

# Eine Variation der t-Methode

Autor(en): **Ruch, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisse = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **48 (1948)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966904>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Eine Variation der $t$ -Methode

Von *H. Ruch*, Basel

### I

Unter den bekannten Methoden zur näherungsweise Berechnung des Deckungskapitals eines ganzen Versicherungsbestandes nimmt in jüngster Zeit die sogenannte  $t$ -Methode einen besonderen Platz ein. Sie erlaubt es das Deckungskapital gruppenweise zu berechnen, wobei in jeder Gruppe alle Versicherungen mit gleicher abgelaufener Versicherungsdauer zusammengefasst sind. Die  $t$ -Methode ist hauptsächlich von H. Jecklin<sup>1)</sup> untersucht und ausgebaut worden. Der Gedankengang, der der  $t$ -Methode zugrunde liegt, soll vorerst kurz besprochen werden.

Es sei  $S_i$  die Versicherungssumme,  $P_i$  die Prämie,  ${}_tV_i$  das Deckungskapital einer solchen Versicherung aus der Gruppe ( $t$ ).  $x_i$  sei das Tarifalter für diese Versicherung. Bezeichnet man ferner der Einfachheit halber den Endwert der Prämie «1» nach  $t$  Jahren mit  $n_{x_i\bar{t}|}$  und den Endwert der Versicherungsleistung «1» nach  $t$  Jahren mit  $m_{x_i\bar{t}|}$ , so ist das Deckungskapital aller Versicherungen der Gruppe ( $t$ ):

$$\sum_i {}_tV_i = \sum_i n_{x_i\bar{t}|} P_i - \sum_i m_{x_i\bar{t}|} S_i. \quad (1)$$

Für den Fall der gewöhnlichen gemischten Versicherung gilt:

$$n_{x\bar{t}|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \text{und} \quad m_{x\bar{t}|} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Siehe «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 4, Heft 6: Jecklin, «Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung». — «Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker», Heft 40: Jecklin und Maurer, «Vollautomatische Reserveberechnung». — «Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker», 42. Band, Heft 1: Jecklin, «Zur Praxis der Reserveberechnung nach der  $t$ -Methode».

Das Wesentliche der  $t$ -Methode besteht nun darin, dass man für die von Versicherung zu Versicherung verschiedenen Werte  $n_{x_i\bar{t}}$  und  $m_{x_i\bar{t}}$  Mittelwerte  $n_{\varrho\bar{t}}$  und  $m_{\varrho\bar{t}}$  einführt, wobei zunächst  $\varrho$  noch unbekannt ist. Dadurch geht die Gleichung (1) über in:

$$\sum_i {}_tV_i = n_{\varrho\bar{t}} \sum_i P_i - m_{\varrho\bar{t}} \sum_i S_i. \quad (3)$$

Die Faktoren der beiden rechtsstehenden Ausdrücke sind entweder nur von der Zusammensetzung des Versicherungsbestandes abhängig, können also ein für allemal auf den Reservekarten festgehalten werden, oder sie sind nur von der Sterbetafel und der Zeit abhängig. Damit ist es also möglich, sofern man noch  $\varrho$  auf einfache Art bestimmen kann, das Deckungskapital der Gruppe ( $t$ ) in einer einzigen Operation zu berechnen.

Damit die Gleichung zu Recht bestehen kann, genügt es, wenn man

$$n_{\varrho\bar{t}} \sum_i P_i = \sum_i n_{x_i\bar{t}} P_i \quad (4)$$

und

$$m_{\varrho\bar{t}} \sum_i S_i = \sum_i m_{x_i\bar{t}} S_i \quad (5)$$

setzt <sup>1)</sup>. Es gilt nun, die einzige Unbekannte  $\varrho$  auf möglichst einfache Art zu berechnen. Die Funktionen  $n_{x\bar{t}}$  und  $m_{x\bar{t}}$  sind dazu ungeeignet, weil sie noch von der Zeit  $t$  abhängig sind. Man versucht daher, diese beiden Funktionen durch solche Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  zu ersetzen, die von  $t$  unabhängig sind. Ist die der Berechnung zugrunde gelegte Sterbetafel nach Makeham ausgeglichen, oder kommt sie wenigstens einer Makehamschen Tafel nahe, so darf man, wie Jecklin <sup>2)</sup> an Beispielen gezeigt hat, für  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit  $q_x$  setzen und überdies die beiden Gleichungen (4) und (5) durch eine einzige Gleichung

$$q_{\varrho} \sum_i S_i = \sum_i q_{x_i} S_i \quad (6)$$

ersetzen.

<sup>1)</sup> In Wirklichkeit geben die beiden Gleichungen (4) und (5) zwei verschiedene  $\varrho$ . Siehe auch Abschnitt V.

<sup>2)</sup> «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 4, Heft 6: Jecklin, «Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung».

Zwinggi<sup>1)</sup> hat ebenfalls Untersuchungen nach der  $t$ -Methode an Versicherungsbeständen der Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft durchgeführt. Die  $q_{x_i} S_i$  können, weil sie von der Zeit unabhängig sind, ebenfalls ein für allemal auf der Reservekarte festgehalten werden. Damit ist es möglich, auf Grund der Formel (6) zuerst  $q_0$  und dann  $q$  zu berechnen.

II

Ist die den Berechnungen zugrunde gelegte Tafel nicht nach Makeham ausgeglichen, so ist das Verfahren der  $t$ -Methode unsicher. Versuche an der Tafel SM 1933/37  $2\frac{3}{4}\%$  haben z. B. ergeben, dass die  $t$ -Methode in der bisherigen Form für diese Tafel ungeeignet ist. Bei den Versuchen wurde als Anfangsbestand der Zugang an neuen Versicherungen der PAX während einer gewissen Zeitepoche des Jahres 1947 gewählt. Von diesem Zugang wurden die Rückdatierungen und alle andern Versicherungen als gemischte Versicherungen ausgeschieden, so dass der Bestand nur gemischte Versicherungen mit gleichem Beitrittsjahr enthielt. Das allmähliche Erlöschen des Bestandes wurde, abgesehen von den normalen Abläufen, dadurch bewerkstelligt, dass man Jahr für Jahr eine gewisse Policennummernserie als erloschen betrachtete. Damit erreicht man wohl eine hypothetische, aber von jeder Selektion freie Abwicklung des Versicherungsbestandes. Es wurde das Deckungskapital einmal genau, d. h. nach der Altenburgermethode, das andere Mal nach der  $t$ -Methode berechnet, und zwar für die Jahre  $t = 5, 10, 15, 20, 25$  und  $30$ . Die Resultate sind die folgenden:

$t$	$\sum_i S_i$	$\sum_i q_{x_i} S_i$	$10^3 q_0$	$q$	$\sum_i tV_i$		Abweichung
					genau	$t$ -Methode	
5	5 611 000	22 652	4.04	33.46	730 931	728 308	— 2 623
10	4 658 500	18 476	3.97	33.08	1 290 992	1 277 576	— 13 416
15	3 637 500	14 397	3.96	33.04	1 608 794	1 568 788	— 40 006
20	2 865 500	10 692	3.73	31.85	1 686 506	1 629 099	— 57 407
25	1 796 000	5 936	3.31	20.32	1 218 676	1 251 981	+ 33 305
30	1 062 500	3 360	3.16	19.48	843 407	862 443	+ 19 036

<sup>1)</sup> «Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker», 42. Band, Heft 2: Zwinggi, «Bemerkungen zur Reserveberechnung nach der  $t$ -Methode».

Bei der Betrachtung dieser Tabelle fällt auf,

1. dass die Abweichungen relativ gross sind,
2. dass die Abweichungen von  $t = 20$  auf  $t = 25$  ihr Vorzeichen wechseln,
3. dass die Reihe der  $q_x$  ziemlich regelmässig abnimmt,
4. dass aber die Reihe der  $q$  ebenfalls von  $t = 20$  auf  $t = 25$  einen scheinbar unbegründeten Sprung erleidet.

Das zeigt aber bereits, dass die Ursache der grossen Abweichungen im Übergang von  $q_x$  auf  $q$ , also in der Sterbetafel zu suchen ist. Tatsächlich zeigt dann auch die Reihe der  $q_x$  der Sterbetafel SM 1933/37 gerade in den in Frage kommenden Altern 20—34 einen unregelmässigen Verlauf, wie folgende Tabelle zeigt:

$x$	1000 $q_x$	$x$	1000 $q_x$	$x$	1000 $q_x$
20	3.26	25	3.47	30	3.43
21	3.40	26	3.41	31	3.57
22	3.48	27	3.35	32	3.76
23	3.52	28	3.33	33	3.95
24	3.51	29	3.34	34	4.14

Damit dürfte offenbar werden, dass die  $t$ -Methode in der bisherigen Form stets nur mit aller Vorsicht anwendbar ist. Dies gilt insbesondere für die modernen Sterbetafeln, die der wirklichen Sterblichkeit mit ihren Unregelmässigkeiten besser Rechnung tragen als die alten, nach Makeham ausgeglichenen Tafeln.

### III

Es drängt sich nun geradezu die Frage auf, ob nicht eine andere Funktion des Alters an Stelle von  $q_x$  bessere Dienste leisten kann. Diese vorerst noch unbekannte Funktion sei mit  $\varphi(x)$  bezeichnet. Ferner verstehe man unter  $g_{x|\bar{t}}$  eine der Funktionen  $n_{x|\bar{t}}$  oder  $m_{x|\bar{t}}$  und unter  $G_i$  die Versicherungssumme  $S_i$  oder die Prämie  $P_i$ . Dann gehen die beiden Gleichungen (4) und (5) in die eine Gleichung über <sup>1)</sup>:

$$g_{x|\bar{t}} \sum_i G_i = \sum_i g_{x_i|\bar{t}} G_i. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Die folgenden Ausführungen können übrigens grundsätzlich auch auf die Lidstonesche Z-Methode angewendet werden, wenn nur  $g_{x|\bar{t}}$  durch eine andere Funktion  $g_{x+t|\bar{n-t}}$  ersetzt wird.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Bedingungen aufzustellen, unter denen die Gleichung (7) in eine von  $t$  unabhängige Gleichung

$$\varphi(\varrho) \sum_i G_i = \sum_i \varphi(x_i) G_i \quad (8)$$

übergeführt werden kann, und, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die zugehörigen Funktionen  $\varphi(x)$  zu bestimmen.

$g_{x\bar{t}}$  ist eine Funktion der beiden Argumente  $x$  und  $t$ , die für ganzzahlige Argumente vorgeschriebene Werte annimmt. Im übrigen kann über  $g_{x\bar{t}}$  frei verfügt werden. Es soll vorausgesetzt werden, dass sowohl  $g_{x\bar{t}}$  als auch die zunächst noch unbekanntere Funktion  $\varphi(x)$  in Potenzreihen nach  $x$  entwickelt werden können. Ausserdem aber soll  $\varphi(x)$  entweder monoton zunehmend oder monoton abnehmend sein. Dadurch ist es möglich, eine Umkehrfunktion zu  $\varphi(x)$  zu bilden, die ebenfalls in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, die aber ausserdem eindeutig ist. Diese Umkehrfunktion führe man jetzt in  $g_{x\bar{t}}$  ein.

Dadurch geht  $g_{x\bar{t}}$  in eine Funktion  $f(\varphi, t)$  über, die ebenfalls in eine Potenzreihe

$$g_{x\bar{t}} = f(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \varphi^k \quad (9)$$

entwickelt werden kann. Die in der Reihe auftretenden Koeffizienten  $c_k(t)$  sind nur noch von  $t$  abhängig.

Setzt man die Potenzreihe in die Gleichung (7) ein, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & c_0(t) \sum_i G_i + c_1(t) \varphi(\varrho) \sum_i G_i + c_2(t) \varphi^2(\varrho) \sum_i G_i + \dots \\ & = c_0(t) \sum_i G_i + c_1(t) \sum_i \varphi(x_i) G_i + c_2(t) \sum_i \varphi^2(x_i) G_i + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Man sieht nun sofort ein, dass die Gleichung (7) dann und nur dann in die Gleichung (8) übergeführt werden kann, wenn alle Koeffizienten  $c_k(t)$  nach dem linearen Glied verschwinden. Das heisst aber,  $f(\varphi, t)$  ist eine lineare Funktion von  $\varphi$ :

$$f(\varphi, t) = c_0(t) + c_1(t) \varphi, \quad c_1(t) \neq 0. \quad (11)$$

Setzt man nun noch für  $x$  die drei Werte  $x$ ,  $x_1$  und  $x_2$ , also für  $\varphi$  die drei Werte  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ein und eliminiert die Koeffizienten  $c_0(t)$  und  $c_1(t)$ , so erhält man:

$$\frac{f(\varphi, t) - f(\varphi_1, t)}{f(\varphi_2, t) - f(\varphi_1, t)} = \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad (12)$$

das heisst aber, dass der linksstehende Ausdruck gegenüber  $t$  invariant ist. Dadurch ergibt sich der

*Satz 1. Soll die Gleichung  $f[\varphi(\varrho), t] \sum_i G_i = \sum_i f[\varphi(x_i), t] G_i$  in die Gleichung  $\varphi(\varrho) \sum_i G_i = \sum_i \varphi(x_i) G_i$  übergeführt werden können, so ist notwendig und hinreichend hiefür, dass der Ausdruck*

$$\frac{f(\varphi, t) - f(\varphi_1, t)}{f(\varphi_2, t) - f(\varphi_1, t)}$$

*gegenüber  $t$  invariant ist. Zwischen den beiden Funktionen  $f(\varphi, t)$  und  $\varphi$  besteht dann eine lineare Beziehung<sup>1)</sup>.*

$$f(\varphi, t) = c_0(t) + c_1(t) \varphi.$$

Über die Funktion  $\varphi(x)$  kann innerhalb der Bedingungen des Satzes frei verfügt werden. In der bisher gebräuchlichen Form der  $t$ -Methode wurde  $\varphi(x) = q_x$  angenommen. Es zeigt sich nun aber auch gerade, warum  $q_x$  für die Sterbetafel SM 1933/37 ein ungeeigneter Ersatz für  $\varphi(x)$  ist. Das  $q_x$  der Sterbetafel SM 1933/37 lässt sich auch nicht angenähert als lineare Funktion der  $n_{x|\bar{t}}$  darstellen. Es erfüllt nicht einmal die für  $\varphi(x)$  vorgeschriebene Monotonie und lässt sich daher auch nicht eindeutig umkehren. Setzt man aber

$$\varphi(x) = A f[\varphi(x), t_0] - B = A g_{x|t_0} - B, \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Die Gleichung (11) kann aus (7) und (8) allein auf Grund der Stetigkeit von  $\varphi$  und  $g$  und der eindeutigen Umkehrbarkeit von  $\varphi$  hergeleitet werden. Doch ist es im vorliegenden Fall nicht so wichtig, mit minimalen Voraussetzungen auszukommen. Praktisch wird man  $\varphi$  und  $g$  durch rechnerisch möglichst einfache Funktion darstellen, die an diskreten Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. Potenzreihen eignen sich vorzüglich dazu.

wo  $A$ ,  $B$  und  $t_0$  beliebig wählbare Konstanten sind ausser  $A = 0$ , so geht die Gleichung (11) zufolge der Bedingung (12) tatsächlich in die Gleichung

$$f(\varphi, t) = c_0^*(t) + c_1^*(t)f(\varphi, t_0) \quad (14)$$

über. Die Gleichung (8) geht in

$$(A g_{\varrho t_0} - B) \sum_i G_i = \sum_i (A g_{x_i t_0} - B) G_i \quad (15)$$

über. Daraus folgt der

*Satz 2.* Ist der Ausdruck  $\frac{g_{x\bar{t}} - g_{x_1\bar{t}}}{g_{x_2\bar{t}} - g_{x_1\bar{t}}}$  gegenüber  $t$  invariant, so darf die Gleichung  $g_{\varrho\bar{t}} \sum_i G_i = \sum_i g_{x_i\bar{t}} G_i$  durch die Gleichung  $(A g_{\varrho t_0} - B) \sum_i G_i = \sum_i (A g_{x_i t_0} - B) G_i$  ersetzt werden.  $A$ ,  $B$  und  $t_0$  sind dabei beliebig wählbare Konstanten ausser  $A = 0$ , wenn nur  $g_{x\bar{t}_0}$  nicht für alle  $x$  verschwindet.

Setzt man  $A = 1$  und  $B = 0$ , so erhält man an Stelle der Gleichung (15) die einfachere Gleichung

$$g_{\varrho t_0} \sum_i G_i = \sum_i g_{x_i t_0} G_i. \quad (16)$$

In der praktischen Anwendung wird aber die Formel (15) bequemer sein, weil es bei geeigneter Wahl von  $A$  und  $B$  oft gelingt, die viestelligen Zahlen  $g_{x\bar{t}_0}$  auf kleinerstellige Zahlen  $\varphi(x)$  zu reduzieren.

#### IV

Im allgemeinen ist freilich der Ausdruck

$$y = \lambda(x, x_1, x_2; t) = \frac{g_{x\bar{t}} - g_{x_1\bar{t}}}{g_{x_2\bar{t}} - g_{x_1\bar{t}}}$$

nicht invariant gegenüber  $t$ . Betrachtet man ihn als Funktion von  $t$  mit den Parametern  $x$ ,  $x_1$  und  $x_2$ , so stellt er im rechtwinkligen Koordinatensystem  $(y, t)$  eine dreifach mannigfaltige Schar von

Kurven dar, die alle mehr oder weniger von der horizontalen Geraden abweichen. Je mehr diese Kurvenscharen in ihrer Gesamtheit von der Horizontalen abweichen, um so ungenauer sind auch die aus der Gleichung (16) berechneten mittleren Alter und damit das auf Grund der Formel (3) berechnete Deckungskapital. Um also einen Maßstab für die Genauigkeit des nach der verallgemeinerten  $t$ -Methode berechneten Deckungskapitals zu erhalten, müsste man vorerst versuchen, einen prägnanten Maßstab für die Variabilität von  $\lambda(x, x_1, x_2; t)$  zu erhalten. Sodann müsste man diesen Maßstab in Beziehung setzen zur Genauigkeit des Deckungskapitals. Die Lösung dieser beiden Aufgaben stösst aber vorerst noch auf grosse Schwierigkeiten. Der Verfasser behält sich vor, diese Aufgabe in einer spätern Arbeit zu untersuchen. Im vorliegenden Aufsatz geht es darum, die Genauigkeit des Deckungskapitals im konkreten Fall prüfen zu können. Dazu aber wird der direkte Weg über die Prüfung an Stichproben einfacher und auch sicherer sein. Nur des Interesses halber und zu Vergleichszwecken sind im folgenden Abschnitt für einige Argumentwerte  $x, x_1, x_2$  und  $t$  die Funktionswerte  $\lambda(x, x_1, x_2; t)$ , angewendet auf die Sterbetafel SM 1933/37  $2\frac{3}{4}\%$  und die Funktion  $g_{x\bar{t}} = n_{x\bar{t}}$ , wiedergegeben. Soweit man aus diesen Angaben schliessen kann, braucht man an die Erfüllung der Invarianzbedingung keine allzu grossen Anforderungen zu stellen.

V

Die in Abschnitt II angeführten Versicherungsbestände wurden auch dem Verfahren des Satzes 2 unterworfen, und zwar in drei verschiedenen Varianten. Setzt man in der Gleichung (15) an Stelle von  $A g_{x\bar{t}} - B$  einmal  $\varphi(x) = A_1 n_{x\bar{t}_0} - B_1$ , ein andermal  $\psi(x) = A_2 m_{x\bar{t}_0} - B_2$  und an Stelle von  $G_i$  einmal  $S_i$ , ein andermal  $P_i$ , so besteht die erste Variante in der Anwendung der Formel

$$\varphi(q_1) \sum_i S_i = \sum_i \varphi(x_i) S_i; \tag{17}$$

für die zweite Variante wurde die Formel

$$\psi(q_2) \sum_i S_i = \sum_i \psi(x_i) S_i \tag{18}$$

angewendet.

Für die dritte Variante wurde nebst der Formel (18) auch noch die Formel

$$\varphi(\varrho_3) \sum_i P_i = \sum_i \varphi(x_i) P_i \quad (19)$$

angewendet. Es wurden also für diese Variante zwei verschiedene  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  bestimmt.  $\varrho_2$  wurde verwendet, um den Endwert der Versicherungsleistungen, und  $\varrho_3$ , um den Endwert der Prämienleistungen zu berechnen. In allen Fällen wurde  $t_0 = 20$  gesetzt. Für  $\varphi(x)$  wurde  $A_1 = 1$  und  $B_1 = 27$ , für  $\psi(x)$ , wurde  $A_2 = 100$  und  $B_2 = 5$  gewählt. Die folgende Tabelle gibt einen Ausschnitt aus den Werten für die vier Funktionen  $n_{x\overline{20}|}$ ,  $m_{x\overline{20}|}$ ,  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  sowie zum Vergleich die entsprechenden Werte der  $q_x$  der Tafel SM 1933/37.

$x$	$n_{x\overline{20} }$	$m_{x\overline{20} }$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$q_x$
20	28.203	0.102 74	1.203	5.274	3.26
21	28.253	0.105 60	1.253	5.560	3.40
22	28.312	0.108 71	1.312	5.871	3.48
23	28.380	0.112 28	1.380	6.228	3.52
24	28.459	0.116 39	1.459	6.639	3.51
25	28.549	0.121 21	1.549	7.121	3.47
26	28.650	0.126 86	1.650	7.686	3.41
27	28.762	0.133 47	1.762	8.347	3.35
28	28.889	0.141 19	1.889	9.119	3.33
29	29.031	0.150 07	2.031	10.007	3.34
30	29.191	0.160 22	2.191	11.022	3.43
31	29.369	0.171 65	2.369	12.165	3.57
32	29.567	0.184 38	2.567	13.438	3.76
33	29.788	0.198 53	2.788	14.853	3.95
34	30.032	0.214 34	3.032	16.424	4.14
35	30.301	0.231 67	3.301	18.167	4.33
36	30.598	0.251 06	3.598	20.106	4.52
37	30.925	0.274 50	3.925	22.450	4.71
38	31.288	0.296 93	4.288	24.693	4.91
39	31.688	0.324 11	4.688	27.411	5.17
40	32.130	0.354 46	5.130	30.446	5.50

Man beachte die vorteilhafte Regelmässigkeit und Monotonie der vier ersten Funktionen  $n_{x\overline{20}|}$ ,  $m_{x\overline{20}|}$ ,  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  gegenüber der Funktion  $q_x$ . Um sich über die Variabilität der Funktion  $\lambda(x, x_1, x_2; t)$

einigermassen ein Bild machen zu können, gibt die folgende Tabelle die Werte dieser Funktion für die Argumentwerte  $x = 30$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 40$  und  $t = 5, 10, 15, 20, 25$  und  $30$  angewendet auf die Funktion  $n_{x\bar{t}}$  und  $m_{x\bar{t}}$  wieder.

$t$	$\lambda_n(x, x_1, x_2; t)$	$\lambda_m(x, x_1, x_2; t)$
5	0.130	0.112
10	0.212	0.183
15	0.237	0.213
20	0.252	0.228
25	0.258	0.234
30	0.248	0.225

Die Resultate nun, die die Berechnung des Deckungskapitals nach den drei Varianten ergeben hat, sind in den folgenden Tabellen zusammengefasst.

Variante I

t	$\sum_i S_i$	$\frac{\sum_i \varphi(x_i) S_i}{10^3}$	$\varphi(\varrho_1)$	$\varrho_1$	$\sum_i t V_i$		Ab- weichung
					genau	nach t-Methode	
5	5 611 000	15 017.67	2.676	32.49	730 931	733 406	+ 2 475
10	4 658 500	11 932.09	2.561	31.97	1 290 992	1 296 730	+ 5 738
15	3 637 500	9 199.03	2.529	31.81	1 608 794	1 590 866	—17 928
20	2 865 500	6 277.90	2.191	30.00	1 686 506	1 667 601	—18 905
25	1 796 000	2 947.29	1.641	25.91	1 218 676	1 210 622	— 8 054
30	1 062 500	1 504.79	1.416	23.46	843 407	838 509	— 4 898

Variante II

t	$\sum_i S_i$	$\frac{\sum_i \psi(x_i) S_i}{10^3}$	$\psi(\varrho_2)$	$\varrho_2$	$\sum_i t V_i$		Ab- weichung
					genau	nach t-Methode	
5	5 611 000	84 006.09	14.972	33.08	730 931	730 342	— 589
10	4 658 500	65 654.89	14.094	32.46	1 290 992	1 288 328	— 2 664
15	3 637 500	50 493.34	13.881	32.31	1 608 794	1 582 424	—26 370
20	2 865 500	33 050.33	11.534	30.45	1 686 506	1 658 701	—27 805
25	1 796 000	14 086.25	7.843	26.24	1 218 676	1 206 767	—11 909
30	1 062 500	6 834.55	6.433	23.50	843 407	838 209	— 5 198

Variante III

t	$\sum_i P_i$	$\frac{\sum_i \varphi(x_i) P_i}{10^3}$	$\varphi(\varrho_3)$	$\varrho_3$	$\sum_i t V_i$		Ab- weichung
					genau	nach t-Methode	
5	156 376	5 939.73	3.798	36.61	730 931	732 562	+1631
10	128 625	4 391.40	3.414	35.38	1 290 992	1 294 052	+3060
15	99 261	3 300.34	3.325	35.08	1 608 794	1 606 009	—2785
20	72 856	1 930.71	2.650	32.38	1 686 506	1 686 401	— 105
25	39 428	701.33	1.779	27.13	1 218 676	1 217 452	—1224
30	21 270	309.75	1.456	23.96	843 407	843 299	— 108

Zuletzt seien noch die Abweichungen der bisher besprochenen vier Methoden in einer Tabelle zusammengestellt. Die mit O überschriebenen Spalten beziehen sich dabei auf die bisher übliche *t*-Methode, die mit I, II, III überschriebenen Spalten beziehen sich auf die Varianten I, II und III.

<i>t</i>	Abweichung im Betrag				Abweichung in ‰ des genauen Deckungskapitals			
	O	I	II	III	O	I	II	III
5	— 2 623	+ 2 475	— 589	+1631	— 3.59	+ 3.39	— 0.81	+2.23
10	—13 416	+ 5 738	— 2 664	+3060	—10.39	+ 4.44	— 2.06	+2.37
15	—40 006	—17 928	—26 370	—2785	—24.87	—11.14	—16.39	—1.73
20	—57 407	—18 905	—27 805	— 105	—34.04	—11.21	—16.49	—0.06
25	+33 305	— 8 054	—11 909	—1224	+27.33	— 6.61	— 9.77	—1.00
30	+19 036	— 4 898	— 5 198	— 108	+22.57	— 5.81	— 6.16	—0.13

Es geht daraus hervor, dass alle drei Varianten I, II und III wesentlich bessere Resultate ergeben als die bisherige *t*-Methode. Insbesondere fallen die guten Resultate der Variante III auf. Das ist aber nicht verwunderlich; alles in allem darf gesagt werden, dass diese verallgemeinerte *t*-Methode bessere Resultate liefert als die bisher übliche *t*-Methode, dass sie auch auf Tafeln, wie die SM 1933/37, mit gutem Erfolg anwendbar ist, wo sonst die bisherige Methode versagen würde.

Schliesslich möchte der Verfasser nicht verfehlen, seinem Mitarbeiter und Kollegen, Dr. Bernhard Romer, für die Mithilfe bei der Ausarbeitung zu danken.