Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Band: 48 (1948)

Artikel: Über die Summationsformel von Euler

Autor: Kreis, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966890

Über die Summationsformel von Euler

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die *Euler*sche Summationsformel stellt bekanntlich eine Beziehung zwischen dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und der Summe $\sum f(a+\nu h)\,h$; $\nu = 0,1, \ldots n-1$; $nh = b-a$ her. Da die meisten Ableitungen dieser für die Versicherungsmathematik wichtigen Formel von der Differenzenrechnung ausgehen, soll, im Gegensatz dazu, in der vorliegenden Abhandlung eine einfache, zugänglichere Methode zur Anwendung kommen.

In dem Ausdruck

$$S = f(a)h + f(a+h)h + \ldots + f(a+(n-1)h)\,h \qquad (1)$$

entwickeln wir die Funktionen nach Potenzen von h und erhalten eine Summe, der die Form gegeben werden kann

$$S = \varphi_1(n) f(a)\,h + \varphi_2(n) f'(a)\,h^2 + \varphi_3(n) f''(a)\,h^3 + \ldots, \qquad (2)$$

in welcher die Koeffizienten

$$\varphi_1(n) = n$$

$$\varphi_2(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

allgemein

$$\varphi_k(n) = \frac{1^{k-1} + 2^{k-1} + \ldots + (n-1)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (3)$$

mit den *Jakob Bernoulli*schen Funktionen identisch sind. Da die $\varphi_k(n)$ reine Zahlenkoeffizienten, die nur von n, aber weder von der Funktion

$f(x)$ noch von a oder h abhängig sind, lassen sie sich ermitteln, indem wir für $f(x)$ und a eine willkürliche aber zweckmässige Wahl, etwa $f_1(x) = e^x$ und $a = 0$, treffen, so dass

$$f_1(0 + \nu h) = e^{\nu h}, \quad f_1^{(k)}(0 + \nu h) = e^{\nu h}$$

und

$$S_1 = 1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(n-1)h} = \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} \tag{4}$$

wird. Formel (2) geht dann über in

$$h \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = \varphi_1(n) h + \varphi_2(n) h^2 + \varphi_3(n) h^3 + \ldots \tag{5}$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von h können die Bernoullischen Funktionen bestimmt werden. Während aber definitionsgemäss n eine ganze, natürliche Zahl war, kann jetzt n in Gleichung (5) als stetiger, variabler Parameter aufgefasst werden.

Wenn insbesondere $n = 0$ gesetzt wird, so folgt

$$\varphi_k(0) = 0, \quad \text{für jedes } k. \tag{6}$$

Differenziert man ferner nach n, so folgt aus (5):

$$h \frac{h\, e^{nh}}{e^h - 1} = \varphi_1'(n) h + \varphi_2'(n) h^2 + \varphi_3'(n) h^3 + \ldots \tag{7}$$

und, falls e^{nh} aus (5) und (7) eliminiert wird, ergibt sich

$$\frac{h}{e^h - 1} = \varphi_1'(n) + (\varphi_2'(n) - \varphi_1(n)) h + (\varphi_3'(n) - \varphi_2(n)) h^2 + \ldots \tag{8}$$

Mit Hilfe der Entwicklung

$$\frac{h}{e^h - 1} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots \tag{9}$$

lassen sich aus Gleichung (8) und (9) folgende Grundgleichungen bilden:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1'(n) &= A_0\,, \\
\varphi_2'(n) &= \varphi_1(n) + A_1\,, \\
\varphi_3'(n) &= \varphi_2(n) + A_2\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k'(n) &= \varphi_{k-1}(n) + A_{k-1}\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Integriert man die einzelnen Beziehungen (10) zwischen 0 und n, so findet man, unter Berücksichtigung von Gleichung (6) $\varphi_k(0) = 0$, der Reihe nach:

$$\varphi_1(n) = \int_0^n A_0\,d\nu = A_0 n\,,$$

$$\varphi_2(n) = \int_0^n (\varphi_1(\nu) + A_1)\,d\nu = A_0\frac{n^2}{2} + A_1 n\,,$$

$$\varphi_3(n) = \int_0^n (\varphi_2(\nu) + A_2)\,d\nu = A_0\frac{n^3}{3!} + A_1\frac{n^2}{2} + A_2 n\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_k(n) = \int_0^n (\varphi_{k-1}(\nu) + A_{k-1})\,d\nu = A_0\frac{n^k}{k!} + A_1\frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + A_{k-1} n\,.$$

Hieraus gelangt man zu folgenden Integraldarstellungen für die Koeffizienten $\varphi_k(n)$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(n) &= \int_0^n A_0\,d\nu\,, \\
\varphi_2(n) &= \int_0^n (A_0\nu + A_1)\,d\nu\,, \\
\varphi_3(n) &= \int_0^n \left(A_0\frac{\nu^2}{2} + A_1\nu + A_2\right)d\nu\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k(n) &= \int_0^n \left(A_0\frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!} + A_1\frac{\nu^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + A_{k-1}\right)d\nu\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke für $\varphi_k(n)$ in (2) und Ordnen der Reihe nach den Koeffizienten $A_0, A_1, A_2 \ldots$, erscheint S als Summe von Integralen in folgender Gestalt

$$S = A_0 \int_0^n \left(f(a) + \nu h f'(a) + \frac{\nu^2 h^2}{2} f''(a) + \ldots \right) d\nu$$

$$+ A_1 h \int_0^n \left(f'(a) + \nu h f''(a) + \frac{\nu^2 h^2}{2} f'''(a) + \ldots \right) d\nu$$

$$+ A_2 h^2 \int_0^n \left(f''(a) + \nu h f'''(a) + \frac{\nu^2 h^2}{2} f^{(4)}(a) + \ldots \right) d\nu$$

$$+ \ldots\ldots$$

oder kürzer

$$S = A_0 \int_0^n f(a + \nu h)\, h\, d\nu + A_1 h \int_0^n f'(a + \nu h)\, h\, d\nu + A_2 h^2 \int_0^n f''(a + \nu h)\, h\, d\nu + \ldots$$

Durch Einführung der neuen Integrationsvariablen $x = a + \nu h$ findet man

$$S = A_0 \int_a^b f(x)\, dx + A_1 h \int_a^b f'(x)\, dx + A_2 h^2 \int_a^b f''(x)\, dx + \ldots$$

oder

$$S = A_0 \int_a^b f(x)\, dx + A_2 h\, (f(b) - f(a)) + A_2 h^2\, (f'(b) - f'(a)) + \ldots \quad (12)$$

Zur Berechnung der auftretenden Koeffizienten A_k dient Gleichung (9), so dass z. B.

$$A_0 = 1; \quad A_1 = -\frac{1}{2}; \quad A_2 = -\frac{1}{12}; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = -\frac{1}{720}$$

ist. Dass sämtliche Koeffizienten von der Form A_{3+2m} verschwinden, erkennt man unmittelbar aus (9), denn

$$\frac{h}{e^h - 1} - 1 + \frac{h}{2} = A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \ldots, \quad (13)$$

da aber

$$\frac{h}{e^h - 1} + \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{e^{\frac{h}{2}} + e^{-\frac{h}{2}}}{e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}}$$

eine gerade Funktion von h ist, so gilt das auch von der linken Seite von (13), so dass rechts die ungeraden Potenzen von h wegfallen müssen, also $A_{3+2m} = 0$ für $m = 0; 1; 2; \ldots$

Schliesslich lautet die Eulersche Summationsformel in der üblichen Form

$$f(a)h + f(a+h)h + \ldots + f(a+(n-1)h)h =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(b) - f(a)) + \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) - \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)) + \ldots$$

wo $b = a + nh$ zu setzen ist.

Für ganze rationale Funktionen $f(x)$ ist die aufgestellte Formel ohne weitere Bedingungen anwendbar; für beliebige Funktionen hingegen muss das Restglied der Reihe untersucht werden, worauf ich nicht eintreten und auf die Arbeiten von *Franel* [2], *Seliwanoff* [4] und die *Enzyklopädie* [1] hinweisen möchte.

Begnügt man sich mit dem linearen und quadratischen Glied von h, so hat man beispielsweise, unter Benützung der üblichen Bezeichnungen, für die Funktion $f(x) = l_x v^x \equiv D_x$ und $a = 40$; $b = 60$; $h = \frac{1}{4}$, also $n = 80$:

$$f'(x) = l'_x v^x + l_x v^x \ln v = -D_x\mu_x - D_x\delta,$$

$$\frac{1}{4} D_{40} + \frac{1}{4} D_{40\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} D_{40\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{4} D_{59\frac{3}{4}} =$$

$$= \bar{N}_{40} - \bar{N}_{60} - \frac{1}{8}(D_{60} - D_{40}) + \frac{1}{192}(D_{40}\mu_{40} + D_{40}\delta - D_{60}\mu_{60} - D_{60}\delta)$$

oder

$$\mathrm{a}^{(4)}_{40:\overline{20|}} = \bar{\mathrm{a}}_{40:\overline{20|}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{192}(\mu_{40} + \delta) - \frac{D_{60}}{D_{40}}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{192}(\mu_{60} + \delta)\right).$$

Literaturverzeichnis

[1] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, erster Band, zweiter Teil, den Artikel: Differenzenrechnung von *D. Seliwanoff.*

[2] *J. Franel:* Sur la formule sommatoire d'Euler. (Math. Annalen, 47. Band.)

[3] *A. Henry:* Le calcul des différences finies et ses applications. (Traduit de l'anglais par A. Sallin; Paris 1932.)

[4] *D. Seliwanoff:* Lehrbuch der Differenzenrechnung. (Teubner, Leipzig 1904.)

[5] *Text-Book.* (Traduit de l'anglais par Amédée Bégault, Bruxelles 1894.)