Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 47 (1947)

Artikel: Über Darstellungsformen der Prämien und Reserven der Todesfallversicherung

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966854

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Darstellungsformen der Prämien und Reserven der Todesfallversicherung

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

1. Die Einmalprämie einer Todesfallversicherung mit variabler Summe U_t auf das Leben des $x+t$-jährigen kann man, wie allgemein bekannt ist, auch auffassen als retrospektives Deckungskapital einer vor t Jahren gegen Einmalprämie abgeschlossenen gleichartigen Versicherung. Wenn A_t allgemein für die Einmalprämie im Alter $x+t$ steht, δ die Zinsintensität und μ_t die Intensität der Sterblichkeit bedeuten, so ist

$$A_t = e^{\int_0^t (\delta+\mu_\tau)\,d\tau} \left[A_0 - \int_0^t e^{-\int_0^\lambda (\delta+\mu_\tau)\,d\tau} \mu_\lambda U_\lambda \, d\lambda \right]. \tag{1}$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass für die stetig zahlbare Prämie P_t der gleichen Versicherungsform ein äusserlich mit (1) völlig übereinstimmender Ausdruck gilt.

Aus der Differentialgleichung des Rentenbarwertes folgt mit der für die gemischte Versicherung «1» gültigen Beziehung $P_t = \frac{1}{a_t} - \delta$,

$$a_t' = (\delta + \mu_t)\, a_t - 1 = a_t \left[\mu_t - \left(\frac{1}{a_t} - \delta \right) \right] = a_t (\mu_t - P_t).$$

Diesen Wert führen wir ein in $P_t' = \frac{-a_t'}{(a_t)^2}$ und erhalten

$$P_t' - \frac{P_t}{a_t} + \frac{\mu_t}{a_t} = 0. \tag{2}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung vom Typus

$$y'(t) + \varphi(t)\, y(t) + f(t) = 0$$

führt mit

$$\varphi(t) = \frac{-1}{a_t} = -(\delta + P_t),$$

$$f(t) = \frac{\mu_t}{a_t} = \mu_t (P_t + \delta) = P_t \left(\mu_t + \frac{\delta \mu_t}{P_t}\right) = P_t \frac{\mu_t}{A_t}$$

auf

$$P_t = e^{\int_0^t (\delta + P_\tau)\, d\tau} \left[P_0 - \int_0^t e^{-\int_0^\lambda (\delta + P_\tau)\, d\tau} P_\lambda \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} d\lambda \right]. \tag{3}$$

Man kann die rechte Seite von (3) im Sinne von (1) auffassen als Einmalprämie (oder als Deckungskapital) einer Todesfallversicherung, für welche beim Abschluss die Einmalprämie P_0 bezahlt worden ist, deren «Leistung» $\frac{\mu_t}{A_t}$ beträgt und deren «Intensität des Sterbens» P_t ausmacht.

2. Aus Gleichung (3) lässt sich eine weitere (retrospektive) Darstellungsform für die Prämie finden. Wir ersetzen $\delta + P_t$ durch $\frac{1}{a_t}$ und erhalten

$$P_t = e^{\int_0^t \frac{d\tau}{a_\tau}} \left[P_0 - \int_0^t e^{-\int_0^\lambda \frac{d\tau}{a_\tau}} P_\lambda \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} d\lambda \right]. \tag{4}$$

Fassen wir (4) als Bestimmungsgleichung für P_t auf, so haben wir eine *Volterrasche Integralgleichung 2. Art* zu lösen [1]). Die unmittelbare Auflösung, z. B. über den lösenden Kern, dürfte nicht leicht möglich sein, da der Kern die Form

$$K(\lambda, t) = \frac{\mu_\lambda}{A_\lambda} e^{\int_\lambda^t \frac{d\tau}{a_\tau}}$$

hat.

---

[1]) (3) ist selbstredend auch eine Integralgleichung für P_t.

3. Beziehung (2) gibt Anlass zu einem der äussern Form nach einfachen Ausdruck für das Deckungskapital der gemischten Versicherung «1». Es ist aus (2)

$$\mu_t = P_t - P'_t a_t;$$

dies eingesetzt in

$$\frac{l_t}{l_0} = e^{-\int_0^t \mu_\tau d\tau}$$

ergibt

$$\frac{l_t}{l_0} = e^{-\int_0^t P_\tau d\tau + \int_0^t P'_\tau a_\tau d\tau};$$

weil aber [1])

$$\frac{l_t}{l_0}(1 - {}_tV) = e^{-\int_0^t P_\tau d\tau},$$

folgt weiter

$$1 = (1 - {}_tV)\, e^{\int_0^t P'_\tau a_\tau d\tau}$$

und aufgelöst

$${}_tV = 1 - e^{-\int_0^t P'_\tau a_\tau d\tau}. \tag{5}$$

Gleichung (5) stimmt inhaltlich mit einem von *Vasmoen* [5] aus der *Riccatischen* Differentialgleichung der Prämie hergeleiteten Ausdruck überein. Ersetzen wir nämlich $P'_t a_t$ durch $P_t - \mu_t$, so wird

$${}_tV = 1 - e^{-\int_0^t (P_\tau - \mu_\tau) d\tau}. \tag{6}$$

Formel (5) erinnert an die Darstellung der t-jährigen Sterbewahrscheinlichkeit durch die Sterbeintensität. Es bestehen die Beziehungen [2])

---

[1]) Formel (1) in Arbeit [2], ebenso Formel (3) in Arbeit [3].
[2]) Formeln (25) und (29) in [4].

$$ {}_tq_x = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} = \int_0^t e^{-\int_0^\lambda \mu_{x+\tau} d\tau} \mu_{x+\lambda} d\lambda = \int_0^t (1 - {}_\lambda q_x) \mu_{x+\lambda} d\lambda, $$

woraus durch Übertragung für ${}_tV$ unmittelbar folgt

$$ {}_tV = \int_0^t (1 - {}_\lambda V) P'_\lambda a_\lambda d\lambda. \tag{7} $$

Fasst man (7) als Bestimmungsgleichung für ${}_tV$ auf, so liegt, wie schon unter Ziffer 2, eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art vor, mit dem Kern $K(\lambda, t) = P'_\lambda a_\lambda$ [1]).

4. Wir lassen in der Sterbetafel l_t die Sterbeintensität μ_t übergehen in $\bar{\mu}_t = (1 + \varepsilon)\mu_t$. Die zugehörige Absterbeordnung hat dann die Gestalt

$$ \frac{\bar{l}_t}{\bar{l}_0} = e^{-\int_0^t \bar{\mu}_\tau d\tau} = e^{-(1+\varepsilon)\int_0^t \mu_\tau d\tau} = \left(\frac{l_t}{l_0}\right)^{1+\varepsilon}. $$

Für das Deckungskapital ${}_t\bar{V}$, berechnet mit der Intensität μ_t (und der Prämie $\bar{P}_t$ bzw. dem Rentenbarwert $\bar{a}_t$) gilt,

$$ \frac{\bar{l}_t}{\bar{l}_0} = \frac{1}{1 - {}_t\bar{V}} e^{-\int_0^t \bar{P}_\tau d\tau} = \left(\frac{l_t}{l_0}\right)^{1+\varepsilon} = \left(\frac{1}{1 - {}_tV}\right)^{1+\varepsilon} e^{-(1+\varepsilon)\int_0^t P_\tau d\tau}, $$

und nach Division

$$ 1 = \frac{(1 - {}_tV)^{1+\varepsilon}}{1 - {}_t\bar{V}} e^{-\int_0^t [\bar{P}_\tau - (1+\varepsilon) P_\tau] d\tau}. \tag{8} $$

Schliesslich ersetzen wir nach (5)

$$ \frac{(1 - {}_tV)^{1+\varepsilon}}{1 - {}_t\bar{V}} = e^{-\int_0^t [(1+\varepsilon) P'_\tau a_\tau - \bar{P}'_\tau \bar{a}_\tau] d\tau} $$

---

[1]) Diese Integralgleichung ist nicht, wie diejenigen von *Berger*, *Loewy* u. a. [6], aus einer besonderen Zusammenfassung bei der Integration der Reservedifferentialgleichung entstanden, sondern durch passende Substitutionen in den fertigen Ausdruck für das Deckungskapital.

und erhalten

$$e^{\int_0^t (\bar{P}_\tau - \bar{P}'_\tau \bar{a}_\tau)\, d\tau} = e^{(1+\varepsilon)\int_0^t (P_\tau - P'_\tau a_\tau)\, d\tau}; \tag{9}$$

diese Gleichung muss für jedes t gelten; also muss auch sein

$$\frac{\bar{P}_t - \bar{P}'_t \bar{a}_t}{P_t - P'_t a_t} = 1 + \varepsilon. \tag{10}$$

Der Quotient aus Prämie minus Barwert der Ableitung der Prämie, berechnet mit der jeweiligen Sterbeintensität, verfolgt eine lineare Funktion von ε. Das gleiche Ergebnis hätte man auch aus (2) erhalten, ohne aber den Zusammenhang der beiden Deckungskapitalien zu erkennen.

Literaturverzeichnis

[1] *E. Zwinggi:* Ein Multiplikationssatz für das Deckungskapital. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 45. Band, 1945, S. 375—383.

[2] — Eine Produktdarstellung für das Deckungskapital. Experientia, Vol. II/5, 1946, S. 182.

[3] — About a form of representation of the policy value. Festschrift Filip Lundberg, 1946, S. 286—292.

[4] — Versicherungsmathematik. Verlag Birkhäuser Basel, 1945.

[5] *Vasmoen, P.:* Über den Einfluss einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve und andere damit zusammenhängende Fragen. Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 18, 1935, S. 1—34.

[6] *A. Berger:* Über das Äquivalenzprinzip. Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 12, 1929, S. 197—217.

Über simultane Versicherungswerte. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereines für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik, 6. Heft, 1930, S. 45—68.

Studien zur Versicherungsmathematik. Assekuranz-Jahrbuch, 52. Band, 1933, S. 3—31.

A. Loewy: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. Blätter für Versicherungsmathematik, 2. Band, Hefte 1, 2 und 6, 1931/32, S. 3—18, 74—82, 207—216.