Über Darstellungsformen der Prämien und Reserven der Todesfallversicherung

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **47 (1947)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966854

Über Darstellungsformen der Prämien und Reserven der Todesfallversicherung

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

1. Die Einmalprämie einer Todesfallversicherung mit variabler Summe U_t auf das Leben des $x+t$-jährigen kann man, wie allgemein bekannt ist, auch auffassen als retrospektives Deckungskapital einer vor t Jahren gegen Einmalprämie abgeschlossenen gleichartigen Versicherung. Wenn A_t allgemein für die Einmalprämie im Alter $x+t$ steht, δ die Zinsintensität und μ_t die Intensität der Sterblichkeit bedeuten, so ist

$$A_t = e^{\int\limits_0^t (\delta+\mu_\tau)\,d\tau} \left[A_0 - \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^\lambda (\delta+\mu_\tau)\,d\tau} \mu_\lambda\, U_\lambda\, d\lambda \right]. \tag{1}$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass für die stetig zahlbare Prämie P_t der gleichen Versicherungsform ein äusserlich mit (1) völlig übereinstimmender Ausdruck gilt.

Aus der Differentialgleichung des Rentenbarwertes folgt mit der für die gemischte Versicherung «1» gültigen Beziehung $P_t = \dfrac{1}{a_t} - \delta$,

$$a'_t = (\delta+\mu_t)\,a_t - 1 = a_t \left[\mu_t - \left(\frac{1}{a_t} - \delta \right) \right] = a_t\,(\mu_t - P_t).$$

Diesen Wert führen wir ein in $P'_t = \dfrac{-a'_t}{(a_t)^2}$ und erhalten

$$P'_t - \frac{P_t}{a_t} + \frac{\mu_t}{a_t} = 0. \tag{2}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung vom Typus

$$y'(t) + \varphi(t)\, y(t) + f(t) = 0$$

führt mit

$$\varphi(t) = \frac{-1}{a_t} = -(\delta + P_t),$$

$$f(t) = \frac{\mu_t}{a_t} = \mu_t (P_t + \delta) = P_t \left(\mu_t + \frac{\delta \mu_t}{P_t}\right) = P_t \frac{\mu_t}{A_t}$$

auf

$$P_t = e^{\int\limits_0^t (\delta + P_\tau)\, d\tau} \left[P_0 - \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^\lambda (\delta + P_\tau)\, d\tau} P_\lambda \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} d\lambda \right]. \tag{3}$$

Man kann die rechte Seite von (3) im Sinne von (1) auffassen als Einmalprämie (oder als Deckungskapital) einer Todesfallversicherung, für welche beim Abschluss die Einmalprämie P_0 bezahlt worden ist, deren «Leistung» $\frac{\mu_t}{A_t}$ beträgt und deren «Intensität des Sterbens» P_t ausmacht.

2. Aus Gleichung (3) lässt sich eine weitere (retrospektive) Darstellungsform für die Prämie finden. Wir ersetzen $\delta + P_t$ durch $\frac{1}{a_t}$ und erhalten

$$P_t = e^{\int\limits_0^t \frac{d\tau}{a_\tau}} \left[P_0 - \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^\lambda \frac{d\tau}{a_\tau}} P_\lambda \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} d\lambda \right]. \tag{4}$$

Fassen wir (4) als Bestimmungsgleichung für P_t auf, so haben wir eine *Volterrasche Integralgleichung 2. Art* zu lösen [1]). Die unmittelbare Auflösung, z. B. über den lösenden Kern, dürfte nicht leicht möglich sein, da der Kern die Form

$$K(\lambda, t) = \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} e^{\int\limits_\lambda^t \frac{d\tau}{a_\tau}}$$

hat.

---

[1]) (3) ist selbstredend auch eine Integralgleichung für P_t.

3. Beziehung (2) gibt Anlass zu einem der äussern Form nach einfachen Ausdruck für das Deckungskapital der gemischten Versicherung «1». Es ist aus (2)

$$\mu_t = P_t - P'_t\, a_t\,;$$

dies eingesetzt in

$$\frac{l_t}{l_0} = e^{-\int_0^t \mu_\tau\, d\tau}$$

ergibt

$$\frac{l_t}{l_0} = e^{-\int_0^t P_\tau\, d\tau + \int_0^t P'_\tau\, a_\tau\, d\tau}\,;$$

weil aber [1])

$$\frac{l_t}{l_0}\,(1 - {}_tV) = e^{-\int_0^t P_\tau\, d\tau}\,,$$

folgt weiter

$$1 = (1 - {}_tV)\, e^{\int_0^t P'_\tau\, a_\tau\, d\tau}$$

und aufgelöst

$${}_tV = 1 - e^{-\int_0^t P'_\tau\, a_\tau\, d\tau}\,. \qquad (5)$$

Gleichung (5) stimmt inhaltlich mit einem von *Vasmoen* [5] aus der *Riccatischen* Differentialgleichung der Prämie hergeleiteten Ausdruck überein. Ersetzen wir nämlich $P'_t\, a_t$ durch $P_t - \mu_t$, so wird

$${}_tV = 1 - e^{-\int_0^t (P_\tau - \mu_\tau)\, d\tau}\,. \qquad (6)$$

Formel (5) erinnert an die Darstellung der t-jährigen Sterbewahrscheinlichkeit durch die Sterbeintensität. Es bestehen die Beziehungen [2])

---

[1]) Formel (1) in Arbeit [2], ebenso Formel (3) in Arbeit [3].
[2]) Formeln (25) und (29) in [4].

$$ {}_tq_x = 1 - e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau}\,d\tau} = \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^\lambda \mu_{x+\tau}\,d\tau} \mu_{x+\lambda}\,d\lambda = \int\limits_0^t (1 - {}_\lambda q_x)\,\mu_{x+\lambda}\,d\lambda\,, $$

woraus durch Übertragung für ${}_tV$ unmittelbar folgt

$$ {}_tV = \int\limits_0^t (1 - {}_\lambda V)\,P'_\lambda\,a_\lambda\,d\lambda\,. \tag{7} $$

Fasst man (7) als Bestimmungsgleichung für ${}_tV$ auf, so liegt, wie schon unter Ziffer 2, eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art vor, mit dem Kern $K(\lambda, t) = P'_\lambda a_\lambda$ [1]).

4. Wir lassen in der Sterbetafel l_t die Sterbeintensität μ_t übergehen in $\bar{\mu}_t = (1+\varepsilon)\mu_t$. Die zugehörige Absterbeordnung hat dann die Gestalt

$$ \frac{\bar{l}_t}{\bar{l}_0} = e^{-\int\limits_0^t \bar{\mu}_\tau\,d\tau} = e^{-(1+\varepsilon)\int\limits_0^t \mu_\tau\,d\tau} = \left(\frac{l_t}{l_0}\right)^{1+\varepsilon}. $$

Für das Deckungskapital ${}_t\bar{V}$, berechnet mit der Intensität μ_t (und der Prämie $\bar{P}_t$ bzw. dem Rentenbarwert $\bar{a}_t$) gilt,

$$ \frac{\bar{l}_t}{\bar{l}_0} = \frac{1}{1 - {}_t\bar{V}}\, e^{-\int\limits_0^t \bar{P}_\tau\,d\tau} = \left(\frac{l_t}{l_0}\right)^{1+\varepsilon} = \left(\frac{1}{1 - {}_tV}\right)^{1+\varepsilon} e^{-(1+\varepsilon)\int\limits_0^t P_\tau\,d\tau}, $$

und nach Division

$$ 1 = \frac{(1 - {}_tV)^{1+\varepsilon}}{1 - {}_t\bar{V}}\, e^{-\int\limits_0^t [\bar{P}_\tau - (1+\varepsilon)P_\tau]\,d\tau}\,. \tag{8} $$

Schliesslich ersetzen wir nach (5)

$$ \frac{(1 - {}_tV)^{1+\varepsilon}}{1 - {}_t\bar{V}} = e^{-\int\limits_0^t [(1+\varepsilon)\,P'_\tau\,a_\tau - \bar{P}'_\tau\,\bar{a}_\tau]\,d\tau} $$

---

[1]) Diese Integralgleichung ist nicht, wie diejenigen von *Berger*, *Loewy* u. a. [6], aus einer besonderen Zusammenfassung bei der Integration der Reservedifferentialgleichung entstanden, sondern durch passende Substitution n in den fertigen Ausdruck für das Deckungskapital.

und erhalten

$$e^{\int\limits_0^t (\bar{P}_\tau - \bar{P}'_\tau \bar{a}_\tau)\,d\tau} = e^{(1+\varepsilon)\int\limits_0^t (P_\tau - P'_\tau a_\tau)\,d\tau}\,; \tag{9}$$

diese Gleichung muss für jedes t gelten; also muss auch sein

$$\frac{\bar{P}_t - \bar{P}'_t \bar{a}_t}{P_t - P'_t a_t} = 1 + \varepsilon. \tag{10}$$

Der Quotient aus Prämie minus Barwert der Ableitung der Prämie, berechnet mit der jeweiligen Sterbeintensität, verfolgt eine lineare Funktion von ε. Das gleiche Ergebnis hätte man auch aus (2) erhalten, ohne aber den Zusammenhang der beiden Deckungskapitalien zu erkennen.

Literaturverzeichnis

[1] *E. Zwinggi:* Ein Multiplikationssatz für das Deckungskapital. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 45. Band, 1945, S. 375—383.

[2] — Eine Produktdarstellung für das Deckungskapital. Experientia, Vol. II/5, 1946, S. 182.

[3] — About a form of representation of the policy value. Festschrift Filip Lundberg, 1946, S. 286—292.

[4] — Versicherungsmathematik. Verlag Birkhäuser Basel, 1945.

[5] *Vasmoen, P.:* Über den Einfluss einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve und andere damit zusammenhängende Fragen. Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 18, 1935, S. 1—34.

[6] *A. Berger:* Über das Äquivalenzprinzip. Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 12, 1929, S. 197—217.

Über simultane Versicherungswerte. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereines für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik, 6. Heft, 1930, S. 45—68.

Studien zur Versicherungsmathematik. Assekuranz-Jahrbuch, 52. Band, 1933, S. 3—31.

A. Loewy: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. Blätter für Versicherungsmathematik, 2. Band, Hefte 1, 2 und 6, 1931/32, S. 3—18, 74—82, 207—216.