Eine praktische Interpolationsformel

Von *H. Jecklin* und *H. Zimmermann*, Zürich

Herrn a. Direktor Dr. C. Wiesmann, Zürich,
zum 70. Geburtstag von den Verfassern gewidmet

Wenn auf einer Geraden vier Punkte gegeben sind, so versteht man unter einem Doppelverhältnis dieser vier Punkte den Doppelquotienten aus vier verschiedenen von diesen Punkten begrenzten Strecken. Bezeichnet man die durch die Punkte x_i und x_k begrenzte Strecke wie üblich mit $\overline{x_i\, x_k}$, so ist z. B. für die vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 ein Doppelverhältnis gegeben durch

$$\text{Doppelverhältnis} = \frac{\overline{x_1\, x_3}}{\overline{x_2\, x_3}} : \frac{\overline{x_1\, x_4}}{\overline{x_2\, x_4}},$$

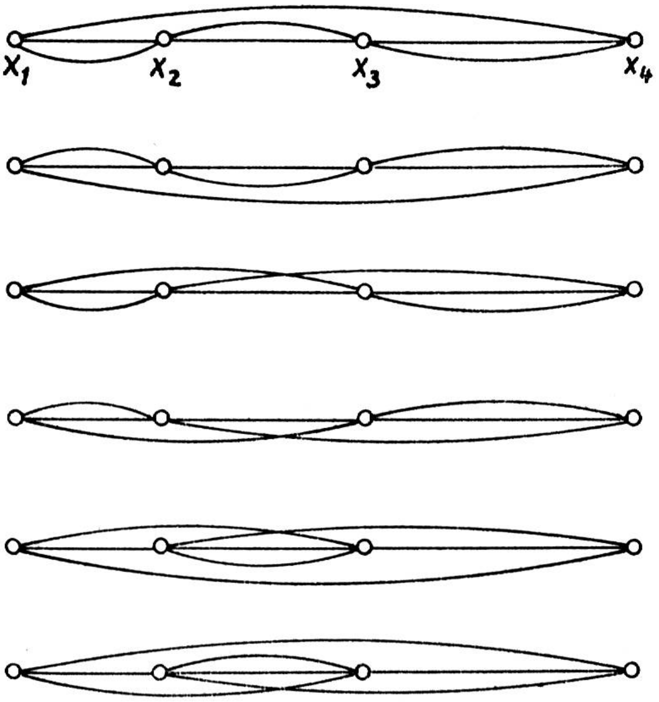
oder auch, wenn man unter x_i den Abstand von einem auf der Geraden beliebig zu fixierenden Koordinaten-Nullpunkt x_0 versteht:

$$\text{Doppelverhältnis} = \frac{(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_2)} : \frac{(x_4 - x_1)}{(x_4 - x_2)}.$$

Nachdem man vier Punkte auf $4! = 24$ Arten permutieren kann, sind 24 Doppelverhältnisse zwischen ihnen aufstellbar, von welchen aber nicht alle verschieden sind. In der Tat wird bei paarweiser Vertauschung der Punkte der Wert eines Doppelverhältnisses nicht geändert. Bei gegebener Ausgangsstellung (z. B. 1, 2, 3, 4) gibt es, die Ausgangsstellung mitgerechnet, vier paarweise Vertauschungen (1, 2, 3, 4; 2, 1, 4, 3; 3, 4, 1, 2; 4, 3, 2, 1). Es sind demnach von den 24 durch Permutation entstandenen Doppelverhältnissen immer je vier einander identisch, so dass de facto nur sechs verschiedene übrigbleiben. Auch diese sechs sind durch den Wert eines einzelnen von ihnen bestimmt, gemäss dem nachfolgend gegebenen Schema, so dass man kurz vom Doppelverhältnis zwischen vier Punkten sprechen kann, indem eines von den sechsen genommen wird. Nennen wir das Doppelverhältnis

$$\frac{\overline{x_2 x_3}}{\overline{x_1 x_2}} : \frac{\overline{x_3 x_4}}{\overline{x_1 x_4}} = \frac{\overline{x_2 x_3}}{\overline{x_1 x_2}} \cdot \frac{\overline{x_1 x_4}}{\overline{x_3 x_4}} = D,$$

so gilt



$$\frac{\overline{x_2 x_3}}{\overline{x_1 x_2}} \cdot \frac{\overline{x_1 x_4}}{\overline{x_3 x_4}} = D$$

$$\frac{\overline{x_1 x_2}}{\overline{x_2 x_3}} \cdot \frac{\overline{x_3 x_4}}{\overline{x_1 x_4}} = \frac{1}{D}$$

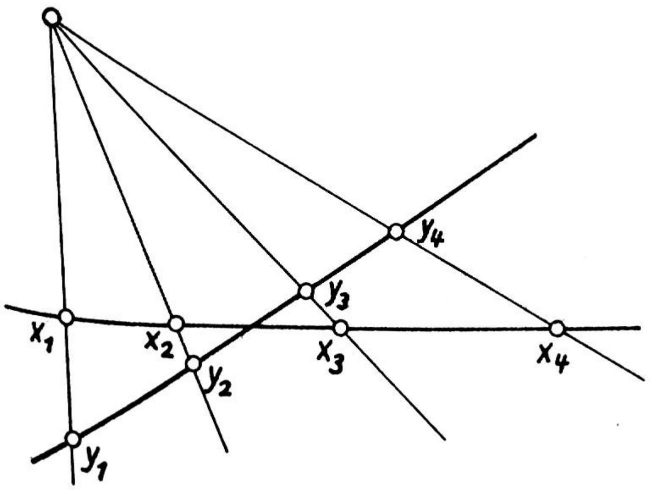
$$\frac{\overline{x_1 x_3}}{\overline{x_1 x_2}} \cdot \frac{\overline{x_2 x_4}}{\overline{x_3 x_4}} = D + 1$$

$$\frac{\overline{x_1 x_2}}{\overline{x_1 x_3}} \cdot \frac{\overline{x_3 x_4}}{\overline{x_2 x_4}} = \frac{1}{D + 1}$$

$$\frac{\overline{x_1 x_3}}{\overline{x_2 x_3}} \cdot \frac{\overline{x_2 x_4}}{\overline{x_1 x_4}} = \frac{D + 1}{D}$$

$$\frac{\overline{x_2 x_3}}{\overline{x_1 x_3}} \cdot \frac{\overline{x_1 x_4}}{\overline{x_2 x_4}} = \frac{D}{D + 1}$$

Nach einem bekannten Satz der projektiven Geometrie wird das Doppelverhältnis zwischen vier Punkten einer Geraden durch Projektion nicht geändert, oder mit andern Worten: Das Doppelverhältnis der Schnittpunkte von vier gegebenen Strahlen eines Büschels mit einer Geraden bleibt bei Lageänderung der Geraden invariant. Es ist demnach in der beigegebenen Figur.



$$\frac{\overline{x_1 x_3}}{\overline{x_2 x_3}} : \frac{\overline{x_1 x_4}}{\overline{x_2 x_4}} = \frac{\overline{y_1 y_3}}{\overline{y_2 y_3}} : \frac{\overline{y_1 y_4}}{\overline{y_2 y_4}}$$

oder

$$\frac{\overline{x_2 x_3} \cdot \overline{x_1 x_4}}{\overline{x_1 x_3} \cdot \overline{x_2 x_4}} = \frac{\overline{y_2 y_3} \cdot \overline{y_1 y_4}}{\overline{y_1 y_3} \cdot \overline{y_2 y_4}}$$

Es liegt nahe, die Punkte x_i als Abszissenpunkte, die Punkte y_i als Ordinatenpunkte einer zugehörigen Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu deuten. Wenn die x-Gerade und die y-Gerade der Figur parallel sind, dann ist die gefragte Kurve offenbar eine Gerade, wobei der Tangens des Neigungswinkels zur x-Achse gegeben ist durch

$$\frac{\overline{y_i\,y_k}}{\overline{x_i\,x_k}}.$$

Welcher Art ist jedoch die Kurve, wenn die beiden Geraden nicht parallel sind?

Bekanntlich ist ein Doppelverhältnis invariant gegenüber einer (ganzen oder gebrochenen) linearen Substitution. Sind also x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, vier Punkte auf der x-Achse, a, b, c, d vier Konstanten, und

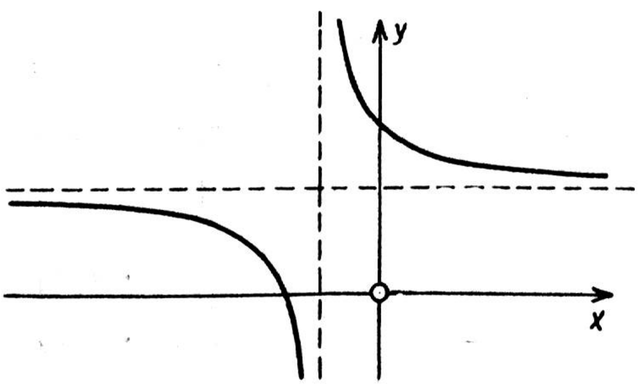
$$y_i = \frac{a\,x_i + b}{c\,x_i + d}, \text{ so ist } \frac{(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x_4)} = \frac{(y_1 - y_3)\,(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)\,(y_1 - y_4)}.$$

In Umkehrung gilt: Wenn eine Kurve $y = f(x)$ die Eigenschaft hat, dass das Doppelverhältnis von vier Abszissenpunkten stets gleich ist dem Doppelverhältnis der vier zugehörigen Ordinatenpunkte, so ist die Gleichung der Kurve von der Gestalt

$$y = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallelen Asymptoten.

Dabei ist auch die Gerade (bei $c = 0$) als Grenzfall mitenthalten.



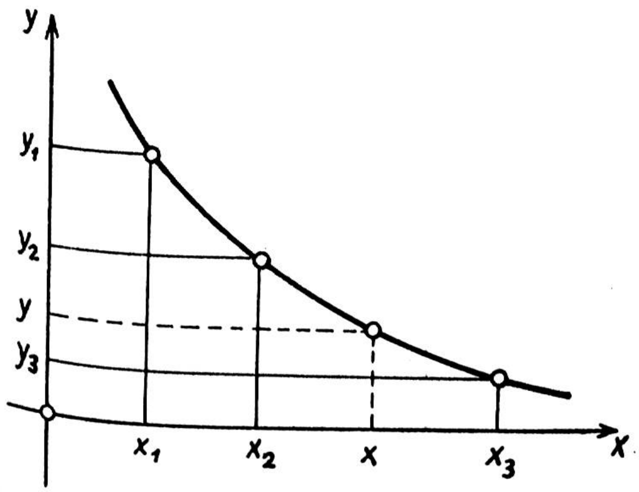
Eine Kurve zweiten Grades ist im allgemeinen Fall durch fünf Punkte eindeutig bestimmt. Im speziellen Fall der gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten ist die Kurve (zufolge der schon a priori bekannten Asymptotenrichtungen) durch drei Punkte festgelegt. Wenn also drei Punkte einer so gelagerten gleichseitigen Hyperbel bekannt sind, so kann man zu einer beliebig gewählten Abszisse x aus dem Doppelverhältnis

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x)} = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y)}$$

leicht den zugehörigen Funktionswert y, d. h. einen vierten Kurvenpunkt bestimmen, und in Fortsetzung des Verfahrens beliebig viele weitere Kurvenpunkte.

Es ist nun anzunehmen, dass irgendeine monoton steigende oder fallende Funktion für ein nicht zu grosses Intervall sich durch ein Kurvenstück einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten genähert ersetzen lassen wird. Die Güte der Anpassungsmöglichkeit lässt sich sofort kontrollieren: sie ist um so vollkommener, je besser das Doppelverhältnis von vier Abszissen x_i mit jenem der vier zugehörigen Ordinaten y_i übereinstimmt. Am einfachsten macht man diese Probe mit vier äquidistanten Abszissenpunkten.

Aus der vorausgesetzten Möglichkeit einer genäherten Ersetzung eines Kurvenstückes einer monotonen Funktion durch ein Hyperbelstück genannter Art ergibt sich nun sofort eine einfache Interpolationsmethode, welche sich auf drei bekannte Funktionswerte stützt. Es seien die drei bekannten Funktionswerte mit y_1, y_2, y_3, die zugehörigen Abszissen mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet, und es sei der zur Abszisse x, wobei $x_1 < x < x_3$, gehörige Funktionswert y zu interpolieren. Die Reihenfolge der Funktions- (und zugehörigen Abszissen-) Werte ist unter Beobachtung richtiger Vorzeichen natürlich beliebig vertauschbar. Bei Wahl der folgenden abkürzenden Bezeichnungen



$$(x_3 - x_1) = d_1, \quad (x_2 - x_1) = d_2$$

$$(x_3 - x) = d_3, \quad (x - x_2) = d_4$$

$$(y_3 - y_1) = \Delta_1, \quad (y_2 - y_1) = \Delta_2$$

muss nach Voraussetzung die Gleichsetzung von Abszissen- und Ordinaten-Doppelverhältnis zumindest näherungsweise erfüllt sein:

$$\frac{d_1 d_4}{d_2 d_3} = \frac{\Delta_1 (y - y_2)}{\Delta_2 (y_3 - y)}$$

woraus sich ergibt

$$y = \frac{y_2 d_2 d_3 \Delta_1 + y_3 d_1 d_4 \Delta_2}{d_2 d_3 \Delta_1 + d_1 d_4 \Delta_2}.$$

Diese Interpolationsformel ist deshalb besonders praktisch, weil sie in *einem* Schritt eine Interpolation 2. Ordnung vermittelt. Sie kann auch interpretiert werden als gewogene arithmetische Mittelbildung zwischen y_2 und y_3, wobei die interpolatorische Verschiebung von y zwischen y_2 und y_3 nicht auf einer Geraden, sondern auf einer Hyperbel erfolgt.

Schreiben wir die Doppelverhältnisgleichung in der Form

$$\frac{d_1 d_4 \Delta_2}{d_2 d_3 \Delta_1} = \frac{y - y_2}{y_3 - y},$$

so geben Zähler und Nenner der linken Seite die Gewichte, mit welchen die rechtsstehenden, zu mittelnden Grössen y_2 und y_3 kreuzweise zu versehen sind. Man sieht auch, dass die lineare Interpolation als Spezialfall enthalten ist. Denn wenn die zu x_1, x_2, x_3 zugehörigen Funktionswerte y_1, y_2, y_3 auf einer Geraden liegen, ist

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

d. h. $\Delta_1 d_2 = \Delta_2 d_1$, und die Interpolationsformel reduziert sich auf

$$y = \frac{y_2 d_3 + y_3 d_4}{d_3 + d_4}.$$

Setzen wir einen der drei gegebenen Funktionswerte, z. B. den Punkt mit den Koordinaten x_3, y_3 als Koordinaten-Nullpunkt, d. h. als Bezugspunkt der Interpolation, so ergibt sich wegen $x_3 = y_3 = 0$ die Vereinfachung $d_1 = x_1$, $d_3 = x$, $\Delta_1 = y_1$, und die Interpolationsformel reduziert sich auf

$$y = \frac{y_2 \cdot x \cdot d_2 \cdot y_1}{x \cdot d_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot d_4 \cdot \Delta_2}$$

wobei $d_2 = x_2 - x_1$, $d_4 = x - x_2$, $\Delta_2 = y_2 - y_1$, was wir auch in der einfachen Gestalt darstellen können

$$y = \frac{a\,x}{b\,x + c},$$

mit $a = y_1 \cdot y_2 \cdot d_2$, $b = y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1$, $c = x_1 \cdot x_2 \cdot \Delta_2$. Wenn unter Bezugnahme auf eine gegebene Basis zahlreiche Interpolationen vorzunehmen sind, bedient man sich mit Vorteil der letztgenannten Form der Interpolationsformel.

Uns interessiert hier insbesondere, ob die entwickelte Interpolationsmethode sich für finanz- und versicherungstechnische Funktionen eignet. Um dies näher beurteilen zu können, nehmen wir vier äquidistante Argumentwerte x_i, so dass also $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = k$, und das Doppelverhältnis

$$\frac{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)} = \frac{k \cdot 3k}{k \cdot k} = 3$$

ist, und bilden bei verschiedenen Funktionen das entsprechende Doppelverhältnis

$$\frac{(y_4 - y_1)(y_3 - y_2)}{(y_2 - y_1)(y_4 - y_3)}.$$

In den im Anhang beigegebenen Tabellen ist eine Anzahl von Resultaten aufgeführt für die Funktionen v^n, $a_{\overline{n|}}$, $a_{x\overline{n|}}$, $P_{x\overline{n|}}$, a_x, P_x, wobei als Argument i, n und x in Betracht gezogen werden. Wie daraus hervorgeht, hat das Funktions-Doppelverhältnis für v^n und $a_{\overline{n|}}$ durchweg einen nahe bei 3 gelegenen Wert. Es ist darum anzunehmen, dass die Interpolationsformel hier sowohl bei Interpolation nach dem

Zinsfuss i als nach der Dauer n gute Resultate liefert. Bei den untersuchten versicherungstechnischen Funktionen ist der Wert des Doppelverhältnisses im allgemeinen auch nahe dem Wert 3. Eine Ausnahme macht für $a_{x\overline{n}|}$ und $P_{x\overline{n}|}$ bei festem n das nach dem Alter x als Argument gewonnene Funktions-Doppelverhältnis. Trotzdem gibt unsere Formel auch bei Interpolation der temporären Versicherungswerte $a_{x\overline{n}|}$ und $P_{x\overline{n}|}$ gleicher Dauer nach dem Alter durchaus befriedigende Resultate. Wir geben im folgenden einige numerische Beispiele für die Interpolation mit Hilfe unserer Formel

$$y = \frac{y_2 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \Delta_1 + y_3 \cdot d_1 \cdot d_4 \cdot \Delta_2}{d_2 \cdot d_3 \cdot \Delta_1 + d_1 \cdot d_4 \cdot \Delta_2},$$

mit

$$d_1 = (x_3 - x_1),\quad d_2 = (x_2 - x_1),$$
$$d_3 = (x_3 - x),\quad d_4 = (x - x_2),$$
$$\Delta_1 = (y_3 - y_1),\quad \Delta_2 = (y_2 - y_1),$$

wobei wir nur das erste Beispiel detailliert durchführen. Die verwendete Sterbetafel ist durchwegs S. M. 1921/30.

1. Interpolation nach dem Zinsfuss:

a) Gegeben v^{20} zu 3 % $= 0{,}55367575$
$3\frac{1}{2}$ % $= 0{,}50256588$
4 % $= 0{,}45638695$ Gesucht v^{20} zu $3^5/_8$ %

wobei im vorliegenden Fall

$y_2 = 0{,}50256588$	$y_3 = 0{,}45638695$
$d_2 = 0{,}5$	$d_1 = 1$
$d_3 = 0{,}375$	$d_4 = 0{,}125$
$\Delta_1 = 0{,}09728880$	$\Delta_2 = 0{,}05110987$

also erhält man

$$\underset{(3^5/_8\,\%)}{v^{20}} \sim \frac{0{,}50256588 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}09728880 + 0{,}45638695 \cdot 1 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}05110987}{0{,}5 \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}09728880 + 1 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}05110987} = 0{,}49058779$$

(Genauer Wert: 0,49057920; Fehler + 0,02 ‰).

Die Formel liefert für Interpolation von v^n und $a_{\overline{n|}}$ nach i auch noch sehr gute Resultate wenn die Argumentendifferenz grösser genommen und insbesondere $i_1 = 0$ gesetzt wird.

Sei z. B. gegeben v^{20} zu 0 % = 1,00000000
3 % = 0,55367575
4 % = 0,50256588 Gesucht v^{20} zu $3^1/_8$ %

$$\underset{(3^1/_8\,\%)}{v^{20}} \sim \frac{0{,}55367575 \cdot 3 \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}49743412 + 0{,}50256588 \cdot 3{,}5 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}44632425}{3 \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}49743412 + 3{,}5 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}44632425} = 0{,}54045503$$

(Genauer Wert: 0,54040675; Fehler + 0,09 ‰).

Oder sei gegeben $a_{\overline{20|}}$ zu 0 % = 20,00000
3 % = 15,32380
4 % = 14,13394 Gesucht $a_{\overline{20|}}$ zu 3½ %

$$\underset{(3^1/_2\,\%)}{a_{\overline{20|}}} \sim \frac{15{,}32380 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot 5{,}86606 + 14{,}13394 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}67620}{3 \cdot 0{,}5 \cdot 5{,}86606 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}67620} = 14{,}71073$$

(Genauer Wert: 14,70984; Fehler + 0,06 ‰).

b) Gegeben $a_{\overline{37\,18|}}$ zu 4½ % = 12,0133
3½ % = 12,8756
2½ % = 13,8430 Gesucht $a_{\overline{37\,18|}}$ zu 3 %

$$\underset{(3\,\%)}{a_{\overline{37\,18|}}} \sim \frac{12{,}8756 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8297 + 13{,}8430 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8623}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8297 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8623} = 13{,}3450$$

(Genauer Wert: 13,3455; Fehler — 0,04 ‰).

$$P_{\overline{xn|}} = \frac{1}{a_{\overline{xn|}}} - d$$

mit approx. $a_{\overline{xn|}}$: 45,808 ‰
mit genauem $a_{\overline{xn|}}$: 45,806 ‰ (Fehler + 0,04 ‰).

c) Gegeben $\mathfrak{a}_{35}$ zu 4 % $= 17{,}8663$
$3\frac{1}{2}$ % $= 19{,}0580$
3 % $= 20{,}3920$ Gesucht $\mathfrak{a}_{35}$ zu $2^1/_2$ %
(Extrapolation)

$$\underset{(2^1/_2\,\%)}{\mathfrak{a}_{35}} \sim \frac{-19{,}0580 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}5257 + 20{,}3920 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1{,}1917}{-0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}5257 + 1 \cdot 1 \cdot 1{,}1917} = 21{,}8954$$

(Genauer Wert: 21,8924; Fehler + 0,14 ‰).

$$P_x = \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d$$

mit approx. $\mathfrak{a}_x$: 21,282 ‰
mit genauem $\mathfrak{a}_x$: 21,288 ‰ (Fehler — 0,28 ‰).

2. Interpolation nach der Dauer:

a) Gegeben bei 3 % $\mathfrak{a}_{\overline{15}|} = 12{,}29607$
$\mathfrak{a}_{\overline{20}|} = 15{,}32380$
$\mathfrak{a}_{\overline{25}|} = 17{,}93554$ Gesucht $\mathfrak{a}_{\overline{22}|}$

$$\mathfrak{a}_{\overline{22}|} \sim \frac{15{,}32380 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5{,}63947 + 17{,}93554 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3{,}02773}{5 \cdot 3 \cdot 5{,}63947 + 10 \cdot 2 \cdot 3{,}02773} = 16{,}41341$$

(Genauer Wert: 16,41502; Fehler — 0,10 ‰).

b) Gegeben bei $3^1/_2$ % $\mathfrak{a}_{30\overline{10}|} = 8{,}4467$
$\mathfrak{a}_{30\overline{15}|} = 11{,}5594$
$\mathfrak{a}_{30\overline{20}|} = 14{,}0694$ Gesucht $\mathfrak{a}_{30\overline{18}|}$

$$\mathfrak{a}_{30\overline{18}|} \sim \frac{11{,}5594 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5{,}6227 + 14{,}0694 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 3{,}1127}{5 \cdot 2 \cdot 5{,}6227 + 10 \cdot 3 \cdot 3{,}1127} = 13{,}1261$$

(Genauer Wert: 13,1325; Fehler — 0,49 ‰).

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} - d$$

mit approx. $\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}$: 42,368 ‰
mit genauem $\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}$: 42,331 ‰ (Fehler + 0,87 ‰).

3. Interpolation nach dem Alter:

a) Gegeben bei $3^1/_2\,\%$ $P_{30\overline{20}|} = 37{,}260\,‰$

$P_{35\overline{20}|} = 38{,}323\,‰$

$P_{40\overline{20}|} = 40{,}107\,‰$ Gesucht $P_{38\overline{20}|}$

$$P_{38\overline{20}|} \sim \frac{38{,}323 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2{,}847 + 40{,}107 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1{,}063}{5 \cdot 2 \cdot 2{,}847 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}063} = 39{,}266\,‰$$

(Genauer Wert: 39,295 ‰; Fehler — 0,74 ‰).

b) Gegeben bei $3^1/_2\,\%$ $P_{35\overline{25}|} = 29{,}827\,‰$ Gleiche Endalter

$P_{40\overline{20}|} = 40{,}107\,‰$ $(x + n = 60)$

$P_{45\overline{15}|} = 57{,}158\,‰$ Gesucht $P_{42\overline{18}|}$

$$P_{42\overline{18}|} \sim \frac{40{,}107 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 27{,}331 + 57{,}158 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10{,}280}{5 \cdot 3 \cdot 27{,}331 + 10 \cdot 2 \cdot 10{,}280} = 45{,}802\,‰$$

(Genauer Wert: 45,815 ‰; Fehler — 0,28 ‰).

c) Gegeben bei $3^1/_2\,\%$ $\mathfrak{a}_{35} = 19{,}0580$

$\mathfrak{a}_{40} = 17{,}6099$

$\mathfrak{a}_{45} = 16{,}0250$ Gesucht $\mathfrak{a}_{39}$

$$\mathfrak{a}_{39} \sim \frac{-17{,}6099 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3{,}0330 + 16{,}0250 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1{,}5849}{-5 \cdot 6 \cdot 3{,}0330 + 10 \cdot 1 \cdot 1{,}4481} = 17{,}9099$$

(Genauer Wert: 17,9120; Fehler — 0,12 ‰).

$$P_x = \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d$$

mit approx. $\mathfrak{a}_x$: 22,019 ‰

mit genauem $\mathfrak{a}_x$: 22,013 ‰ (Fehler + 0,27 ‰).

Wenn zu dem zu interpolierenden Werte y links- und rechtsseitig je zwei bekannte Funktionswerte vorhanden sind, so kann y einmal aus y_1, y_2, y_3, sodann aus y_2, y_3, y_4 interpoliert werden, und durch arithmetische Mittelung aus den beiden Resultaten erreicht man unter Umständen eine noch wesentlich verbesserte Interpolation. Wenn wir in dem vorhin unter 3 a) genannten Beispiel zu den drei Werten $P_{30\overline{20}|}$, $P_{35\overline{20}|}$, $P_{40\overline{20}|}$ noch den Wert $P_{45\overline{20}|} = 42{,}861\ ^0/_{00}$ gegeben haben, so können wir aus den drei letzteren Werten interpolieren

$$P_{38\overline{20}|} \sim \frac{40{,}107 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4{,}538 - 42{,}861 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1{,}784}{5 \cdot 7 \cdot 4{,}538 - 10 \cdot 2 \cdot 1{,}784} = 39{,}309\ ^0/_{00}.$$

Das arithmetische Mittel aus den beiden Interpolationen ergibt

$$P_{38\overline{20}|} \sim \frac{1}{2}\,(39{,}266 + 39{,}309)\ ^0/_{00} = 39{,}288\ ^0/_{00}.$$

Der Fehler gegenüber dem genauen Wert $39{,}295\ ^0/_{00}$ ist nur noch $-0{,}18\ ^0/_{00}$.

Das Ergebnis der Interpolation wird ganz allgemein um so unbefriedigender ausfallen, je weiter die Argumente der drei Funktionswerte, auf welche die Interpolation sich stützt, auseinander liegen. Man sieht dies deutlich, wenn man für vier Funktionswerte y_i äquidistanter Argumente das Doppelverhältnis bei verschiedener Argumentendistanz berechnet.

Sei z. B. $y = a_{\overline{n}|}$, dann ist das Doppelverhältnis bei $3^1/_2\ ^0/_0$ und für

Distanz 1: $(a_{\overline{23}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{22}|} - a_{\overline{21}|}) : (a_{\overline{21}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{23}|} - a_{\overline{22}|}) = 3{,}001$

Distanz 2: $(a_{\overline{26}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{24}|} - a_{\overline{22}|}) : (a_{\overline{22}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{26}|} - a_{\overline{24}|}) = 3{,}005$

Distanz 5: $(a_{\overline{35}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{30}|} - a_{\overline{25}|}) : (a_{\overline{25}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{35}|} - a_{\overline{30}|}) = 3{,}030$

Distanz 10: $(a_{\overline{50}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{40}|} - a_{\overline{30}|}) : (a_{\overline{30}|} - a_{\overline{20}|}) \cdot (a_{\overline{50}|} - a_{\overline{40}|}) = 3{,}120$

Dieses Beispiel gibt schliesslich noch Anlass zu einer interessanten Bemerkung. Wie bereits gesagt, ist das Doppelverhältnis invariant gegenüber einer (ganzen oder gebrochenen) linearen Substitution. Es muss zufolgedessen unsere Interpolationsformel für Funktionen, die sich linear durch einander ausdrücken lassen, Resultate von gleicher Güte liefern.

Nachdem beispielsweise

$$\mathfrak{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d} v^n$$

$$\mathfrak{a}_{\overline{m}|} = \frac{1}{d} - \frac{v^k}{d} v^n, \quad \text{wenn } m = n + k,$$

ist infolgedessen

$$\frac{(\mathfrak{a}_{\overline{n+k_3}|} - \mathfrak{a}_{\overline{n}|}) \cdot (\mathfrak{a}_{\overline{n+k_2}|} - \mathfrak{a}_{\overline{n+k_1}|})}{(\mathfrak{a}_{\overline{n+k_3}|} - \mathfrak{a}_{\overline{n+k_2}|}) \cdot (\mathfrak{a}_{\overline{n+k_1}|} - \mathfrak{a}_{\overline{n}|})} = \frac{(1 - v^{k_3}) \cdot (v^{k_1} - v^{k_2})}{(v^{k_2} - v^{k_3}) \cdot (1 - v^{k_1})}.$$

Es ist also nicht nur die Interpolation nach der Dauer n für die Funktion

$$v^n, \; \mathfrak{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}, \; P_{\overline{n}|} = \frac{1}{\mathfrak{a}_{\overline{n}|}} - d$$

von gleicher Güte, sie ist auch unabhängig von der absoluten Grösse der Dauer n und allein beeinflusst von der Grösse der Argumentendistanz. Ganz analog muss sich die besprochene Methode für Interpolation nach x und n von Funktionen, die sich linear durch $\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}$ ausdrücken lassen (wie $A_{x\overline{n}|}$, $P_{x\overline{n}|}$) gleich gut eignen wie für $\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}$ selbst. Bei Interpolation nach dem Zinsfuss gilt dies jedoch nicht, denn dann ist der Diskontfaktor d keine Konstante, sondern selbst eine Funktion der Variablen i, nach welcher interpoliert wird.

Da die Umkehrung einer linear-gebrochenen Funktion wieder eine Funktion dieser Art ergibt, eignet sich unsere Methode gleichermassen zur Interpolation von Argumentenwerten auf Basis bekannter Funktionswerte. Als besonders wichtige Anwendung möchten wir nur die Bestimmung des Zinsfusses zu finanztechnischen Funktionen nennen und geben zwei bezügliche Beispiele:

1. Gegeben $v^{23} = 0{,}334614$. Zinsfuss?

Man nimmt aus einem Tafelwerk drei dem gegebenen möglichst benachbarte Werte v^{23} bekannten Zinsfusses, z. B.

$$\begin{aligned} &0{,}308242 \text{ für } i = 5^1/_4\,\% \\ &0{,}325571 \text{ für } i = 5\,\% \\ &0{,}343920 \text{ für } i = 4^3/_4\,\%. \end{aligned}$$

Das Prozedere der Interpolation ist ganz analog den vorgängig behandelten Beispielen, nur dass jetzt Funktionswerte die Rolle von Argumenten spielen. Man erhält

$$i \sim \frac{5 \cdot 0{,}017329 \cdot 0{,}009306 \cdot 0{,}5 + 4{,}75 \cdot 0{,}035678 \cdot 0{,}009043 \cdot 0{,}25}{0{,}017329 \cdot 0{,}009306 \cdot 0{,}5 + 0{,}035678 \cdot 0{,}009043 \cdot 0{,}25} = 4{,}874979\ldots\,\%$$

(Genauer Wert: 4,875 %; Fehler — 0,004 ‰).

2. Gegeben $a_{\overline{20|}} = 14{,}560135$. Zinsfuss?

Aus einem Tafelwerk entnehmen wir als Interpolationsbasis

15,011875 für $i = 3^1/_4\,\%$
14,709837 für $i = 3^1/_2\,\%$
14,417312 für $i = 3^3/_4\,\%$ und erhalten

$$i \sim \frac{3{,}5 \cdot 0{,}302038 \cdot 0{,}142823 \cdot 0{,}5 + 3{,}75 \cdot 0{,}594563 \cdot 0{,}149702 \cdot 0{,}25}{0{,}302038 \cdot 0{,}142823 \cdot 0{,}5 + 0{,}594563 \cdot 0{,}149702 \cdot 0{,}25} = 3{,}626948\ldots\,\%$$

(Genauer Wert: 3,626943; Fehler + 0,001 ‰).

Wie ersichtlich, liefert die Methode für diesen Anwendungsbereich aussergewöhnlich gute Resultate.

Wir haben uns in den Anwendungsbeispielen absichtlich auf die Interpolation finanz- und versicherungstechnischer Funktionen beschränkt. Die beschriebene Interpolationsmethode kann aber selbstverständlich in viel weiterem Umfange nützliche Dienste leisten. Ein einziger Hinweis muss hier genügen: Sei gegeben die algebraische Gleichung 3. Grades

$$x^3 + x - 20 = 0.$$

Nach der Zeichenregel von Descartes muss diese Gleichung eine positive Wurzel haben. Es ist für

$$x = 2, \quad f(x) = -10$$
$$x = 3, \quad f(x) = +10,$$

also liegt die Wurzel zwischen 2 und 3, und zwar vermutlich ungefähr in der Mitte. Nach «Regula falsi» erhält man, ausgehend von den

Werten 2,5 und 2,6 nach fünffach iterierter linearer Interpolation als Wurzelwert $x = 2{,}591704\ldots$. Mit unserer Interpolationsformel erhalten wir, bei Interpolation nach dem Funktionswert, ausgehend von den drei Positionen

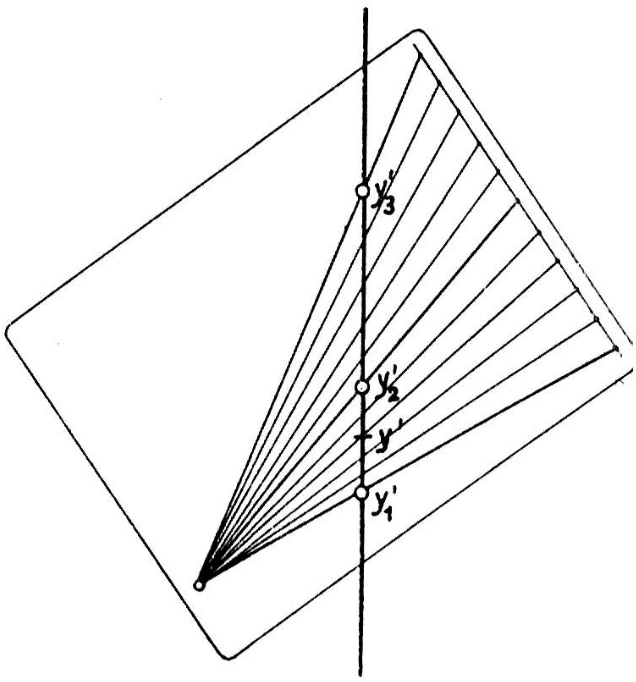
$$x = 2{,}7\,, \quad f(x) = +2{,}383$$
$$x = 2{,}6\,, \quad f(x) = +0{,}176$$
$$x = 2{,}5\,, \quad f(x) = -1{,}875$$

in einem Schritt als den $f(x) = 0$ zugehörigen Argumentwert

$$x \sim \frac{2{,}6 \cdot 2{,}207 \cdot 1{,}875 \cdot 0{,}2 + 2{,}5 \cdot 4{,}258 \cdot 0{,}176 \cdot 0{,}1}{2{,}207 \cdot 1{,}875 \cdot 0{,}2 + 4{,}258 \cdot 0{,}176 \cdot 0{,}1} = 2{,}591697\ldots$$

(Fehler — 0,003 $^0/_{00}$).

Abschliessend sei noch darauf hingewiesen, dass die hier besprochene Interpolationsmethode sich auch in einfachem graphischen Verfahren anwenden lässt. Es wird dies durch die eingangs gegebene projektive Begründung der Methode direkt nahegelegt. Im Gegensatz zur besprochenen analytischen Methode ist die graphische Methode in der Literatur bereits erwähnt (z. B. Lacmann, Otto: Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Berlin, Jul. Springer 1923), praktisch findet sie unseres Wissens, jedoch sehr zu Unrecht, wenig Verwendung.



Als Hilfsmittel dient ein auf Pauspapier gezeichnetes Strahlenbüschel, welches entsteht, wenn auf einer Geraden liegende Punkte, die unter sich gleiche Abstände haben, mit einem Punkt ausserhalb der Geraden verbunden werden.

Die zu interpolierenden Werte y_1, y_2, y_3 trägt man auf einer Geraden als y_1', y_2', y_3' in einem geeigneten Maßstab — am besten auf Millimeter- oder auch gewöhnliches kariertes Papier — ab. Sodann legt man das Strahlenbüschel darauf und verschiebt es so lange, bis diejenigen

Strahlen, welche die für die Interpolation notwendige Anzahl Zwischenstrahlen einschliessen, die Punkte y_1', y_2', y_3' genau decken. In diesem Moment sind an den Schnittpunkten der Zwischenstrahlen mit der kotierten Geraden die gewünschten interpolierten Werte y' direkt ablesbar.

Das graphische Verfahren erlaubt eine sehr rasche Ermittlung von Interpolationen, wobei das Resultat naturgemäss von wesentlich geringerer Genauigkeit ist als bei der formelmässigen Auswertung.

Anhang

1. Beurteilung der Interpolation von Versicherungswerten gleicher Dauer und gleichen Eintrittsalters nach dem Zinsfuss i

$$i_1 = 3\,\%, \quad i_2 = 3\tfrac{1}{2}\,\%, \quad i_3 = 4\,\%, \quad i_4 = 4\tfrac{1}{2}\,\%.$$

Argumenten-Doppelverhältnis $\dfrac{(i_4 - i_1)\cdot(i_3 - i_2)}{(i_4 - i_3)\cdot(i_2 - i_1)} = 3.$

Die Tabelle gibt den Wert des zugehörigen Funktions-Doppelverhältnisses

$$\frac{(f(i_4) - f(i_1))\cdot(f(i_3) - f(i_2))}{(f(i_4) - f(i_3))\cdot(f(i_2) - f(i_1))}$$

n \ $f(i)$	v^n	$a_{\overline{n}\vert}$	$a_{35\overline{n}\vert}$	$P_{35\overline{n}\vert}$	$a_{25\overline{n}\vert}$	$a_{45\overline{n}\vert}$
10	3,002	3,001	3,008	2,999	3,003	3,006
15	3,005	3,001	3,006	2,998	3,002	3,003
20	3,009	3,002	3,005	3,003	3,003	3,005
25	3,014	3,004	3,005	3,002	3,004	3,005

x \ $f(i)$	a_x	P_x	$a_{x\overline{10}\vert}$	$P_{x\overline{10}\vert}$	$a_{x\overline{20}\vert}$	$P_{x\overline{20}\vert}$
30	3,007	3,014	3,004	2,998	3,004	3,001
35	3,007	3,009	3,008	2,995	3,005	3,003
40	3,005	3,011	3,002	3,000	3,002	3,004
45	3,005	3,002	3,006	2,997	3,005	3,002

2. Beurteilung der Interpolation von Versicherungswerten gleichen Eintrittsalters und gleichen technischen Zinsfusses nach der Dauer n

$$n_1 = 10, \quad n_2 = 15, \quad n_3 = 20, \quad n_4 = 25.$$

Argumenten-Doppelverhältnis $\dfrac{(n_4 - n_1) \cdot (n_3 - n_2)}{(n_4 - n_3) \cdot (n_2 - n_1)} = 3.$

Die Tabelle gibt den Wert des zugehörigen Funktions-Doppelverhältnisses

$$\frac{(f(n_4) - f(n_1)) \cdot (f(n_3) - f(n_2))}{(f(n_4) - f(n_3)) \cdot (f(n_2) - f(n_1))}$$

i \ $f(n)$	v^n	$a_{\overline{n}\rceil}$	$a_{35\overline{n}\rceil}$	$P_{35\overline{n}\rceil}$	$a_{25\overline{n}\rceil}$	$a_{45\overline{n}\rceil}$
3 %	3,022	3,022	3,110	3,110	3,061	3,240
3½ %	3,030	3,030	3,121	3,122	3,069	3,257
4 %	3,039	3,039	3,134	3,135	3,079	3,274
4½ %	3,049	3,049	3,148	3,148	3,093	3,293

x \ $f(n)$	$a_{x\overline{n}\rceil}$ (3½ %)	$P_{x\overline{n}\rceil}$ (3½ %)	$a_{x\overline{n}\rceil}$ (4½ %)	$a_{x\overline{n}\rceil}$ (2½ %)
30	3,091	3,092	3,116	3,071
35	3,121	3,122	3,148	3,099
40	3,169	3,170	3,200	3,142
45	3,257	3,257	3,293	3,223

3. Beurteilung der Interpolation von Versicherungswerten gleicher Dauer und gleichen technischen Zinsfusses nach dem Alter x

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 35, \quad x_3 = 40, \quad x_4 = 45.$$

Argumenten-Doppelverhältnis $\dfrac{(x_4 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}{(x_4 - x_3) \cdot (x_2 - x_1)} = 3$.

Die Tabelle gibt den Wert des zugehörigen Funktions-Doppelverhältnisses

$$\frac{(f(x_4) - f(x_1)) \cdot (f(x_3) - f(x_2))}{(f(x_4) - f(x_3)) \cdot (f(x_2) - f(x_1))}$$

i \ $f(x)$	a_x	P_x	$a_{x\overline{10}\rvert}$	$P_{x\overline{10}\rvert}$	$a_{x\overline{20}\rvert}$	$P_{x\overline{20}\rvert}$
3%	3,075	3,075	3,633	3,634	3,398	3,399
3½ %	3,086	3,086	3,695	3,693	3,415	3,413
4 %	3,094	3,094	3,686	3,689	3,414	3,416
4½ %	3,102	3,102	3,669	3,668	3,414	3,411

n \ $f(x)$	$a_{x\overline{n}\rvert}$ (3½ %)	$P_{x\overline{n}\rvert}$ (3½ %)	$a_{x\overline{n}\rvert}$ (4½ %)	$a_{x\overline{n}\rvert}$ (2½ %)
10	3,695	3,693	3,669	3,625
15	3,544	3,546	3,531	3,485
20	3,415	3,413	3,414	3,399
25	3,329	3,330	3,331	3,316

4. Beurteilung der Interpolation von Versicherungswerten gleichen Endalters und gleichen technischen Zinsfusses nach dem Eintrittsalter und der Dauer

$$n_1 = 10, \quad n_2 = 15, \quad n_3 = 20, \quad n_4 = 25.$$

Argumenten-Doppelverhältnis $\dfrac{(n_4 - n_1) \cdot (n_3 - n_2)}{(n_4 - n_3) \cdot (n_2 - n_1)} = 3.$

Die Tabelle gibt den Wert des zugehörigen Funktions-Doppelverhältnisses

$$\frac{(f(n_4) - f(n_1)) \cdot (f(n_3) - f(n_2))}{(f(n_4) - f(n_3)) \cdot (f(n_2) - f(n_1))}$$

i \ $f(n)$	$x = 65 - n$		$x = 55 - n$		$x = 45 - n$	
	$a_{\overline{xn}\|}$	$P_{\overline{xn}\|}$	$a_{\overline{xn}\|}$	$P_{\overline{xn}\|}$	$a_{\overline{xn}\|}$	$P_{\overline{xn}\|}$
3 %	2,980	2,980	3,024	3,022	3,033	3,034
3½ %	2,985	2,986	3,032	3,032	3,042	3,043
4 %	2,988	2,987	3,041	3,041	3,052	3,053
4½ %	2,992	2,994	3,049	3,048	3,064	3,064

Bei vorstehenden Berechnungen fand als Sterbetafel durchweg S. M. 1921/30 Verwendung.

Die in einzelnen Beispielen enthaltenen grösseren Abweichungen vom genauen Wert 3 sind nach ihrem Einfluss auf das Resultat der Interpolation näher untersucht worden. Wir konnten dabei feststellen, dass bei versicherungstechnischen Werten selbst Differenzen von 20 % noch eine genügende Genauigkeit der Interpolation gewährleisten.