

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Band: 48 (1948)

Artikel: Kollektive Reservenberechnung

Autor: Ammeter, Hans

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966905>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kollektive Reservenberechnung

Von *Hans Ammeter*, Zürich

Die Reserven von Versicherungsbeständen werden in der Praxis regelmässig — auch bei Anwendung von Gruppenmethoden — als Summe der Reserven für alle im Bestand auftretenden einzelnen Versicherungen berechnet. Geht man davon aus, dass nur die Reserve eines Bestandes, nicht aber diejenige einer einzelnen Versicherung, eine versicherungstechnische Realität darstellt, so erscheint dieses individuelle Vorgehen eigentlich wenig einleuchtend. Die individuelle Berechnungsmethode weist ferner in praktischer Hinsicht Nachteile auf, weil die Berücksichtigung der technischen Besonderheiten jeder einzelnen Versicherung eine rationelle Berechnung der Reserven erschwert.

Im folgenden soll demgegenüber versucht werden, eine Methode zu erläutern, nach der die Reserve eines Versicherungsbestandes kollektiv, d. h. ohne Berücksichtigung von individuellen Reserven, berechnet wird. Diese Methode ist in Norwegen schon praktisch erprobt worden und dürfte sich auch in der Schweiz bewähren. Sie ist in theoretischer Hinsicht einfach und naheliegend und erlaubt in Verbindung mit einer modern eingerichteten Lochkartenanlage eine vollautomatische Reservenberechnung. Abgesehen von diesen Vorzügen bewährt sich die Methode in erster Linie, wenn die Reserve gleichzeitig nach verschiedenen Rechnungsgrundlagen oder gar mit planmässig veränderlichen Grundlagen berechnet werden soll.

A. Grundzüge der kollektiven Methode

1. Grundsätzliche Bemerkungen

Nach der üblichen individuellen Methode geht man bei der Reservenberechnung wie folgt vor: Zuerst berechnet man den Verlauf der rechnermässigen Einnahmen und Ausgaben für eine fin-

gierte homogene Gesamtheit von l_x Personen und anschliessend die Reserve für diese Gesamtheit als Summe aller diskontierten künftigen Ausgabenüberschüsse. Die Einzelreserve berechnet man alsdann durch Division der Reserve für die fingierte Gesamtheit mit l_x und schliesslich die Bestandesreserve durch Summation aller Einzelreserven.

Ganz analog wie bei der individuellen Methode für die einzelne Versicherung geht man nach der kollektiven Methode für den ganzen Bestand vor. Zunächst bestimmt man den rechnermässigen Verlauf der Einnahmen und Ausgaben unter Berücksichtigung der Struktur für den ganzen Versicherungsbestand. Die Bestandesreserve ergibt sich dann direkt als Summe aller diskontierten Ausgabenüberschüsse.

Prinzipiell bietet die kollektive Berechnungsmethode nichts Neues; das der Berechnung der Einzelreserve zugrunde liegende Prinzip wird lediglich auf nicht homogene Gesamtheiten übertragen. Hingegen weist die vollständig getrennte Berücksichtigung der Rechnungselemente Ausscheidewahrscheinlichkeiten und Zins — wie unter B noch näher dargelegt werden soll — grosse praktische Vorteile auf. Ferner ist noch darauf hinzuweisen, dass der als Zwischenresultat auftretende Verlauf der Einnahmen und Ausgaben zusätzliche Informationsmöglichkeiten liefert, die unter anderem bei der Gewinnanalyse und bei der Wahl von Kapitalanlagen von Nutzen sein können.

2. Die Berechnung des Verlaufs der Einnahmen und Ausgaben für einen nicht homogenen Versicherungsbestand

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass eine modern eingerichtete Lochkartenanlage zur Verfügung steht und dass die für die Rechnung notwendigen Daten der einzelnen Versicherungen auf geeignete Lochkarten übertragen seien.

Für die Berechnung des Verlaufs der Einnahmen gruppiert man vorerst die vorhandenen Lochkarten nach dem Bilanzalter x und nach der künftigen Laufzeit der Prämienzahlung h . Anschliessend werden die Prämientotale P_{x, h_i} von allen Versicherungen mit dem gleichen Bilanzalter x über die Laufzeiten $h_i \geq h$ nach der Formel

$$P_h^{(x)} = \sum_{h_i \geq h} P_{x, h_i}$$

summiert. Die hernach auf Summenkarten zur Verfügung stehenden Grössen $P_h^{(x)}$ bilden, als Funktion der Laufzeit h betrachtet, eine

unabhängige Ausscheideordnung, bei welcher der Ablauf der Prämienzahlung als Ausscheideursache auftritt; gleichzeitig sind durch die Funktionen $P_h^{(x)}$ die Verläufe der Prämieinnahmen gegeben, die sich ergeben würden, wenn keine vorzeitigen Abgänge durch Tod, Invalidität usw. eintreten würden. Multipliziert man schliesslich diese Ausscheideordnung $P_h^{(x)}$ mit der Ausscheideordnung l_{x+h} (oder l_{x+h}^{aa} usw.), so gelangt man nach Division mit l_x zum Verlauf der rechnermässigen Prämieinnahmen

$$P_h'^{(x)} = \frac{(P_h^{(x)} \cdot l_{x+h})}{l_x} = \frac{(l P)_h^{(x)}}{l_x} \quad (1)$$

Formel (1) lässt sich mit Hilfe von Faktorenkarten, welche die Ausscheideordnung l_x und ihren reziproken Wert enthalten, wie folgt auswerten: Zuerst wird $(l P)_h^{(x)}$ maschinell berechnet und auf die erwähnten Summenkarten übertragen. In einem weiteren Arbeitsgang berechnet man $P_h'^{(x)}$, und schliesslich gelangt man durch Summation über alle Alter x zum Verlauf der rechnermässigen Prämieinnahme. Abgesehen von der Lochung der Bestandes- und Faktorenkarten berechnet sich somit der Verlauf der rechnermässigen Prämieinnahmen vollständig maschinell.

Das geschilderte Verfahren lässt sich ohne weiteres auch auf die Berechnung des Verlaufs an fällig werdenden Erlebensfall- und Todesfallsummen, Altersrenten usw. übertragen, sofern nur feste Versicherungsleistungen im Bestand auftreten. Für den Verlauf der fälligen Todesfallsummen würde z. B. an Stelle von Formel (1) der Ausdruck

$$T_h'^{(x)} = \frac{(T_h^{(x)} \cdot d_{x+h})}{l_x} = \frac{(dT)_h^{(x)}}{l_x} \quad (2)$$

treten, der wie Formel (1) maschinell ausgewertet werden kann, wenn die Anzahl der Gestorbenen $d_x = l_x q_x$ ebenfalls auf die Faktorenkarten aufgenommen wird.

3. Besondere Versicherungsformen

Nach der im vorigen Abschnitt skizzierten Methode lassen sich fast alle in der Praxis vorkommenden Versicherungsformen behandeln, insbesondere alle Versicherungsformen, bei denen der Verlauf

der fällig werdenden Leistungen $L_h^{(x)}$ von x -jährigen Versicherten in der Form

$$L_h^{(x)} = L_h^{(x)} \left\{ \sum_i f_{i,1}(x+h) \cdot f_{i,2}(x) \right\} \quad (3)$$

dargestellt werden kann. Die in dieser Formel auftretenden Funktionen f der Alter $x+h$ und x werden aus den beteiligten Ausscheidungsordnungen gebildet.

Beispielsweise lassen sich die Verläufe von fälligen Überlebens- (Witwen-) und Invalidenrenten, die aus anwartschaftlichen Versicherungen von Versicherten mit gleichem Alter x (und y) hervorgehen, nach den Formeln

$$W_h^{(x,y)} = W_h^{(x,y)} \left[\frac{l_{y+h}}{l_y} - \frac{l_{x+h} \cdot l_{y+h}}{l_x \cdot l_y} \right] \quad (4a)$$

$$J_h^{(x)} = J_h^{(x)} \left[\frac{l_{x+h}}{l_x} - \frac{l_{x+h}^{aa}}{l_x^{aa}} \right] \quad (4b)$$

berechnen, sofern die Sterbetafeln der Rentenanwärter und Rentenbezüger nicht als verschieden angenommen werden. Gilt für die Rentenbezüger eine besondere, nur nach dem erreichten Alter abgestufte Ausscheidetafel (l_y^w, l_x^i), so ergeben sich an Stelle der Formeln (4) die Ausdrücke

$$W_h^{(x,y)} = W_h^{(x,y)} \left[\frac{l_{y+h}^w}{l_x l_y} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{d_{x+\tau} l_{y+\tau}}{l_{y+\tau}^w} - \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{d_{x+h+\tau} l_{y+h+\tau}}{l_{y+h+\tau}^w} \right\} \right] \quad (4'a)$$

$$J_h^{(x)} = J_h^{(x)} \left[\frac{l_{x+h}^i}{l_x^{aa}} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{l_{x+\tau}^{aa} i_{x+\tau}}{l_{x+\tau}^i} - \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{l_{x+h+\tau}^{aa} i_{x+h+\tau}}{l_{x+h+\tau}^i} \right\} \right] \quad (4'b)$$

welche trotz des etwas komplizierteren Aufbaus immer noch vollautomatisch ausgewertet werden können, weil sie wie Formel (3) aufgebaut sind.

Bei den anwartschaftlichen Witwenrentenversicherungen empfiehlt es sich im übrigen, nicht mit individuellen, sondern mit mittleren Altersdifferenzen zu rechnen; dadurch wird eine wesentliche Vereinfachung erzielt.

Gelegentlich treten auch Versicherungsformen mit veränderlichen Versicherungsleistungen auf (Versicherungen, die nach einer Skala

abgestufte Leistungen vorsehen, Versicherungen auf einen bestimmten Zeitpunkt, Versicherungen mit Prämienrückgewähr usw.). Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, diesen Besonderheiten nicht individuell Rechnung zu tragen, um so mehr, als erfahrungsgemäss verschiedene Abstufungen der gleichen maximalen Versicherungsleistung sich nur unbedeutend auf die Höhe der Reserve auswirken. Es ist daher zweckmässig, für die Berechnung der Bestandesreserve von mittleren Leistungsskalen auszugehen, die nur nach dem erreichten Alter abzustufen sind. Beispielsweise könnte die mittlere Belastung aus im Alter x fälligen Todesfallsummen unter Benützung der im Alter x insgesamt versicherten maximalen Todesfallsummen T_x mit $\lambda_x T_x q_x$ in Rechnung gestellt werden, wobei die Reduktionsfaktoren λ_x aus dem Bestand — am besten aus der Statistik der Todesfälle — abzuleiten wären. Die einmal bestimmten Reduktionsfaktoren λ_x könnten wohl längere Zeit beibehalten werden, weil Veränderungen in der Bestandeszusammensetzung in der Regel nur langsam eintreten.

4. Die Berechnung der Bestandesreserve

Saldiert man die verschiedenen Ausgaben- und Einnahmenverläufe, so gelangt man schliesslich zum Verlauf des Ausgabenüberschusses U_h , aus dem die Reserve V nach der Formel

$$V = \sum_{h=1}^{\infty} U_h \cdot v^{h-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

direkt oder maschinell mit Hilfe von Diskontierungsfaktorenkarten berechnet wird. Die Reserve lässt sich ferner ohne weiteres auch für jedes beliebige spätere Rechnungsjahr ermitteln.

B. Anwendungen

In praktischer Hinsicht dürfte die kollektive Reservenberechnungsmethode den leistungsfähigsten, bisher angewendeten individuellen Berechnungsmethoden etwa gleichwertig sein, solange die Reserve nur nach einem einzigen System von Rechnungsgrundlagen berechnet werden soll. Die besonderen Vorzüge der Methode zeigen sich jedoch erst bei den nachstehend erörterten, für die Versicherungspraxis immer mehr an Bedeutung gewinnenden Problemstellungen.

1. Variation der Ausscheidetafeln

Die massgeblichen Verhältnisse sind in der Lebensversicherung einem steten Wandel unterworfen; die Abschätzung der langfristigen Lebensversicherungsverpflichtungen ist daher immer recht schwierig und unsicher. Um die finanzielle Lage eines Lebensversicherungsbetriebes beurteilen zu können, ist es daher unerlässlich, nicht nur eine einzige Hypothese über den Zinssatz und die künftige Sterblichkeit zu Rate zu ziehen. Es empfiehlt sich vielmehr, mit verschiedenen Hypothesen zu arbeiten, d. h. die Bestandesreserve nach verschiedenen Rechnungsgrundlagen nebeneinander zu bestimmen.

Derartige Bestrebungen stossen bei den üblichen individuellen Verfahren oft auf Schwierigkeiten, einmal, weil von den Rechnungsgrundlagen abhängige Hilfwerte zur Erfassung der einzelnen Versicherungen benützt werden, die individuell umgerechnet werden müssen, und ausserdem, weil die Berechnung der notwendigen Tabellen zur Reservenberechnung für alle im Bestand auftretenden Kombinationen sich zu zeitraubend gestaltet. Dies gilt insbesondere für die Gruppenversicherung, bei der mit Rücksicht auf die Vielzahl der auftretenden Kombinationen, die zum Teil technisch recht kompliziert aufgebaut sind, die Berechnung der notwendigen Tariftabellen innert nützlicher Frist wohl ausgeschlossen ist. Derartige Schwierigkeiten treten bei der kollektiven Methode nicht auf, weil keine von den Rechnungsgrundlagen abhängigen Hilfwerte für die einzelnen Versicherungen benützt werden, und ferner, weil die Berechnungen keine Barwerte wie $A_{x:\overline{n}|}$, $a_{x:\overline{n}|}$ usw. erfordern, sondern nur die Ausscheidetabellen und Ausscheidewahrscheinlichkeiten, die ohne weiteres als gegeben vorausgesetzt werden dürfen.

Für den Übergang auf eine andere Ausscheidetafel müssen beim kollektiven Verfahren nur die Faktorenkarten, welche die Werte l_x, l_x^{-1}, d_x usw. enthalten, durch neue Karten ersetzt werden, welche die nach den neuen Tafeln geltenden Werte aufweisen. Die neue Reserve bestimmt sich im übrigen vollständig maschinell.

2. Berechnung der Bestandesreserve nach Generationensterbetafeln

Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Sterblichkeit fortgesetzt abnimmt. Um einer weiteren Sterblichkeitsverbesserung Rechnung zu tragen, wäre es daher angezeigt — insbesondere bei Renten-

versicherungen — mit einem System von Generationensterbetafeln, und nicht nur mit einer einzigen Periodensterbetafel, zu rechnen. Nach den üblichen individuellen Verfahren stösst jedoch eine Reservenrechnung nach Generationensterbetafeln auf unüberwindliche praktische Schwierigkeiten. Anders verhält es sich bei der kollektiven Methode, wo nur die auf den Faktorenkarten auftretenden Werte l_x , l_x^{-1} , d_x usw. durch die entsprechenden Werte nach der Generationssterbetafel ersetzt werden müssen. Je nach der Anzahl der zu verwendenden Generationssterbetafeln (im Maximum kann für jedes Geburtsjahr eine besondere Generationssterbetafel verwendet werden) vermehren sich allerdings die notwendigen Faktorenkarten. Die Reserve berechnet sich aber wiederum vollständig maschinell.

3. Variation des technischen Zinsfusses

Besonders einfach gestaltet sich nach der kollektiven Methode eine Umrechnung der Reserven auf einen andern technischen Zinsfuss. In diesem für die Praxis besonders wichtigen Fall muss lediglich die Diskontierung der Ausgabenüberschüsse in Formel (5) dem neuen technischen Zinsfuss angepasst werden. Die Reserve lässt sich so innert weniger Stunden für eine Reihe von technischen Zinsfüssen bestimmen.

4. Planmässige Überführung der Reserven auf strengere Grundlagen

Im Zuge der Anpassung der Lebensversicherung an die geänderten Verhältnisse erweist es sich oft als notwendig, auf strengere Rechnungsgrundlagen überzugehen und die versicherungstechnische Reserve zu verstärken. Diese Verstärkung führt mitunter zu Schwierigkeiten, weil die notwendigen Mittel nicht immer sofort und in vollem Umfange zur Verfügung stehen. In dieser Hinsicht wäre es wünschbar, wenn die Reserve schrittweise und planmässig verstärkt werden könnte, z. B. in der Weise, dass sie binnen einer gegebenen Frist vollständig auf strengere Rechnungsgrundlagen umgestellt wird. Eine derartige planmässige Verstärkung lässt sich mit Hilfe des kollektiven Verfahrens ohne praktische Schwierigkeiten wie folgt durchführen: Der in den neuen Rechnungsgrundlagen vorgesehene technische Zinsfuss wird vorübergehend, d. h. für alle Jahre, in denen die Reserve verstärkt werden

soll, so erhöht, dass zur Verzinsung der Reserven ein Betrag erforderlich ist, der die zur Reservenverstärkung verfügbaren Mittel einschliesst. Beispielsweise würde bei einer Reserve von 100 Millionen Franken eine Erhöhung des technischen Zinsfusses um 1 % genügen, um die Reserve jährlich um 1 Million Franken zu verstärken. Der erhöhte technische Zinsfuss kann dabei je nach den verfügbaren Mitteln ohne weiteres auch als variabel angenommen werden, ohne dass ins Gewicht fallende praktische Schwierigkeiten zu befürchten wären. Je nach dem festgesetzten Verlauf des technischen Zinsfusses wären lediglich die in Formel (5) auftretenden Diskontierungsfaktoren anzupassen.

Zusammenfassung: Mit Hilfe der kollektiven Berechnungsmethode lassen sich die Reserven von Versicherungsbeständen vollautomatisch berechnen. Das kollektive Verfahren weist insbesondere dann grosse Vorteile auf, wenn die Reserven in verschiedenen Zeitpunkten und nach verschiedenen Grundlagen nebeneinander berechnet werden sollen, oder wenn planmässig veränderliche Rechnungsgrundlagen (Generationensterbetafeln, veränderlicher technischer Zinsfuss) benützt werden.

Literaturhinweise

- A. Renberg: Une méthode pour calculer les réserves mathématiques à l'inventaire (Skand. Aktuarietidsk. 1947).
L. Wilhelmsen: On the Valuation of Life Policies (Skand. Aktuarietidsk. 1947).