Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Zur Berechnung von Übersterblichkeitszuschlägen

Autor: Neuhaus, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966897

Zur Berechnung von Übersterblichkeitszuschlägen

Von *J. Neuhaus*, Zürich

Herrn a. Direktor Dr. C. Wiesmann, Zürich,
zum 70. Geburtstag vom Verfasser gewidmet

Die Zuschlagsprämien für anormale Risiken fussen meist auf der Voraussetzung, dass eine multiplikative (in Prozenten der normalen Sterblichkeit bewertete) Übersterblichkeit vorliege. In den folgenden Ausführungen soll an die Berechnung der *Zuschlagsprämien* für *konstante* (nicht multiplikative) Übersterblichkeit (z. B. jährlich 10 $^0/_{00}$) und für *abnehmende Übersterblichkeit* (z. B. anfänglich 10 $^0/_{00}$, linear bis 0 abnehmend) herangetreten werden. Bei gewissen gefährdeten Berufen und bei einem Teil der anormalen Risiken (wir denken an durchgemachte Operationen und Krankheiten wie Tuberkulose) erscheint es als gegeben, mit konstanter oder mit abnehmender Übersterblichkeit zu rechnen. Es zeigt sich, dass die Berechnung nach verschiedenen Formeln erfolgen kann.

Der Übersterblichkeitszuschlag Z ergibt sich zunächst aus

$$Z = P^*_{x\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|}$$

oder aus

$$Z = \frac{\sum \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x} (q^*_{x+t} - q_{x+t})\, v\, (1 - V_{t+1})}{\mathrm{a}^*_{x\overline{n}|}},$$

wobei die auf die erhöhte Sterblichkeit bezüglichen Werte durch $*$ charakterisiert sind. Um die Berechnung spezieller Kommutationszahlen zu vermeiden, setzen wir — es handle sich um eine gemischte Versicherung —

$$Z = P^*_{x\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\mathrm{a}^*_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}},$$

betrachten $\mathrm{a}^*_{x\overline{n}|}$ als Funktion $f(\alpha)$ der additiven Sterblichkeitserhöhung α und bilden die erste und zweite Derivierte von $f(\alpha)$ nach α.

konstanter Sterblichkeitserhöhung gilt:

$$f(\alpha) = \sum_{t=0}^{n-1} (p_x - \alpha)(p_{x+1} - \alpha) \ldots (p_{x+t-1} - \alpha)\, v^t$$

$$f(0) = a_{\overline{xn}|}$$

$$f'(0) = -\varkappa \sum_{t=1}^{n-1} \left(t \cdot \frac{D_{x+t}}{D_x} \right) = -\varkappa \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\, N_{x+n}}{D_x}$$

$$f''(0) = \varkappa \lambda \sum_{t=2}^{n-1} t(t-1) \frac{D_{x+t-1}}{D_x}$$

ıd λ sind spezielle Mittelwerte der reziproken Erlebensfallwahr-
inlichkeiten

$$\frac{1}{p_x}, \frac{1}{p_{x+1}}, \ldots \frac{1}{p_{x+n-2}}.$$

st $\varkappa > 1$ und $\lambda > 1$.

st nun $$\overset{*}{a}_{\overline{xn}|} \sim a_{xn} + \alpha f'(0) + \frac{\alpha^2}{2} \cdot f''(0),$$

wir mit $a_{(1)}$ bezeichnen,

$$Z \sim Z_1 = \frac{1}{a_{(1)}} - \frac{1}{a_{\overline{xn}|}}.$$

$f''(0)$ nicht berechnen zu müssen, können wir

$$\overset{*}{a}_{\overline{xn}|} \sim a_{\overline{xn}|} - \alpha \cdot \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\, N_{x+n}}{D_x} = a_{(2)}$$

$$Z \sim Z_2 = \frac{1}{a_{(2)}} - \frac{1}{a_{\overline{xn}|}}$$

n, wobei Z_2 allerdings erheblich vom genauen Wert Z abweicht.

Eine weitere, interessante Lösung besteht darin, in

$$a_{\overline{xn}|} + \alpha f'(0) + \frac{\alpha^2}{2} f''(0) = a_{\overline{xn}|} + \alpha f'(0) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{f''(0)}{f'(0)} \right)$$

den Quotienten $\frac{f''(0)}{f'(0)}$ näherungsweise zu ermitteln. Hierfür nehmen wir an, dass die Kommutationszahlen D_{x+t} für $t = 1, \ldots n-1$ eine geometrische Reihe bilden: D_{x+t} sei $K \cdot (1-h)^t$, $\frac{f''(0)}{f'(0)} = g(h)$ werde als Funktion von h aufgefasst und $g(h) \sim g(0) + h \cdot g'(0)$ gesetzt. Die Rechnung ergibt:

$$g(h) \sim -\frac{\lambda(n-2)}{18}\left[12 - h(n+1)\right];$$

h ist als spezielles Mittel der Grössen

$$1 - \frac{D_{x+1}}{D_x},\ 1 - \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}},\ \ldots\ 1 - \frac{D_{x+n-1}}{D_{x+n-2}}$$

aufzufassen. Es gilt nun

$$a_{x\overline{n}|} + \alpha \cdot f'(0) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{2}\,\frac{f''(0)}{f'(0)}\right) \sim a_{x\overline{n}|} - \alpha \cdot \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\,N_{x+n}}{D_x} \cdot F$$

(was wir mit $a_{(3)}$ bezeichnen), wobei

$$F = \varkappa\left[1 - \alpha\,\lambda(n-2)\,\frac{12 - h(n+1)}{36}\right].$$

$$Z_3 = \frac{1}{a_{(3)}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}}.$$

Die für h, $\varkappa$ und λ verwendeten Zahlen beeinflussen den Prämiensatz nur wenig:

	Z_3		
	für $h = 0{,}04$	für $h = 0{,}05$	für $h = 0{,}06$
	‰	‰	‰
bei $\varkappa = \lambda = 1$	5,90	5,90	5,91
$\varkappa = \lambda = 1{,}01$	5,96	5,96	5,97
$\varkappa = \lambda = 1{,}02$	6,02	6,02	6,03

(Grundlagen: SM 1921/30 3 %, $x = 40$, $n = 20$, $Z = 5{,}97$ ‰).

Wir setzen $h = 0{,}05$, dann ist: $\underline{F = \varkappa\,[1 - \alpha\,\lambda\,c]}$, wobei c nur von der Versicherungsdauer abhängt und durch folgende Tabelle gegeben wird:

$n =$	10	15	20	25	30
$c =$	2,54	4,04	5,48	6,84	8,13

Es erscheint angemessen, $\varkappa = \lambda = 1{,}01$ (für vorgerückte Alter jedoch $\varkappa = \lambda = 1{,}02$) zu setzen. Für $x = 40$, $n = 20$, $\alpha = 10\,^0/_{00}$ ist dann $F = 1{,}01 \cdot (1 - 0{,}010 \cdot 1{,}01 \cdot 5{,}48) = 0{,}9541$, woraus sich $\mathsf{a}_{(3)} = 12{,}9761$ und $Z_3 = 5{,}96\,^0/_{00}$ ergibt.

Steht der «normale» Rentenbarwert $\mathsf{a}_{x\overline{n}|}$ nicht nur für den Zinsfuss i, sondern ausserdem für einen erhöhten Zinsfuss i' zur Verfügung, so empfiehlt sich eine andere, sehr bequeme Berechnungsweise [1]). Da $\mathsf{a}^*_{x\overline{n}|}$ näherungsweise gleich dem Rentenbarwert für den Zinsfuss $i' = i + 1{,}05\,\alpha$ und für die normale Sterblichkeit ist, so gilt

$$Z \sim Z_4 = \frac{1{,}05\,\alpha}{i' - i}\left(\frac{1}{\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}}\right),$$

wobei $\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}$ auf dem Zinsfuss i' und der normalen Sterblichkeit beruht. Der Faktor 1,05 rührt davon her, dass in

$$\frac{D^*_{x+t+1}}{D^*_{x+t}} = \frac{1 - q_{x+t} - \alpha}{1 + i} = \frac{1 - q_{x+t}}{1 + \left(i + \alpha \cdot \dfrac{1 + i}{1 - q_{x+t} - \alpha}\right)}$$

der veränderliche Quotient rechts unten bei den heutigen Verhältnissen näherungsweise durch 1,05 ersetzt werden kann.

Wie aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich ist, geben die Formeln Z_3 und Z_4 genügend genaue Werte.

Schliesslich haben wir die Lidstonesche Näherungsformel

$$P_{xy\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$$

und die Jecklinsche Näherungsformel

[1]) In diesem Zusammenhang sei auch auf die Abhandlungen von O. Gruder und M. Jacob (Assekuranzjahrbuch 52 und 55) verwiesen.

$$\left(\frac{1}{\ddot{e}_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{n}\right)(1 + 0{,}25\, i \cdot n) \quad ^{1})$$

auf unser Problem angewandt, wobei $P_{\overline{yn}|}$ und $\ddot{e}_{\overline{xn}|}$ für eine (während der ganzen Versicherungsdauer konstante) Ausscheidewahrscheinlichkeit $\alpha\,\varkappa$ zu rechnen war; dabei haben wir Tabellen von Zeitrentenbarwerten verwendet. Die numerischen Ergebnisse (die Extraprämie bei sinngemässer Anwendung der Lidstoneschen Formel ist nachstehend mit Z_5, die Extraprämie nach der Jecklinschen Formel mit Z_6 bezeichnet) dürften auch deshalb von Interesse sein, weil die genannten Formeln bisher nicht auf konstante und abnehmende Ausscheidewahrscheinlichkeiten angewandt wurden.

Tabelle von Prämienzuschlägen für konstante Übersterblichkeit α

(Grundlagen: SM 1921/30 3 %, die mit Z bezeichneten genauen Prämiensätze sind aus den speziellen (der erhöhten Sterblichkeit entsprechenden) Kommutationszahlen gerechnet)

x	n	α	Z	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
		‰	‰	‰	‰	‰	‰	‰	‰
30	10	5	2,48		2,50	2,49	2,50	2,47	2,47
	20	5	2,89		2,96	2,91	2,92	2,85	2,81
	30	5	3,22		3,33	3,22	3,23	3,14	3,07
40	10	10	5,05		5,14	5,05	5,05	4,98	4,98
	20	5	2,95		3,01	2,95	2,97	2,85	2,81
	20	10	5,97	5,96	6,28	5,96	5,97	5,78	5,71
	20	20	12.25		13,77	12,13	12,02	11,875	11,82
	30	10	6,67		7,18	6,60	6,65	6,39	6,29
						(6,67*)		(6,45*)	(6,35*)
50	10	5	2,57		2,56	2,55	2,55	2,47	2,47
						(2,58*)		(2,49*)	(2,49*)
	20	5	3,08		3,10	3,04	3,07	2,85	2,81
						(3,07*)		(2,88*)	(2,84*)

Bei der Berechnung der Zuschläge für *abnehmende Übersterblichkeit* können die vorstehenden Formeln mit Ausnahme von Z_4 nach

[1]) Jecklin, On Lidstone's approximative premium formula for endowment assurances on two joint lives (Institute of Actuaries Centenary Assembly 1948).

*) Die eingeklammerten Prämiensätze beruhen auf $\varkappa = \lambda = 1{,}02$, die übrigen Werte von Z_3, Z_5 und Z_6 auf $\varkappa = \lambda = 1{,}01$.

entsprechender Modifikation ebenfalls angewendet werden, wobei wir die gleiche Bezeichnung (eventuell mit Strich: $\bar{a}$, $\bar{Z}$ usw.) und Numerierung anwenden wie bei der konstanten Übersterblichkeit. Die anfängliche Übersterblichkeit sei α, so dass die Übersterblichkeit im t^{ten} Jahr gleich $a \cdot \frac{n-t+1}{n}$ ist. Es wird vorausgesetzt, dass der Übersterblichkeitszuschlag gleichbleibend und während der ganzen Versicherungsdauer zahlbar ist.

Wir fassen $\bar{a}^*_{x\overline{n}|}$ als Funktion $\bar{f}(\alpha)$ der anfänglichen Übersterblichkeit α auf und können $\bar{a}^*_{x\overline{n}|} \sim \bar{a}_{(1)} = a_{x\overline{n}|} + \alpha \cdot f'(0) + \frac{\alpha^2}{2} f''(0)$ setzen.

Von den sich ergebenden Hilfsformeln sei nur

$$f'(0) = -\varkappa \cdot \sum_{t=1}^{n-1} t\left(1 - \frac{t-1}{2n}\right) \frac{D_{x+t}}{D_x} \qquad \text{erwähnt.}$$

Mittels einer (in zweifacher Hinsicht durchgeführten) Umformung, welche der vorstehend beschriebenen Ableitung des Wertes $a_{(3)}$ entspricht, ergibt sich:

$$\bar{a}^*_{x\overline{n}|} \sim \bar{a}_{(3)} = a_{x\overline{n}|} - \alpha \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}}{D_x} \cdot F,$$

wobei

$$F = \varkappa \cdot \frac{n+1}{36n}[24 + h(n-2)] \cdot \left\{1 - \alpha \cdot \frac{\lambda(n-2)}{160n}[32n + 24 - h'(n+2)(2n+3)]\right\}$$

Für $h = h' = 0{,}05$ ist

$F = \varkappa(\bar{c} - \alpha\lambda\bar{\bar{c}})$, wobei $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$ nachstehend als Funktionen der Versicherungsdauer n aufgeführt sind:

$n =$	10	15	20	25	30
$\bar{c} =$	0,7456	0,7304	0,7263	0,7266	0,7291
$\bar{\bar{c}} =$	1,23	1,88	2,52	3,14	3,76

$\bar{Z}_3 = \frac{1}{\bar{a}_{(3)}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}}$ ist ein brauchbarer Näherungswert für die gesuchte Zuschlagsprämie.

Für $x = 40$, $n = 20$, $\varkappa = \lambda = 1{,}01$, $\alpha = 10\,^0/_{00}$ ist beispielsweise $F = 1{,}01\,(0{,}7263 - 0{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 2{,}52) = 0{,}708$, woraus $\bar{\bar{a}}_{(3)} = 13{,}2568$ und $\bar{\bar{Z}}_{(3)} = 4{,}33\,^0/_{00}$ folgt.

Die Formel kann auch für den Fall aufgestellt werden, dass die Übersterblichkeit sich nur über einen Teil der Versicherungsdauer erstreckt.

Bei der Berechnung des Ausdruckes F benützten wir — wie erwähnt — die Approximation $D_{x+t} \sim K(1-h)^t$. Wird an ihrer Stelle eine weniger grobe Annahme verwendet, so lässt sich für F ein modifizierter Ausdruck berechnen, welcher — im Gegensatz zu den hier aufgeführten Werten von F — vom Eintrittsalter x nicht unabhängig ist. Die Approximation wird dadurch noch etwas besser. Nachstehende numerische Werte $\bar{\bar{Z}}_3$ sind mit Hilfe der Approximation $\frac{D_{x+1}}{D_x} \sim 0{,}999^x$ berechnet.

Tabelle von Prämiensätzen für abnehmende Übersterblichkeit

(Grundlagen: SM 1921/30 3 %, anfängliche Übersterblichkeit $= \alpha$)

x	n	α	$\bar{\bar{Z}}$	$\bar{\bar{Z}}_2$	$\bar{\bar{Z}}_3$	$\bar{\bar{Z}}_3$	$\bar{\bar{Z}}_5$	Z_6
		$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$
30	10	10	3,70		3,74		3,68	3,64
	20	10	4,21		4,27	4,23	4,13	3,98
40	10	10	3,75		3,76		3,68	3,64
	20	10	4,32	4,44	4,33	4,32	4,13	3,98
	20	20	8,85		8,85		8,46	8,19
	30	10	4,90		4,83		4,55	4,30
					(4,88)		(4,60)	(4,34)
50	10	10	3,85		3,83		3,68	3,64
					(3,86)		(3,72)	(3,68)
	20	10	4,57		4,46	4,49	4,13	3,98
					(4,51)	(4,53)	(4,17)	(4,02)

Zusammenfassung

Der jährliche Prämienzuschlag für konstante (nicht multiplikative) oder für abnehmende Übersterblichkeit kann ohne Berechnung spezieller Kommutationszahlen nach der Formel

$$\frac{1}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|} - \alpha \cdot \dfrac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\,N_{x+n}}{D_x} \cdot F} - \frac{1}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}}$$

gerechnet werden, wobei für F je nach der Lage des Falles der eine oder andere der vorstehend umschriebenen Werte einzusetzen ist. Stehen die Rentenbarwerte der benützten Sterbetafel für zwei Zinsfüsse zur Verfügung, so kann der Zuschlag für konstante Übersterblichkeit mit der Formel

$$\frac{1{,}05\,\alpha}{i' - i}\left(\frac{1}{\mathrm{a}'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}}\right)$$

gewonnen werden. Diese Formeln liefern — obschon sie auf Näherungsmethoden beruhen — stark angenäherte Werte der Zuschlagsprämien. Approximative Werte lassen sich auch nach den Näherungsformeln von Lidstone und H. Jecklin berechnen.

Die Prämienzuschläge für konstante und für abnehmende Übersterblichkeit sind dem Promillesatz der Übersterblichkeit ungefähr proportional und hängen wenig ab von Rechnungszinsfuss, Alter und Sterbetafel.