -0.007104\,G_5 + 0.212416\,G_{10} - 0.002624\,G_{15} - 0.003584\,G_{20} + 0.000896\,G_{25}$$

$$y_{17} = 0.000896\,G_5 - 0.011584\,G_{10} + 0.221376\,G_{15} - 0.011584\,G_{20} + 0.000896\,G_{25}$$

und für die übrigen Alter wurde die neue Formel M 3 verwendet.

$$750000\,y_{x+2} = -3187\,G_{x-10} + 6748\,G_{x-5} + 142878\,G_x + 6748\,G_{x+5} - 3187\,G_{x+10}$$

wobei die G_x die Fünfergruppen (Kolonnen 4 und 6) darstellen. Die Besetzungszahlen für die Alter 5–9 wurden provisorisch mittels der gewöhnlichen Interpolationsformel fünfter Ordnung bestimmt.

Die Verstorbenen wurden nur nach vollendeten Geburtsjahren bekanntgegeben, so dass eine exakte Bestimmung der Ablebenswahrscheinlichkeiten nicht möglich ist. Da aber festgestellt wurde, dass die Zahl der Todesfälle innerhalb des ersten Lebensjahres und der Geburten in den beiden Jahren 1941/1942 nur geringfügige Änderungen aufweist, wurde die diesem Zeitraum entsprechende Totengesamtheit durch die im selben Zeitraum Geborenen dividiert 32328 : 273649 und der erhaltene Wert als näherungsweise Ablebenswahrscheinlichkeit für das erste Lebensjahr angenommen. Der tatsächliche Wert dürfte merklich höher sein, da die Registrierung in manchen Teilen des Landes mangelhaft ist, und es wurden schon bei anderer Gelegenheit die diesbezüglichen Daten auf ihre Glaubwürdigkeit hin untersucht [40].

Gruppe	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	x	$10^7 q_x$
							– 8	380633
0	128325	128556	3850771	128556	125911	32328	– 3	221389
1	449668	450476	3722215	450476	93583	19921	2	111168
5	522646	523585	3271739	523585	73662	5501	7	50362
10	875673	877247	2748154	465401	68161	3208	12	33119
15			2282753	411846	64953	3939	17	47343
20	694940	696189	1870907	380528	61014	5649	22	74694
25			1490379	315661	55365	5719	27	90588
30	466747	467585	1174718	256140	49646	5506	32	107134
35			918578	211445	44140	5321	37	125289
40	342535	343151	707133	188086	38819	5403	42	142864
45			519047	155065	33416	5049	47	162482
50	194908	195258	363982	112827	28367	4296	52	188567
55			251155	82431	24071	4053	57	243663
60	107864	108058	168724	63496	20018	4321	62	335845
65			105228	44562	15697	4016	67	442691
70	40379	40452	60666	25913	11681	3144	72	592847
75			34753	14539	8537	2552	77	849421
80	15753	15781	20214	9780	5985	2247	82	1100880
85			10434	6001	3738	1728	87	1354092
90	3804	3811	4433	2734	2010	1036	92	1746773
95			1699	1077	974	557		
100	621	622	622		417			
	3843863							
?	6908							
	3850771							

Schwierigkeiten ergaben sich auch bei der näherungsweisen Bestimmung der Ablebenswahrscheinlichkeiten in der Altersgruppe 1–4. Zunächst wurde eine Näherungsformel verwendet [41], die unlängst vom theoretischen und praktischen Standpunkt aus näher untersucht wurde [42]. Es hat sich nämlich gezeigt, dass nach den in den Vereinigten Staaten Nordamerikas vorhandenen Statistiken mit ziemlicher Genauigkeit die Ablebenswahrscheinlichkeiten durch das zentrale Sterblichkeitsverhältnis der faktischen Bevölkerung

$$ {}_nq_x = 1 - e^{-n\,{}_nm_x(a - b\,{}_nm_x)} $$

für Gruppen dargestellt werden kann, wobei sich für $x = 1$, $n = 4$ die Werte

$$ a = 0.9806, \quad b = 2.079 $$

ergaben,

folglich $${}_4m_1 = 19921 : 900952 = 0.022111$$

oder $${}_4q_1 = 0.079337,$$

doch scheint dieser Wert etwas zu klein zu sein. Dann wurde für diese Altersgruppe mittels des zentralen Sterblichkeitsverhältnisses der Ausdruck

$${}_4q_1 = 1 - \left(1 - \frac{2\,{}_4m_1}{2 + {}_4m_1}\right)^4 = 0.084649$$

berechnet, der den tatsächlichen Verhältnissen eher zu entsprechen scheint. Um nun die Ablebenswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Alter zu bestimmen, wurden auf Grund der erhaltenen Werte

$$l_0 = 100000 \qquad l_1 = 88186$$

$$l_5 = 80721 \qquad l_9 = 78945$$

durch neuerliche Anwendung der Palmqvistschen Formel die Lebenden für die Alter 1–5 bestimmt und daraus die Ablebenswahrscheinlichkeiten für die ersten 5 Altersjahre gewonnen. Im Intervall 5–9 scheinen die auf diese Art errechneten Werte zuerst etwas zu hoch und dann etwas zu niedrig zu sein. Es wurde auch der Versuch gemacht, die gesuchten Werte durch Anwendung einer von Oppermann [43] stammenden Formel, die durch Hinzufügen eines Gliedes etwas anpassungsfähiger gemacht wurde [44], zu erhalten

$$-\log {}_np_x = a\sqrt{x} + bx + cx\sqrt{x} + dx^2$$

aber die Resultate unterscheiden sich nur unwesentlich. Die Ablebenswahrscheinlichkeiten, die für die Kardinalpunkte 7, 12, 17, 22, 27 bestimmt wurden, wurden unter der Annahme von konstanten vierten Differenzen verlängert und durch Anwendung der Formel M 3 endgültig die Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Alter 5 bis 71 berechnet. In den höchsten Altern scheinen die vorhandenen Daten durch unrichtige Altersangaben von den tatsächlichen Verhältnissen sehr abzuweichen, da die Ablebenswahrscheinlichkeiten überaus niedrig ausfallen. Wir haben daher durch Extrapolation mit konstanten vierten Differenzen die Ablebenswahrscheinlichkeiten vom Alter 71 an bis

zum Schluss der Tafel bestimmt und dadurch erreicht, dass die Tafelbevölkerung als höchstes Alter 100 erreicht. Zur Berechnung der Werte wurde von der nachstehenden Tabelle Gebrauch gemacht, wobei die Werte

$$q_{67} = 0.0441686, \ \Delta^1 = 0.0025062, \ \Delta^2 = 0.0002242, \ \Delta^3 = 0.0000869, \ \Delta^4 = 0.0000020$$

verwendet wurden.

Tabelle der zur Extrapolation erforderlichen Koeffizienten

Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	—	—	—	21	210	1330	5985
2	1	—	—	22	231	1540	7315
3	3	1	—	23	253	1771	8855
4	6	4	1	24	276	2024	10626
5	10	10	5	25	300	2300	12650
6	15	20	15	26	325	2600	14950
7	21	35	35	27	351	2925	17550
8	28	56	70	28	378	3276	20475
9	36	84	126	29	406	3654	23751
10	45	120	210	30	435	4060	27405
11	55	165	330	31	465	4495	31465
12	66	220	495	32	496	4960	35960
13	78	286	715	33	528	5456	40920
14	91	364	1001	34	561	5984	46376
15	105	455	1365	35	595	6545	52360
16	120	560	1820	36	630	7140	58905
17	136	680	2380	37	666	7770	66045
18	153	816	3060	38	703	8436	73815
19	171	969	3876	39	741	9139	82251
20	190	1140	4845	40	780	9880	91390

Die Rechnung wurde mit 7 Dezimalen durchgeführt, und dann wurden die Werte auf 5 Stellen abgerundet. Die fünften Differenzen zwischen den Altern 17 und 66 wurden mit 7 Dezimalstellen in die Tabelle aufgenommen, da der Grossteil der Differenzen geringer als eine Einheit der fünften Dezimale ist.

Der Vollständigkeit halber wurde auch ein Vergleich der tatsächlichen und erwartungsgemässen Sterbefälle vorgenommen. Bei Berechnung der erwartungsgemässen Sterbefälle für jedes Altersjahr auf

Grund der Volkszählungsdaten ergeben sich in jeder Fünfergruppe weniger erwartungsgemässe als tatsächliche Sterbefälle, eine logische Folge der Überbesetzung der auf Null und Fünf endenden Alter, der Anfangsalter in jeder Gruppe. Wir haben daher ein durchschnittliches zentrales Sterblichkeitsverhältnis für die Fünfergruppen nach der Formel

$$ {}_5m_x = \frac{l_x - l_{x+5}}{T_x - T_{x+5}} = \frac{l_x - l_{x+5}}{\sum_{x=0}^{4} l_x - \frac{1}{2}(l_x - l_{x+5})} $$

gebildet und die erwartungsgemässen Sterbefälle mittels

$$ 2G_x \cdot {}_5m_x $$

berechnet. Das Ergebnis für die Alter 5–70 ist in der folgenden Tabelle verzeichnet.

Altersgruppe	Sterbefälle E = erwartungsgemässe	Sterbefälle T = tatsächliche	E—T
5–	5500	5501	–1
10–	3224	3208	16
15–	3966	3939	27
20–	5578	5649	–71
25–	5764	5719	45
30–	5524	5506	18
35–	5320	5321	–1
40–	5410	5403	7
45–	5066	5049	17
50–	4327	4296	31
55–	4096	4053	43
60–	4308	4321	–13
65–	4021	4016	5
Total	62104	61981	123

Das Vorherrschen von positiven Abweichungen und deren geringe Grösse muss als zufriedenstellendes Ergebnis angesehen werden, da die Besetzungszahlen der einzelnen Alter in der tatsächlichen Bevölkerung schneller abnehmen als in der Sterbetafelbevölkerung.

Venezolanische Volkssterbetafel (Männer und Frauen) 1941/1942

x	l_x	d_x	$10^5\, q_x$	$\overset{0}{e}_x$	$10^7\, \Delta^5 q_x$
0	100.000	11.814	11.814	46.68	
1	88.186	3.467	3.931	51.87	
2	84.719	1.924	2.272	52.97	
3	82.795	1.226	1.480	53.19	
4	81.569	848	1.040	52.98	
5	80.721	559	692	52.53	
6	80.162	472	589	51.90	
7	79.690	402	505	51.20	
8	79.288	348	439	50.46	
9	78.940	308	390	49.68	
10	78.632	280	356	48.87	
11	78.352	265	338	48.04	
12	78.087	260	333	47.20	
13	77.827	265	341	46.36	
14	77.562	280	361	45.52	
15	77.282	303	391	44.68	
16	76.979	331	430	43.85	
17	76.648	364	475	43.04	55
18	76.284	401	526	42.24	54
19	75.883	441	581	41.56	34
20	75.442	480	636	40.70	–30
21	74.962	515	688	39.96	–60
22	74.447	548	736	39.23	–61
23	73.899	576	779	38.52	–57
24	73.323	598	816	37.82	–1
25	72.725	617	848	37.13	38
26	72.108	634	879	36.44	14
27	71.474	649	909	35.76	10
28	70.825	666	940	35.08	9
29	70.159	681	971	34.41	–7
30	69.478	698	1.004	33.74	–7
31	68.780	714	1.038	33.08	9
32	68.066	730	1.072	32.42	10
33	67.336	746	1.108	31.77	10
34	66.590	761	1.143	31.11	2
35	65.829	777	1.180	30.47	–6
36	65.052	791	1.216	29.83	–4
37	64.261	804	1.251	29.19	–4
38	63.457	816	1.287	28.55	–5
39	62.641	828	1.322	27.92	–13
40	61.813	839	1.357	27.29	1
41	60.974	849	1.392	26.66	19
42	60.125	859	1.428	26.03	21
43	59.266	868	1.465	25.40	22
44	58.398	877	1.502	24.77	25
45	57.521	886	1.540	24.14	–10
46	56.635	894	1.579	23.51	–40
47	55.741	903	1.620	22.87	–42
48	54.838	911	1.662	22.24	–37
49	53.927	921	1.708	21.61	17

x	l_x	d_x	$10^5\, q_x$	$\overset{0}{e}_x$	$10^7\, \Delta^5 q_x$
50	53.006	933	1.760	20.98	28
51	52.073	948	1.820	20.34	−16
52	51.125	966	1.890	19.71	−21
53	50.159	990	1.972	19.08	−26
54	49.169	1016	2.068	18.46	−65
55	48.153	1049	2.178	17.83	4
56	47.104	1085	2.304	17.22	97
57	46.019	1126	2.446	16.61	104
58	44.893	1169	2.603	16.02	97
59	43.724	1212	2.774	15.43	5
60	42.512	1258	2.957	14.86	−64
61	41.254	1298	3.148	14.30	−27
62	39.956	1336	3.344	13.75	−21
63	38.620	1369	3.544	13.20	−1
64	37.251	1397	3.749	12.67	172
65	35.854	1420	3.961	12.15	36
66	34.434	1440	4.183	11.63	−243
67	32.994	1457	4.417	11.11	
68	31.537	1472	4.667	10.60	
69	30.065	1486	4.941	10.10	
70	28.579	1499	5.245	9.59	
71	27.080	1513	5.589	9.10	
72	25.567	1530	5.982	8.61	
73	24.037	1546	6.434	8.12	
74	22.491	1564	6.953	7.65	
75	20.927	1580	7.550	7.18	
76	19.347	1593	8.235	6.73	
77	17.754	1601	9.017	6.29	
78	16.153	1600	9.907	5.86	
79	14.553	1589	10.915	5.45	
80	12.964	1562	12.052	5.05	
81	11.402	1520	13.329	4.68	
82	9.882	1458	14.757	4.32	
83	8.424	1377	16.348	3.98	
84	7.047	1277	18.112	3.66	
85	5.770	1157	20.061	3.36	
86	4.613	1025	22.208	3.08	
87	3.588	881	24.565	2.82	
88	2.707	735	27.143	2.57	
89	1.972	591	29.955	2.34	
90	1.381	456	33.014	2.13	
91	925	336	36.333	1.93	
92	589	235	39.925	1.75	
93	354	155	43.803	1.58	
94	199	96	47.981	1.43	
95	103	54	52.472	1.30	
96	49	28	57.291	1.16	
97	21	13	62.451	1.03	
98	8	5	67.966	0.92	
99	3	2	73.851	0.82	
100	1	1	80.122	0.73	
101	0.131		86.792	0.64	
102	0.017		93.877	0.55	

C.

Mit vollem Recht wurde bemängelt, dass die bisher auf dem Gebiete der Interpolationsrechnung veröffentlichten Arbeiten viele Formeln enthalten, aber nur wenige kritische Vergleiche ihrer Resultate. Da nun der Wert von Interpolationsformeln insbesondere von den praktischen Resultaten abhängt, die durch ihre Anwendung erzielt werden, so wurden in den folgenden Tabellen für das von Beers gewählte Beispiel die Werte der fünften Differenzen nach einigen Interpolationsformeln mit fünften Differenzen aufgenommen. Es handelt sich dabei um die Ausgleichung von «dem Ablebensrisiko ausgesetzten Personen», deren Originaldaten in Fünfergruppen veröffentlicht wurden [45]. Im nachstehenden sind die erforderlichen Grundzahlen mit ihren Differenzen vermerkt.

x	$-\sum_{x}^{\infty} \lambda_x$	$\lambda_x = \Delta^1$	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
15	24815451	247705	592450	493893	–413830	–34233
20	24567746	840155	1086343	80063	–448063	471954
25	23727591	1926498	1166406	–368000	23891	–475078
30	21801093	3092904	798406	–344109	–451187	599283
35	18708189	3891310	454297	–795296	148096	371636
40	14816879	4345607	–340999	–647200	519732	–152937
45	10471272	4004608	–988199	–127468	366795	–337368
50	6466664	3016409	–1115667	239327	29427	–4413
55	3450255	1900742	–876340	268754	25014	–102665
60	1549513	1024402	–607586	293768	–77651	
65	525111	416816	–313818	216117		
70	108295	102998	–97701			
75	5297	5297				
80	0					

Wenn auch ein Beispiel nicht genügt, um über den Wert einer Formel im Vergleich zu anderen ein endgültiges Urteil zu fällen, so lassen doch die Ergebnisse erkennen, welche Formel gute Resultate erwarten lässt. Es hängt natürlich auch von den zu interpolierenden Werten und insbesondere vom Verlauf ihrer Differenzen ab, welche Interpolationsformeln im gegebenen Falle die besseren Resultate ergeben. Aus der Tabelle geht hervor, dass von den reproduzierenden Interpolationsformeln die Formeln MMA, MMC, MMT und die von Beers

fast gleichwertige Resultate ergeben. Unmittelbar folgen die Formeln von Henderson vom Jahre 1906 sowie die von Shovelton und in weiterem Abstande die oskulatorischen und ganz zuletzt die Formel von Henderson vom Jahre 1921. Alle diese Formeln sind weit davon entfernt, um auf Grund des neu aufgestellten Glättekriteriums als zufriedenstellend bezeichnet zu werden. Der Grund liegt eben darin, dass verlangt wird, dass die Originalwerte unverändert bleiben sollen.

Von den ausgleichenden Interpolationsformeln gibt wohl die Formel M3 weitaus die besten Resultate, die fünften Differenzen liegen auf einer kontinuierlichen Wellenlinie, ohne irgendwelche Sprünge aufzuweisen. Wenn man von der Kontinuität der Grösse und des Vorzeichens absieht, kommen unmittelbar die Formeln M4A und M2, doch bemerkt man bei der Formel M4A deutlich den bereits früher erwähnten Sprung innerhalb jedes Fünferintervalles. Dasselbe wäre übrigens auch von der ausgleichenden Formel von Jenkins zu sagen, die erst in weitem Abstande folgt.

Wenn die zu interpolierenden Werte nur aus wenigen Ziffern bestehen, 3–5ziffrige Grössen z. B., dann werden natürlich die Sprünge nicht so deutlich in Erscheinung treten.

Da die beiden ersten und die letzten zwei Intervalle nicht mit derselben Interpolationsformel untergeteilt werden können und die Lösung dieses Problems nicht als einheitlich bezeichnet werden kann, so wurden nur die interpolierten Werte der übrigen Intervalle berücksichtigt. Aus demselben Grunde wurde auch das Problem der ungleichen Intervalle nicht behandelt.

Ergänzend wäre noch zu bemerken, dass die Behandlung von Interpolationsformeln, die eine gerade Anzahl von Differenzen berücksichtigten, theoretisch keine neuen Ergebnisse bringt. Es ist nur zu berücksichtigen, dass in diesen Fällen nicht ein Mittelintervall interpoliert wird, sondern dass der Mittelpunkt des Interpolationsintervalles mit den Kardinalpunkten zusammenfällt. Aus diesem Grunde hat Greville die treffenden Bezeichnungen Endpunkt- und Mittelpunktformel angewendet.

Fünfte Differenzen von Beers' Beispiel, gerechnet nach den Formeln

x	MMA	H 1906	SH	H 1921	M 3	M 4 A	M 2	M 4	JM
25	−205	0	0	0	−44	−11	0	−52	0
26	1131	524	1332	2102	−82	−178	−210	−1247	−710
27	−1967	−4264	−3182	−10566	−380	−481	−514	−1268	−2130
28	−1360	1346	−145	10566	−23	621	835	776	2130
29	1232	2394	2345	−2102	555	318	240	1284	710
30	2832	0	0	0	604	151	0	717	0
31	86	653	934	−5019	594	464	421	120	242
32	580	2000	2853	16511	335	1030	1262	−139	727
33	−556	−1979	−2829	−16511	−332	−1031	−1264	142	−727
34	−103	−674	−960	5019	−598	−465	−421	−120	−242
35	−2850	0	0	0	−608	−152	0	−722	0
36	228	−904	−553	5128	−609	−507	−473	−1302	−840
37	−1117	−4367	−3695	−20427	−435	−1149	−1387	−979	−2521
38	173	3539	2751	20427	321	1189	1478	839	2521
39	443	1732	1596	−5128	743	547	482	1312	840
40	3596	0	0	0	767	192	0	911	0
41	2644	3586	4306	−1017	668	267	134	463	248
42	−3553	−2189	−3007	4538	−366	403	660	−221	744
43	−3826	−4284	−4372	−4538	−527	−92	52	−871	−744
44	2599	2887	3850	1017	381	44	−69	−381	−248
45	2230	0	0	0	476	119	0	565	0
46	643	1772	1443	−2105	448	292	240	1474	810
47	−516	2399	743	11172	84	606	780	1076	2429
48	−1146	−3857	−2405	−11172	−285	−536	−619	−1321	−2429
49	538	−314	394	2105	−212	−222	−226	−1455	−810
50	−918	0	0	0	−196	−49	0	−232	0
51	−1305	−1022	−1875	−495	−147	12	66	1002	530
52	1974	3470	2416	4664	290	122	66	1161	1590
53	1753	−202	1310	−4664	161	−279	−426	−610	−1590
54	−1342	−2246	−2244	495	−381	−169	−98	−1044	−530
55	−2024	0	0	0	−432	−108	0	−513	0
56	−956	−1322	−1768	1815	−394	−218	−159	48	−35
57	1099	591	300	−5654	40	−417	−569	337	−104
58	1499	1688	2298	5654	274	308	319	47	104
59	−890	−957	−1103	−1815	25	109	137	−76	35
60	−26	0	0	0	−6	−1	0	−7	0
61	−279	−258	−351	−491	4	31	40	70	55
62	466	653	702	1803	84	90	92	102	166
63	348	61	112	−1803	15	−124	−170	18	−166
64	−299	−456	−548	491	−120	−65	−47	−79	−55
65	−616	0	0	0	−131	−33	0	−156	0
	−25854	−29295	−29037	−93507	−6308	−6287	−6652	−12795	−13881
	26094	29295	29685	93507	6869	6915	7304	12464	13881
Total	51948	58590	58722	187014	13177	13202	13956	25259	27762

Fünfte Differenzen von Beers' Beispiel, gerechnet nach den Formeln

Formel	Summe der Differenzen		Summe der absoluten Werte
	negative Werte	positive Werte	
MMA	25854	26094	51948
MMC	25895	26061	51956
BM	26168	26476	52644
MMB	26516	26890	53406
GM	26831	27273	54104
MMT	27100	27585	54685
H1906	29295	29295	58590
SH	29037	29685	58722
SP	45553	45654	91207
J3	47879	44284	92163
J2	50120	47531	97651
R3	56367	55851	112218
B	57968	58612	116580
J4	64944	60377	125321
R4	79432	78303	157735
H1921	93507	93507	187014
M3	6308	6869	13177
M4A	6287	6915	13202
M2	6652	7304	13956
VB	8037	9330	17367
M4	12795	12464	25259
JM	13881	13881	27762
VC	24815	27403	52218
VA	30890	29596	60486
VM	81424	82515	163939

Interpolationsformeln dritter, fünfter und siebenter Ordnung

(1) Bezeichnung. (2) Name des Autors. (3) Veröffentlicht in: (4) Grad. (5) Reproduktionsgrad. (6) Kontinuierliche Ableitungen.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	$\varphi(x)$	$\varphi(1)$
		Interpolationsformeln dritter Ordnung					
	Everett	JIA, XXXV.	3	3	0	$x(x^2-1):6$	0
KK	Karup	2-te IVK.	3	2	1	$x^2(x-1):2$	0
G105	Greville	TASA, XLV.	5	2	1, 2	$-x^3(x-1)(2x-3):2$	0
3M4	Michalup	—	5	1	1–3	$x^4(5-2x):20$	3/20
	Greville	RAIA, XXXIV.	5	2	0	$-x(x-1)(50x^3-75x^2-67x-2):192$	0
	Michalup	—	5	2	0	$-x(x-1)(50x^3-75x^2-11x-6):96$	0
	Michalup	—	3	2	0	$x(x-1)(22x+1):48$	0
		Interpolationsformeln fünfter Ordnung					
SH	Shovelton	JIA, XLVII.	4	4	1	$x^2(x-1)(x-5):48$	0
H1906	Henderson	TASA, IX.	3	3	1	$x^2(1-x):12$	0
BT	Beers	TASA, XLVI.	4	3	1	$x^2(1-3x+x^2):36$	–1/36
M1	Michalup	—	4	3	1	$x^2(85x^2-198x-43):4080$	–13/340
G110	Greville	TASA, XLV.	3	3	1	$x^2(x-2):12$	–1/12
MMT	Michalup	—	5	4	1	$x^2(x-1)(145x^2-168x-175):2376$	0
H1921	Henderson	TASA, XXII.	3	3	2	$x(1-x^2):36$	0
	Michalup	—	4	3	2	$x(x-1)(3x^2-5):144$	0
SP	Sprague	JIA, XXII.	5	4	1, 2	$x^3(x-1)(5x-7):24$	0

B	Buchanan	JIA, XLII.	5	3	1, 2	$x^3(x-1)(3x-4):12$	0
J2	Jenkins	RAIA, XV.	4	3	1, 2	$x^3(1-x):12$	0
JM	Jenkins	TASA, XXVIII.	3	3	1, 2	$-x^3:36$	–1/36
G111	Greville	TASA, XLV.	4	3	1, 2	$x^3(2x-3):12$	–1/12
VA	Vaughan	JIA, LXXII.	4	3	1, 2	$x^3(2-3x):72$	–1/72
VB	Vaughan	JIA, LXXII.	4	3	1, 2	$x^3(x-2):24$	–1/24
VC	Vaughan	JIA, LXXII.	4	3	1, 2	$x^3(3x-5):36$	–1/18
M2	Michalup	—	4	3	1, 2	$x^3(3x-8):144$	–5/144
M4A	Michalup	—	5	3	2, 4	$x^3(x^2-5):120$	–1/30
J3	Jenkins	RAIA, XV.	6	3	1–3	$x^4(x-1)(7x-11):48$	0
M3	Michalup	—	5	3	1–3	$x^4(8x-15):240$	–7/240
R3	Reilly	RAIA, XIII.	7	4	1–3	$x^4(x-1)(-14x^2+35x-23):24$	0
M4	Michalup	—	6	3	1–4	$x^5(15x-26):480$	–11/480
J4	Jenkins	RAIA, XV.	7	3	1–4	$x^5(x-1)(11x-16):60$	0
R4	Reilly	RAIA, XIV.	9	4	1–4	$x^5(x-1)(46x^3-161x^2+193x-80):24$	0
M5	Michalup	—	8	3	1–5	$-x^6(504-536x+147x^2):5376$	–115/5376
5M	Michalup	—	9	3	1–5	$x^6(x-1)(-46x^2+137x-105):168$	0
M6	Michalup	—	9	3	1–6	$-x^7(48x^2-159x+136):1344$	–25/1344
6M	Michalup	—	10	3	1–6	$x^7(x-1)(-75x^2+211x-152):192$	0
M7	Michalup	—	11	3	1–7	$-x^8(-60x^3+297x^2-506x+297):1584$	–28/1584
BM	Beers	RAIA, XXXIII.	5	4	0	$x(x-1)(50x^3-67x^2-11x-2):384$	0
GM	Greville	RAIA, XXIV.	5	4	0	$x(x-1)(150x^3-185x^2-121x-2):1920$	0
MMA	Michalup	—	5	4	0	$x(x-1)(150x^3-205x^2-13x-6):960$	0
MMB	Michalup	—	5	4	0	$x(x-1)(50x^3-65x^2-21x-2):480$	0
MMC	Michalup	—	5	4	0	$x(x-1)(350x^3-485x^2+3x-14):1920$	0
VM	Vaughan	JIA, LXXII.	5	3	0	$x(-625x^4+3125x^3-3625x^2+175x-514):24000$	–0.061
BM4	Beers	RAIA, XXXIV.	5	3	0	$x(625x^4-1825x^2-780x-84):48000$	–0.043
GM4	Greville	RAIA, XXXIV.	5	3	0	$x(1250x^4+13125x^3-24500x^2-1425x-1362):240000$	–0.0538

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	$\varphi(x)$	$\varphi(1)$
		Interpolationsformeln siebenter Ordnung					
	Jenkins	RAIA, XV.	7	5	1–4	$-x^5(x-1)(9x-13):240$	0
	Michalup	—	7	5	1–4	$x^6(35-22x):3360$	13–3360
	Michalup	—	6	5	1–4	$x^5(22-13x):1920$	3/640
	Michalup	—	7	5	1–4	$x^5(35-13x^2):5040$	11/2520
	Jenkins	RAIA, XV.	6	5	1–3	$-x^4(x-1)(29x-45):960$	0
	Reilly	RAIA, XIII.	5	5	1, 2	$x^3(x-1)(-8x+11):180$	0
	Reilly	RAIA, XIII.	7	6	1–3	$x^4(x-1)(89x^2-222x+145):720$	0
	Reilly	RAIA, XIV.	9	6	1–4	$x^5(x-1)(-290x^3+1015x^2-1216x+503):720$	0

Literaturnachweis

Es bedeuten:

MVSV = Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.
JIA = Journal of the Institute of Actuaries.
TFA = Transactions of the Faculty of Actuaries.
TASA = Transactions of the Actuarial Society of America.
RAIA = The Record of the American Institute of Actuaries.
SAT = Skandinavisk Aktuarietidskrift.
IVK = Internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker.

Die römische Ziffer bezieht sich auf den Band, die arabische Ziffer auf die Seite.

[1] Congrès international de statistique à la Haye, 7e session, du 6 au 11 septembre 1869. 1re partie: Programme, p. 38. 2e partie: Compte rendu, p. 534.

[2] *Moser:* Leben und Sterben in der schweizerischen Bevölkerung. Rektoratsrede, MVSV, XIII, 2.

[3] Schweizerische Volkssterbetafeln 1876—1932. Eidgenössisches Statistisches Amt, Beiträge zur schweizerischen Statistik, Heft 4. Bern 1935.

[4] *Linder:* Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln. Bern 1934, S. 81.

[5] *Steiner-Stoss:* Die Konstruktion der Durerschen Sterbetafel. MVSV, IV, 111.

[6] *Ackland:* On the estimated Age-Distribution of the Indian Population, as recorded at the Census of 1911, and the estimated Rates of Mortality deduced from a comparison of the Census Returns for 1901 and 1911. JIA, XLVII, 315/414.

Wolfenden: Population Statistics and their Compilation. New York 1925.

Myers: Errors and Bias in the Report of Ages in Census Data. TASA, XLI, 395—415.

Hardy: The Theory of the Construction of Tables of Mortality, etc. London 1909.

Buchanan: Notes on Graduation. TFA, X, 289—343.

[7] *Sprague:* Explanation of a new Formula for Interpolation. JIA, XXII, 270.

[8] *Karup:* Über eine neue mechanische Ausgleichsmethode. Transactions of the Second International Actuarial Congress. London 1899, Seiten 31/109.

[9] *King:* On the Construction of Mortality Tables from Census Returns and Records of Deaths. JIA, XLII, 225.

[10] *Lidstone:* Alternative Demonstration of the Formulae for osculatory Interpolation. JIA, XLII, 394—397.

[11] *Buchanan:* Osculatory Interpolation by Central Differences; with an application to Life Table Construction. JIA, XLII, 369—394.

[12] *Sheppard:* Central Difference Formulae. Proceedings of the London Mathematical Society, XXXI, 449.

[13] *Everett:* On a New Interpolation Formula. JIA, XXXV, 452—458.

[14] *Liechti:* Beitrag zur Theorie der Intensitätsfunktionen. MVSV, V, 56.

[15] *Gini:* Tavole di mortalità della popolazione italiana. Annali di Statistica dell' Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia, Serie VI. Vol. VIII. Roma 1931.

[16] JIA, LXIII, 514.

[17] *Shovelton:* On the Graduation of Mortality Tables by Interpolation. JIA, XLVII, 284—298.

[18] *Henderson:* A Practical Interpolation Formula. TASA, IX, 211.

[19] *Reilly:* Certain Generalizations of osculatory Interpolation. RAIA, XIII, 4—22. On Lidstone's Demonstration of the osculatory Interpolation Formula. RAIA, XIV, 12—20.

[20] *Henderson:* Central Difference Interpolation. TASA, XXII, 190/191.

[21] *Jenkins:* Osculatory Interpolation: New Derivation and Formulas. RAIA, XV, 87—98; RAIA, XV, 191—196.

[22] RAIA, XV, 96.

[23] RAIA, XIV, 224—229.

[24] *Jenkins:* Graduation based on a Modification of Osculatory Interpolation. TASA, XXVIII, 198—215. An Extension of the Methods of Graduation by Interpolation. TASA, XXXI, 9—31.

[25] *Schoenberg:* Contributions to the problem of Approximation of equidistant data by analytic functions. Quarterly of Applied Mathematics, IV, 45—99.

[26] *Buchanan:* Recent Developments of Osculatory Interpolation with Applications to the Construction of National and other Life Tables. TFA, XII, 117—160.

[27] *Reid* and *Dow:* On Graduation by the General Formulae of Osculatory Interpolation. TFA, XIV, 185—220.

[28] *Kerrich:* Systems of Osculatory Arcs. JIA, LXVI, 88—124.

[29] *Greville:* The General Theory of Osculatory Interpolation. TASA, XLV, 202.

[30] *Beers:* Six-Term Formulas for Routine Actuarial Interpolation. RAIA, XXXIII, 245—260.

[31] *Beers:* Modified Interpolation Formulas that minimize Fourth Differences. RAIA, XXXIV, 14—20.

[32] *Greville:* Actuarial Note: Some Extensions of Mr. Beers' Method of Interpolation. RAIA, XXXIV, 21—34.

[33] *Vaughan:* Some Notes on Interpolation. JIA, LXXII, 482—497.

[34] *Seal:* Tests of a Mortality Table Graduation. JIA, LXXI, 5.

[35] *King:* The New National Life Tables. JIA, XLIX, 312—313.

[36] *Simonett:* Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King. MVSV, XXVIII, 91—148.

[37] JIA, LXVI, 482 (Fussnote).

[38] *Deming:* The Elimination of unknown ages in the 1940 Population Census. U. S. Department of Commerce, Bureau of the Census. Washington 1942.

[39] *Palmqvist:* Sur un problème d'interpolation actuariel. SAT, IX, 164—171.

[40] *Michalup:* Contribución al Estudio de la Demografía venezolana. Revista del Colegio de Ingenieros de Venezuela, No. 141, Caracas 1944.

[41] *Reed* and *Merrell:* A short method for construction an abridged Life Table. The American Journal of Hygiene. Vol. 30, No. 2, Sec A, S. 33—62.

[42] *Greville:* Short methods of Constructing abridged Life Tables. RAIA, XXXII, 29—43.

[43] *Oppermann:* On the Graduation of Life Tables with special Application to the Rate of Mortality in Infancy and childhood. The Insurance Record. London 1870.

[44] *Michalup:* La composición familiar de asalariados en el Distrito Federal de Venezuela; ajustamiento de los datos de observación. Estadística, Journal of the Inter American Statistical Institute. Washington No. 12, 554—570.

[45] TASA, XLII, 41—42.