Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 49 (1949)

Artikel: Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten

Autor: Ammeter, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555010

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten [1])

Von *Hans Ammeter*, Zürich

In der elementaren Versicherungsmathematik geht man von der Annahme eines vollkommenen Risikoausgleichs aus, obschon der rechnungsmässige Verlauf des Risikogeschäftes stets von zufälligen Schwankungen gestört wird. Die Risikotheorie befasst sich demgegenüber mit den durch diese Schwankungen bewirkten Abweichungen vom rechnungsmässigen Schadenverlauf und den Gefahren, welche dem Versicherer aus diesen Abweichungen entstehen.

Innerhalb der Risikotheorie unterscheidet man zwischen einer individuellen und einer kollektiven Theorie. Die ältere, individuelle Theorie geht aus vom Risiko aller Einzelversicherungen eines Bestandes. Die moderne, von einigen nordischen Autoren (siehe Literaturverzeichnis) entwickelte kollektive Risikotheorie lässt die Einzelversicherungen des Bestandes ausser acht und benützt lediglich gewisse Durchschnittseigenschaften von Versicherungsbeständen. Die kollektive Betrachtungsweise ist auch für die vorliegende Arbeit wegleitend.

Bisher ging man in der Risikotheorie gewöhnlich von den in der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Annahmen aus; insbesondere wurde regelmässig vorausgesetzt, dass die Grundwahrscheinlichkeiten, das sind die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt oder Nichteintritt des Schadenfalles, in allen Risikoklassen fest sind. Diese wohl allzu einfache Annahme harmoniert aber nur selten mit

---

[1]) Diese Arbeit behandelt in erweiterter Form die Problemstellungen, welche im Kurzreferat «Risikotheoretische Zusammenhänge bei festen und schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten» anlässlich der Mitgliederversammlung vom 17. Oktober 1948 erörtert worden sind.

den wirklichen Verhältnissen im Versicherungswesen. Daraus wird vielfach geschlossen, dass die Risikotheorie an sich und noch mehr ihre praktische Anwendung abzulehnen sei.

Diese Auffassung geht wohl am Kern der Dinge vorbei; nicht die Risikotheorie an sich ist auf versicherungstechnische Probleme nicht anwendbar, sondern nur ihre Ergebnisse, soweit sie sich auf Annahmen stützen, die den wirklichen Verhältnissen zu wenig Rechnung tragen. Nun ist aber die Risikotheorie keineswegs an die in der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Annahmen gebunden; sie lässt sich vielmehr ohne weiteres auf zweckmässigeren Annahmen aufbauen. Auf diesen Sachverhalt hat schon Cramér in der Arbeit [1] [1]) hingewiesen. Später hat Nolfi [20], unseres Wissens als erster, die Grundzüge einer Risikotheorie auf individueller Grundlage entwickelt, die zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten voraussetzt. In der Arbeit [15] hat der Verfasser versucht, die gleichen Gedankengänge der kollektiven Risikotheorie dienstbar zu machen [2]). Durch diese Erweiterungen ist die Risikotheorie zweifellos den wirklichen Verhältnissen im Versicherungswesen nähergekommen.

Die bisherige, von festen Grundwahrscheinlichkeiten ausgehende Risikotheorie ist damit aber keineswegs als überholt zu betrachten; sie bildet vielmehr die unentbehrliche Grundlage für die erweiterte Risikotheorie. In dieser Arbeit wird daher versucht, die Risikotheorie, ausgehend von der einfachsten Annahme von festen Grundwahrscheinlichkeiten, systematisch zu erweitern auf planmässig veränderliche und schliesslich zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten.

Die Anzahl der Schadenfälle und die Gesamtschadensbelastung werden in der Risikotheorie nicht wie in der elementaren Versicherungsmathematik als feste, à priori gegebene Grössen angenommen, sondern als zufällige Variable, die einem Verteilungsgesetz folgen. Die Theorie der Verteilungsfunktionen bildet daher die Grundlage der Risikotheorie. Zum besseren Verständnis der nachfolgenden risikotheoretischen Ableitungen werden deshalb in einem einleitenden Kapitel die wichtigsten Formeln und Sätze aus der Theorie der Verteilungsfunktionen zusammengestellt und durch Beispiele erläutert, welche für die späteren Entwicklungen von Bedeutung sind.

---

[1]) Die in [ ] gesetzten Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

[2]) Von ähnlichen Ideen geht auch die dem Verfasser erst nachträglich bekannt gewordene Arbeit [13] von Ove Lundberg aus.

I.

Einige Ergebnisse aus der Theorie der Verteilungsfunktionen [18]

Unter einer zufälligen Variablen x versteht man eine Grösse, die mit gewissen Wahrscheinlichkeiten $f(x_i)$ verschiedene Werte x_i annehmen kann. Die Gesamtheit aller x_i-Werte und der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $f(x_i)$ bilden eine Verteilung, die entweder als Frequenzfunktion $f(x)$ oder als Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(x)$ dargestellt werden kann. *Die Frequenzfunktion* $f(x)$ gibt im diskontinuierlichen Fall die Wahrscheinlichkeit an, dass die zufällige Variable den Wert x annimmt. Im kontinuierlichen Fall ist $f(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällige Variable in den Bereich zwischen x und $x + dx$ fällt. Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $F(x)$ gibt demgegenüber die Wahrscheinlichkeit an, dass die zufällige Variable einen Wert $x_i \leqslant x$ annimmt; sie bestimmt sich aus der Frequenzfunktion durch Summation oder Integration nach den Formeln

$$F(x) = \sum_{x_i \leqq x} f(x_i) \quad \text{oder} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x_i)\,dx_i .$$

Zwei zufällige Variable x_1 und x_2 heissen stochastisch abhängig oder unabhängig, je nachdem die Verteilung der einen Variablen x_1 von der anderen x_2 abhängt oder nicht. Die Summe von zwei stochastisch unabhängigen, zufälligen Variablen $z = x_1 + x_2$ ist wieder eine zufällige Variable, deren Frequenzfunktion durch das nachstehende Faltungsintegral gegeben ist.

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)\, f_2(z - x_1)\,dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z - x_2)\, f_2(x_2)\,dx_2 \\ &= f_1(z) \;*\; f_2(z) \end{aligned} \tag{1}$$

Formel (1) lässt sich ohne weiteres auf die Summe von mehr als zwei zufälligen Variablen erweitern. Es gilt dann für $z = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$

$$f(z) = f_1(z) \;*\; f_2(z) \;*\; f_3(z) \;*\; \ldots \tag{1'}$$

Die Untersuchung der Eigenschaften von Verteilungen an Hand der Frequenz- und Wahrscheinlichkeitsfunktionen gestaltet sich im allgemeinen recht schwierig und führt oft — wie zum Beispiel in Formel (1) — zu verhältnismässig kompliziert aufgebauten Ausdrücken, deren Deutung nicht ohne weiteres möglich ist. Zu einer beträchtlichen Vereinfachung gelangt man aber vielfach, wenn man an Stelle der Frequenz- oder Wahrscheinlichkeitsfunktion die Laplace-Transformierte der Frequenzfunktion

$$ {}_x\varphi(t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{itx} $$

oder

$$ {}_x\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{itx}\, dx, \qquad (2) $$

die sogenannte charakteristische Funktion, einführt. In Formel (2) bedeutet t eine reelle Variable und i die imaginäre Einheit. Die charakteristischen Funktionen der wichtigsten, in dieser Arbeit auftretenden Verteilungen sind in der nachstehenden Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

Verteilung	Frequenzfunktion $f(x) =$	Charakteristische Funktion ${}_x\varphi(t) =$
Binomialverteilung	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\{p\, e^{it} + 1 - p\}^n$
Poisson-Verteilung	$\dfrac{e^{-P} P^x}{x!}$	$e^{P(e^{it}-1)}$
Gauss-Verteilung	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$
Pearson-Verteilung Typ III	$\dfrac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)}\, e^{-h_0 x}\, x^{h_0-1}$	$\left[\dfrac{h_0}{h_0 - it}\right]^{h_0}$

Die wichtigsten Sätze über die charakteristische Funktion lauten:

a) Der Inversionssatz

Aus einer gegebenen charakteristischen Funktion lässt sich umgekehrt die zugehörige Frequenz- oder Wahrscheinlichkeitsfunktion bestimmen. Es gelten die Inversionsformeln

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} {}_x\varphi(t)\, e^{-itx}\, dt \tag{3a}$$

und

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} {}_x\varphi(t)\, e^{-itx}\, dt, \tag{3b}$$

je nachdem eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Frequenzfunktion vorliegt; der Ausdruck rechts in der Formel (3b) nimmt nur für x-Werte, die in der Verteilung vorkommen, einen von Null verschiedenen Wert an.

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt stets die Inversionsformel

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = F(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} {}_x\varphi(t)\, \frac{1 - e^{-ixt}}{it}\, dt. \tag{4}$$

Der Inversionssatz zeigt, dass Verteilung und charakteristische Funktion umkehrbar eindeutig einander entsprechen. Aus den Eigenschaften der charakteristischen Funktion darf daher direkt auf die Eigenschaften der zugrunde liegenden Verteilung geschlossen werden; zum Beispiel lässt sich aus dem Umstand, dass der in Formel (3b) rechts auftretende Grenzwert für alle x verschwindet, schliessen, dass die zugrunde liegende Frequenzfunktion für alle x kontinuierlich ist.

b) Der Produktsatz

Der durch das Faltungsintegral (1) gegebene Zusammenhang zwischen den Frequenzfunktionen einer Summe von zwei stochastisch unabhängigen, zufälligen Variablen und ihren Komponenten geht für die entsprechenden charakteristischen Funktionen in ein gewöhnliches Produkt über

$${}_z\varphi(t) = {}_{x_1}\varphi_1(t) \cdot {}_{x_2}\varphi_2(t) \tag{5}$$

Beispiel: Die Summe von zwei stochastisch unabhängigen, zufälligen Variablen $z = x_1 + x_2$, die beide einer Poisson-Verteilung folgen, genügt ihrerseits einer Poisson-Verteilung.

Beweis: Das Produkt der beiden aus Tabelle 1 zu entnehmenden charakteristischen Funktionen

$$_z\varphi(t) = e^{P_1(e^{it}-1)} \cdot e^{P_2(e^{it}-1)} = e^{(P_1+P_2)(e^{it}-1)} \tag{6}$$

ist gleich aufgebaut wie die beiden Faktoren, das heisst die Frequenzfunktion von $z = x_1 + x_2$ ist durch

$$f(z) = \frac{e^{-(P_1+P_2)}(P_1+P_2)^z}{z!} \tag{6'}$$

gegeben. Die direkte Ableitung von Formel (6') — ohne Benützung der charakteristischen Funktion — wäre bedeutend umständlicher.

c) Der Momentensatz

Die Potenzmomente einer Verteilung

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x^k\, dx \tag{7}$$

erhält man aus der charakteristischen Funktion nach der Formel

$$m_k = (i)^{-k}\, {}_x\varphi^{(k)}(t)\,\Big|_{t=0}, \tag{7'}$$

in der ${}_x\varphi^{(k)}(t)\,\Big|_{t=0}$ die k-te Abteilung der charakteristischen Funktion an der Stelle $t = 0$ bedeutet.

d) Die Substitutionsregel

Ersetzt man die zufällige Variable x durch die linear von ihr abhängige neue Variable

$$z = \frac{x - a}{b},$$

so geht die charakteristische Funktion ${}_x\varphi(t)$ in

$$_z\varphi(t) = e^{-\frac{ita}{b}}\, {}_x\varphi\left(\frac{t}{b}\right) \tag{8}$$

über.

Beispiel: Wird in der Poisson-Verteilung (siehe Tabelle 1) die zufällige Variable x ersetzt durch

$$z = \frac{x - P}{\sqrt{P}},$$

so erhält man an Stelle der charakteristischen Funktion

$$_x\varphi(t) = e^{P(e^{it}-1)}$$

die charakteristische Funktion

$$_z\varphi(t) = e^{-itP^{\frac{1}{2}}} e^{P\left(e^{itP^{-\frac{1}{2}}}-1\right)} \tag{9}$$

e) Der Grenzwertsatz

Strebt eine Folge von charakteristischen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gleichmässig in jedem endlichen t-Intervall gegen eine Grenzfunktion φ_∞, so streben die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen gegen die Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche der Grenzfunktion φ_∞ entspricht.

Die für die Gültigkeit des Satzes wesentliche Bedingung der gleichmässigen Konvergenz ist bei allen in dieser Arbeit auftretenden Grenzübergängen erfüllt. Die für die charakteristische Funktion abgeleitete Grenzfunktion darf somit stets auf die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion übertragen werden.

Beispiel: Ableitung der Poisson-Verteilung als Grenzfunktion der Binomialverteilung:

Nach Tabelle 1 lautet die charakteristische Funktion der Binomialverteilung

$$_x\varphi(t) = \{1 + p(e^{it} - 1)\}^n$$

Lässt man die Anzahl der Züge n gegen ∞ und gleichzeitig die Grundwahrscheinlichkeit p gegen Null streben, und zwar so, dass der Mittelwert $np = P$ festbleibt, so ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} {}_x\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} \left[1 + \frac{p}{m}(e^{it} - 1)\right]^{nm} = e^{P(e^{it}-1)}, \tag{10'}$$

der gemäss Tabelle 1 mit der charakteristischen Funktion der Poisson-Verteilung identisch ist, dass heisst es ist

$$\lim_{m\to\infty}\binom{nm}{x}\left(\frac{p}{m}\right)^x\left(1-\frac{p}{m}\right)^{nm-x}=\frac{e^{-P}P^x}{x!} \tag{10}$$

II.

Die Frequenzfunktion der Schadenfälle

Die Anzahl der Schadenfälle, die in einem Versicherungsbestand während einer Beobachtungsperiode auftreten, stimmt nur selten mit der erwartungsmässigen Anzahl überein; im allgemeinen tritt vielmehr irgendeine vom Erwartungswert P abweichende Anzahl x von Schadenfällen auf. Jeder dieser Schadenszahlen kann die Wahrscheinlichkeit $f(x, P)$ zugeordnet werden, mit der sie zu erwarten ist; die Wahrscheinlichkeiten $f(x, P)$ bilden dann die Frequenzfunktion der zufälligen Variablen x, die den Bedingungen

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x,P)=1 \quad \text{und} \quad \sum_{x=0}^{\infty} x f(x,P)=P$$

genügt.

Die Frequenzfunktion $f(x, P)$ kann grundsätzlich auf zwei Arten bestimmt werden, nämlich empirisch durch Ausgleichung von Beobachtungen oder theoretisch unter Benützung gewisser Annahmen über die Eigenschaften der Schadenswahrscheinlichkeiten. Bei der letzteren Methode ist die Brauchbarkeit der getroffenen Annahmen nachträglich noch zu überprüfen, z. B. indem die theoretische Frequenzfunktion mit empirisch gefundenen verglichen wird. Zeigt dieser Vergleich eine einigermassen befriedigende Übereinstimmung zwischen der theoretischen und der empirischen Funktion, so hat man — wie Eggenberger in der Arbeit [19] mit Recht hervorhebt — mehr erreicht als bei einer noch so erfolgreichen analytischen Ausgleichung der empirischen Funktion. Die bei der Ableitung der theoretischen Frequenzfunktion getroffenen Annahmen dürfen dann — zu mindest näherungsweise — als die Gesetze gelten, welche die betreffenden Schadenswahrscheinlichkeiten beherrschen. Die Kenntnis dieser Gesetze erlaubt es, Vorgänge zu beschreiben, über die noch keine Beobachtungen vorliegen; zum Beispiel lässt sich zum voraus angeben,

wie die Frequenzfunktion $f(x, P)$ sich verändern wird, wenn der Erwartungswert P wächst.

In diesem Kapitel soll die Frequenzfunktion der Schadenfälle unter drei verschiedenen Annahmen nach der theoretischen Methode bestimmt werden. Unter *a)* wird angenommen, die Schadens- oder Grundwahrscheinlichkeiten verhalten sich wie die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannten Urnenwahrscheinlichkeiten. Anschliessend werden diese Annahmen unter *b)* in dem Sinne erweitert, dass ein engerer Anschluss an die tatsächlichen Gegebenheiten im Versicherungswesen erreicht wird. Insbesondere wird ein kontinuierlicher Ablauf des Risikogeschäftes vorausgesetzt, bei dem die unter Risiko stehenden Bestände und die Grundwahrscheinlichkeiten sich im Verlaufe der Zeit planmässig verändern. Im Abschnitt *c)* wird schliesslich die noch allgemeinere Annahme getroffen, dass die Grundwahrscheinlichkeiten selbst gewissen zufallartigen Schwankungen unterworfen sind.

a) Feste Grundwahrscheinlichkeiten und das klassische Urnenschema

Das klassische Urnenschema von Bernoulli besteht aus einer einzigen Urne, die mit R roten und S schwarzen, insgesamt N Kugeln gefüllt ist. Aus dieser Urne werden blindlings n Kugeln gezogen, wobei die gezogenen Kugeln jeweils zurückgelegt werden. Die Wahrscheinlichkeit, insgesamt x schwarze Kugeln zu ziehen, ist dann durch die Binomialverteilung

$$f\left(x, n\,\frac{S}{N}\right) = \binom{n}{x}\left(\frac{S}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{S}{N}\right)^{n-x} \tag{11}$$

gegeben.

Dieses Urnenschema lässt sich auf die Verhältnisse bei einem Versicherungsbetrieb übertragen; die Anzahl n der insgesamt gezogenen Kugeln entspricht der Anzahl der unter Risiko stehenden Versicherungen und die Anzahl x der gezogenen schwarzen Kugeln der Anzahl der eingetretenen Schadenfälle. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{S}{N}$, eine schwarze Kugel zu ziehen, geht ferner in die Grundwahrscheinlichkeit für den Eintritt des Schadenfalles über. Unter den getroffenen Voraussetzungen ist somit die Binomialverteilung (11) die gesuchte Frequenzfunktion der Schadenfälle.

In der Praxis ist die Anzahl der unter Risiko stehenden Versicherungen n gewöhnlich eine grosse und die Grundwahrscheinlichkeit p eine kleine Zahl. Die Binomialverteilung nähert sich unter diesen Umständen der unter I *e)* abgeleiteten Poisson-Verteilung, das heisst es gilt die Näherungsformel

$$f(x, P) \sim \frac{e^{-P} P^x}{x!}. \tag{12}$$

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ferner bekannt, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung (11) für grosse n und festes p in die Gaussverteilung

$$F(x, np) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-np}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x - np}{\sigma}\right) \tag{13}$$

übergeht. Die Streuung dieser Gaussverteilung beträgt

$$\sigma^2\{x - np\} = \sum_{x=0}^{n} f(x, np)(x - np)^2 = np(1-p) = P(1-p). \tag{13a}$$

Die Gaussverteilung (13) weist die gleiche Streuung auf wie die Binomialverteilung oder kürzer, sie weist «Bernoullische Dispersion» auf.

Die Verteilungen (11), (12) und (13) weichen in der Regel nur wenig voneinander ab; die Formeln (11), (13) und (13a), in denen die Anzahl der Versicherten n und die Grundwahrscheinlichkeit p auftreten, gehören zu den wesentlichen Grundlagen der *individuellen* Risikotheorie.

b) Kontinuierlicher Risikoprozess und planmässig veränderliche Grundwahrscheinlichkeiten

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Frequenzfunktionen tragen den wirklichen Verhältnissen im Versicherungswesen zu wenig Rechnung. In diesem Abschnitt werden daher allgemeinere, den wirklichen Gegebenheiten näher kommende Annahmen gewählt.

Zunächst wird angenommen, dass über Eintritt oder Nichteintritt eines Schadenfalles während einer Beobachtungsperiode nicht nur — wie beim klassischen Urnenschema — durch eine einzige Ziehung

entschieden wird, sondern dass diese Ziehungen in jedem Zeitelement fortgesetzt erfolgen. Auf diese Weise wird berücksichtigt, dass das versicherte Risiko kontinuierlich auf die unter Risiko stehenden Versicherungen einwirkt. Ferner wird vorausgesetzt, dass sowohl die Grundwahrscheinlichkeiten als auch die unter Risiko stehenden Bestände sich planmässig verändern, das heisst Funktionen der Zeit t sind. Im Zeitelement zwischen t und $t + dt$ stehen zum Beispiel R_t Versicherungen unter Risiko und die mittlere Grundwahrscheinlichkeit für den Eintritt des Schadenfalles betrage $\mu_t\, dt$. In diesem Zeitelement sind somit

$$R_t \mu_t\, dt$$

Schadenfälle und im ganzen Zeitraum zwischen 0 und T, welcher einer Beobachtungsperiode entsprechen möge,

$$P = \int_0^T R_t \mu_t\, dt \tag{14}$$

Schadenfälle zu erwarten.

Die gesamte Beobachtungsperiode zwischen 0 und T wird in m Teilperioden so aufgeteilt, dass in jeder Teilperiode $\frac{P}{m}$ Schadenfälle zu erwarten sind. Diese Teilperioden können zeitlich verschieden lang sein. Wählt man m gross genug, so ist in jeder Teilperiode — einem sogenannten Risikoelement — nur ein oder gar kein Schadenfall zu erwarten. Die Wahrscheinlichkeiten $f(0, dP)$ und $f(1, dP)$, welche die Frequenzfunktion der Schadenfälle in einem Risikoelement bilden, ergeben sich aus dem Erwartungswert

$$\frac{P}{m} = dP = f(0, dP) \cdot 0 + f(1, dP) \cdot 1 .$$

Es gelten somit für die Frequenzfunktion in einem Risikoelement die einfachen Beziehungen:

$$f(x, dP) = \begin{cases} 1 - dP & \text{für} \quad x = 0 \\ dP & \text{für} \quad x = 1 \\ 0 & \text{für} \quad x \neq \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{cases} \tag{15}$$

Der Frequenzfunktion (15) für ein Risikoelement entspricht die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} {}_x\varphi(t, dP) &= \sum_{(x)} f(x, dP)\, e^{itx} \\ &= 1 + dP(e^{it} - 1). \end{aligned} \tag{15'}$$

Die Anzahl der Schadenfälle während der ganzen Beobachtungsperiode zwischen 0 und T ist gleich der Summe der Schadenfälle, die in allen Risikoelementen aufgetreten sind. Für die ganze Beobachtungsperiode erhält man daher die charakteristische Funktion mit Hilfe des Produktsatzes aus Formel (15')

$${}_x\varphi(t, P) = [1 + dP(e^{it} - 1)]^m,$$

wobei die Schadenzahlen in den verschiedenen Risikoelementen als stochastisch unabhängig vorausgesetzt werden. Setzt man für dP wieder $\frac{P}{m}$ und geht man zum Grenzwert $m \to \infty$ über, so erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} {}_x\varphi(t, P) &= \lim_{m \to \infty} \left[1 + \frac{P}{m}(e^{it} - 1) \right]^m \\ &= e^{P(e^{it}-1)}, \end{aligned} \tag{12'}$$

der nach Tabelle 1 die charakteristische Funktion, welche der Poisson-Verteilung zugeordnet ist, darstellt. Daraus folgt, dass die Frequenzfunktion für die ganze Beobachtungsperiode zwischen 0 und T mit der Poisson-Verteilung

$$f(x, P) = \frac{e^{-P} P^x}{x!} \tag{12}$$

identisch ist, die sich nach den Annahmen des Abschnittes *a)* als Näherungslösung ergeben hat, während sie hier die genaue Lösung darstellt. Die allgemeineren Annahmen des Abschnittes *b)* bewirken somit überraschenderweise keine wesentliche Veränderung der resultierenden Frequenzfunktion. Zu beachten ist insbesondere, dass der Verlauf der Funktion $R_t\, \mu_t$ während der Zeit $0 \leqslant t \leqslant T$ und die Länge dieser Zeitstrecke für die Frequenzfunktion der Schadenfälle

bedeutungslos sind. Alle Funktionen $R_t\,\mu_t$, die gemäss Formel (14) zum gleichen Erwartungswert P führen, ergeben die gleiche Frequenzfunktion (12). Man kann deshalb in der Risikotheorie an Stelle der Zeitvariablen die Grösse P benützen und den Zeitraum zwischen 0 und T lediglich «Periode P» nennen.

Die Frequenzfunktion (12) hängt nur vom Parameter P ab; es gilt somit unter den getroffenen Voraussetzungen der grundlegende Satz: *Die Frequenzfunktion der Schadenfälle ist durch die erwartungsmässige Anzahl der Schadenfälle P vollständig bestimmt.*

Dieser Satz bildet eine der wesentlichen Grundlagen der *kollektiven* Risikotheorie. Er erlaubt es, von der individuellen Zusammensetzung und vom Umfang des Versicherungsbestandes und schliesslich vom zeitlichen Verlauf des Risikos zu abstrahieren.

Die Streuung der Poisson-Verteilung

$$\sigma^2(x-P) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-P}P^x}{x!}(x-P)^2 = P \qquad (12a)$$

ist mit dem Mittelwert P identisch; diese Eigenschaft wird in dieser Arbeit als «Poissonsche Dispersion» bezeichnet. Die Streuung der Binomialverteilung [siehe Formel (13a)], die sogenannte «Bernoullische Dispersion» ist etwas kleiner als die «Poissonsche Dispersion». Der Unterschied der beiden Streuungen ist jedoch in der Regel ganz unbedeutend.

Wie die Binomialverteilung für grosse n, so geht auch die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung für grosse P in eine Grenzfunktion über. Um diese Grenzfunktion ableiten zu können, muss die Hilfsvariable

$$z = \frac{x-P}{\sqrt{P}}$$

eingeführt werden. Nach Formel (9) gilt dann für die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} {}_z\varphi(t,P) &= e^{-itP^{\frac{1}{2}}}\, e^{P\left(e^{itP^{-\frac{1}{2}}}-1\right)} \\ &= e^{-itP^{\frac{1}{2}}+P\left[itP^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2!}(it)^2P^{-1}+\frac{1}{3!}\ldots\right]}. \end{aligned}$$

Lässt man rechts P gegen Unendlich streben, so erhält man ohne weiteres die Grenzfunktion

$$\lim_{P\to\infty} {}_z\varphi(t, P) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{16'}$$

aus der nach dem Grenzwertsatz für die Wahrscheinlichkeitsfunktion die Grenzwertformel (siehe Tabelle 1)

$$\lim_{P\to\infty} F(z, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z) \tag{16}$$

folgt.

Für grosse P geht somit die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung in eine Gauss-Verteilung mit «Poissonscher Dispersion» über, während aus der Binomialverteilung für grosse n eine Gauss-Verteilung mit «Bernoullischer Dispersion» hervorgeht [siehe Formel (13)].

c) Zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten und ein erweitertes Urnenschema

1. Die unter *a)* und *b)* getroffenen Annahmen lassen den Umstand ausser acht, dass die Grundwahrscheinlichkeiten nicht nur planmässig, sondern auch zufallsartig ihren Wert ändern können. Diese in fast allen Versicherungszweigen mehr oder weniger deutlich zu beobachtende Erscheinung ist besonders in der Invaliditäts-, Feuer- und Hagelversicherung bekannt. Die innere Struktur dieses Vorganges lässt sich durch das nachstehend beschriebene, erweiterte Urnenschema veranschaulichen.

Gegeben sei eine Reihe von k Urnen, die alle mit roten und schwarzen insgesamt je N Kugeln gefüllt seien, wobei das Mischungsverhältnis von Urne zu Urne variiert; in der r-ten Urne seien zum Beispiel S_r schwarze und $R_r = N - S_r$ rote Kugeln enthalten. Neben diesen k Urnen, sie seien Sekundärurnen genannt, ist noch eine Primärurne vorhanden, in der H Lose enthalten sind, von denen je h_r der r-ten Sekundärurne entsprechen. Beim erweiterten Urnenschema wird zunächst aus der Primärurne ein Los gezogen und anschliessend aus der dem gezogenen Los entsprechenden Sekundärurne n Kugeln (mit Zurücklegen). Die Wahrscheinlichkeit, x schwarze Kugeln zu ziehen,

berechnet sich unter diesen Voraussetzungen als gewogenes Mittel der Frequenzfunktionen in allen Sekundärurnen, wobei die Wahrscheinlichkeiten, die r-te Sekundärurne auszulosen, als Gewichte auftreten; es ist somit beim erweiterten Urnenschema

$$f(x, P) = \sum_{r=1}^{k} \frac{h_r}{H} \binom{n}{x} \left(\frac{S_r}{N}\right)^x \left(1 - \frac{S_r}{N}\right)^{n-x} \tag{17}$$

die an die Stelle der Binomialverteilung (11) tretende Frequenzfunktion der Schadenfälle, in der

$$P = \sum_{r=1}^{k} \frac{h_r}{H} \frac{n S_r}{N}$$

die erwartungsmässige Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln bedeutet. Ersetzt man in allen Sekundärurnen die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung, das heisst, geht man zu den im Abschnitt *b)* eingeführten allgemeineren Voraussetzungen über, so gelangt man zur Frequenzfunktion

$$f(x, P) = \int_0^\infty \frac{e^{-Pq}(Pq)^x}{x!} h(q)\, dq, \tag{17a}$$

in der $h(q)$ eine kontinuierliche Frequenzfunktion der relativen Schwankungen q der Grundwahrscheinlichkeiten bedeutet, die an Stelle der oben angenommenen Primärwahrscheinlichkeiten $\frac{h_r}{H}$ tritt und Primärverteilung genannt werden soll; $h(q)\, dq$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit eine Sekundärurne auszulosen, bei der zwischen Pq und $P(q + dq)$ schwarze Kugeln erwartet werden. Für diese Primärverteilung wird im folgenden die Pearson-Verteilung des Typs III

$$h(q) = \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} e^{-h_0 q} q^{h_0 - 1}\, dq \tag{18}$$

angenommen, die in plausibler Weise einen Definitionsbereich der zufälligen Variablen q zwischen Null und Unendlich und einen Mittelwert Eins aufweist. Die analytischen Eigenschaften von Formel (18) erleichtern im übrigen die mathematischen Entwicklungen wesentlich.

Der einzige in Formel (18) auftretende Parameter der Verteilung, h_0, ist, wie aus der nachstehenden Formel hervorgeht, gleich dem reziproken Wert der Streuung der Primärverteilung (18)

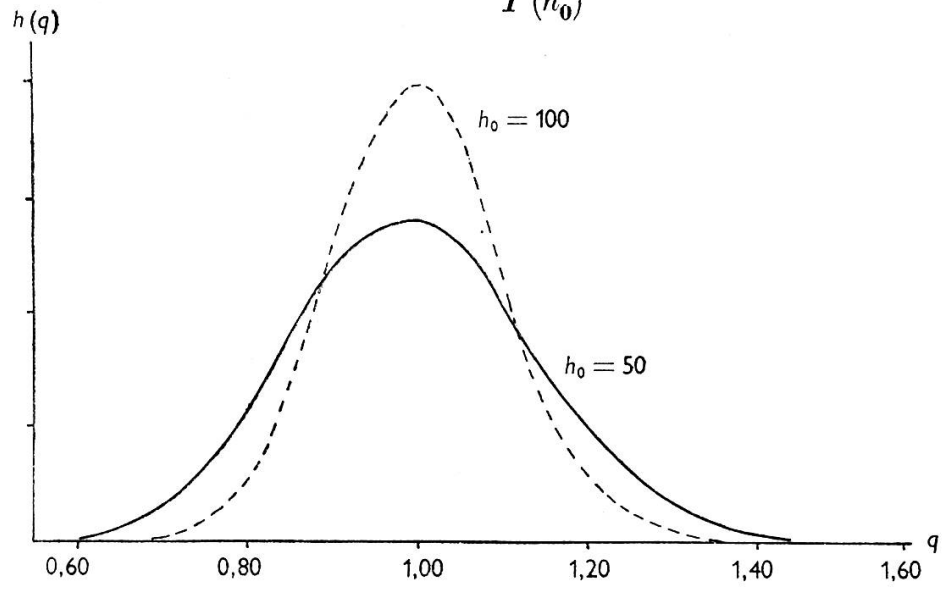
$$\sigma^2\{q-1\} = \int_0^\infty \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} e^{-h_0 q} q^{h_0-1} (q-1)^2 dq = \frac{1}{h_0}.$$

Die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten fallen somit um so weniger ins Gewicht, je grösser der Parameter h_0 ist. Dem Grenzwert $h_0 = \infty$ entspricht schliesslich der Grenzfall von festen Grundwahrscheinlichkeiten. In der Figur 1 sind einige Primärverteilungen für verschiedene Werte von h_0 graphisch dargestellt; diese Verteilungskurven gehören alle zum glockenförmigen Typus und verlaufen nahezu symmetrisch um den Mittelwert

$$\bar{q} = \int_0^\infty \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} e^{-h_0 q} q^{h_0-1} q\, dq = 1.$$

Fig. 1 — Primärverteilungen

$$h(q) = \frac{h_0^{h_0} e^{-h_0 q} q^{(h_0-1)}}{\Gamma(h_0)}$$



Setzt man die Primärverteilung (18) in die Formel (17a) für die Frequenzfunktion der Schadenfälle ein, so ergibt sich folgende Ableitung:

$$
{}^{(h_0)}f(x, P) = \int_0^\infty \frac{e^{-Pq}(Pq)^x h_0^{h_0} e^{-h_0 q} q^{h_0-1}\, dq}{x!\,\Gamma(h_0)}
$$

$$
= \frac{h_0^{h_0} P^x}{x!\,\Gamma(h_0)} \int_0^\infty e^{-q(h_0+P)} q^{x+h_0-1}\, dq .
$$

Um das Integral rechts auswerten zu können, wird

$$
q' = q(h_0 + P)
$$

substituiert:

$$
{}^{(h_0)}f(x, P) = \frac{h_0^{h_0} P^x}{x!\,\Gamma(h_0)\,(h_0+P)^{x+h_0}} \int_0^\infty e^{-q'} q'^{x+h_0-1}\, dq' .
$$

Das neue Integral ist gleich der vollständigen Gammafunktion $\Gamma(x + h_0)$; berücksichtigt man noch die Beziehung

$$
\Gamma(x + h_0) = (x + h_0 - 1)!,
$$

so resultiert schliesslich für die Frequenzfunktion der Schadenfälle bei zufallsartigen schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten der Ausdruck

$$
{}^{(h_0)}f(x, P) = \binom{x + h_0 - 1}{x} \left(\frac{P}{h_0 + P}\right)^x \left(\frac{h_0}{h_0 + P}\right)^{h_0}. \qquad (19)
$$

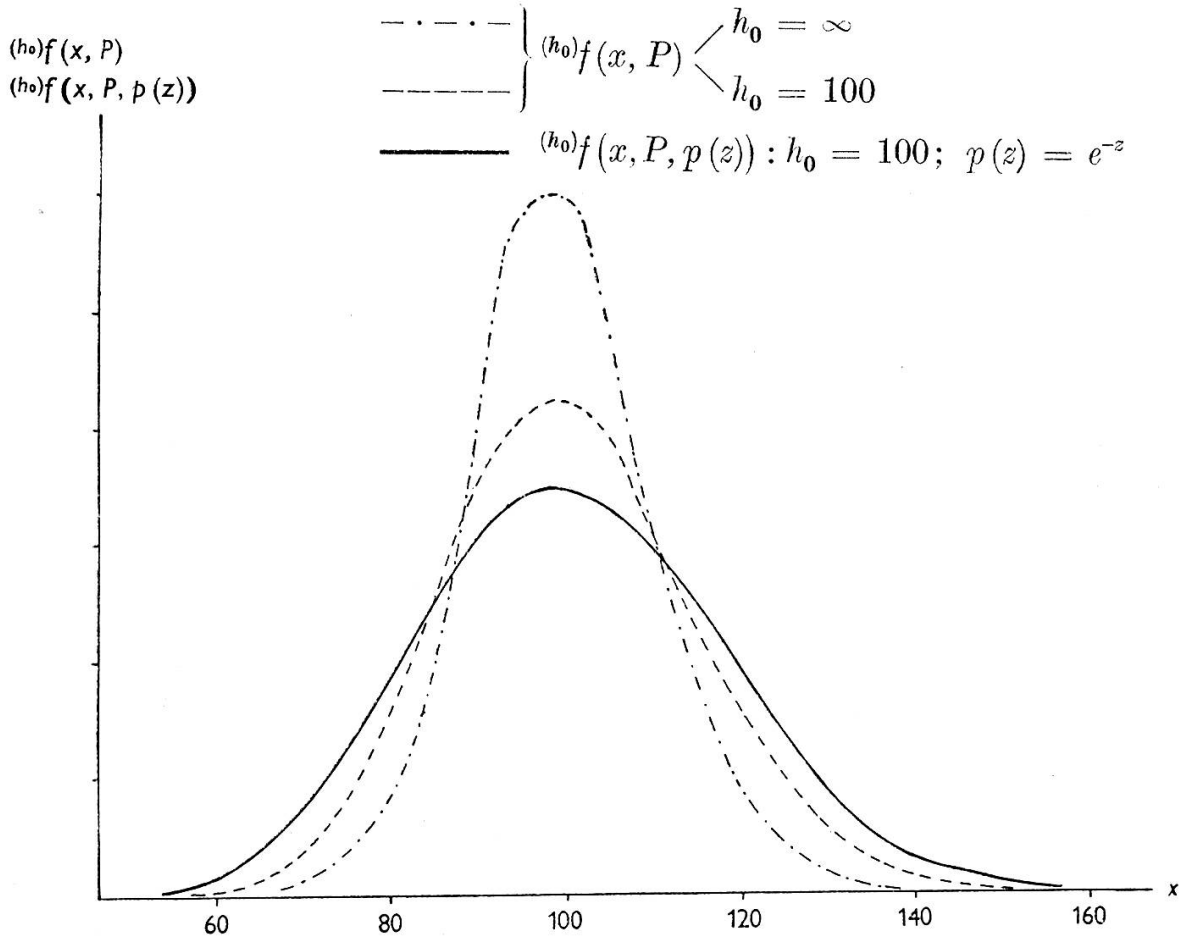
Die Frequenzfunktionen (19) sind glockenförmig und weisen eine leichte Asymmetrie auf (siehe Figur 2). Für $h_0 = \infty$ gehen sie in die Poisson-Verteilung (12) über.

Die Frequenzfunktion (19) ist identisch mit der von Eggenberger aus dem Urnenschema für Wahrscheinlichkeitsansteckung für «seltene Ereignisse» abgeleiteten Frequenzfunktion; aus diesem vorerst überraschend anmutenden Resultat lässt sich schliessen, dass Wahrscheinlichkeitsansteckung sich gleich auswirkt wie zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten und ferner, dass Wahrscheinlichkeitsansteckung zu gewissen Veränderungen in den Grundwahrscheinlichkeiten führt, die gerade der Primärverteilung (18) genügen.

Fig. 2 – Frequenzfunktionen der Schadenfälle und des Gesamtschadens [1])

$$ {}^{(h_0)}f(x, P) = \binom{h_0 - 1 + x}{x} \left(\frac{P}{h_0 + P}\right)^x \left(\frac{h_0}{h_0 + P}\right)^{h_0} $$

$$ {}^{(h_0)}f\left(x, P, p(z)\right) = \sum_{r=0}^{\infty} {}^{(h_0)}f(r, P)\, p^{(r)}(x) $$



2. Die charakteristische Funktion, welche der Frequenzfunktion (19) entspricht, lässt sich nach der gleichen Methode bestimmen wie die Frequenzfunktion selbst. Es ist

$$ {}^{(h_0)}_{x}\varphi(t, P) = \int_0^{\infty} \frac{e^{Pq(e^{it}-1)}\, h_0^{h_0}\, e^{h_0 q}\, q^{h_0-1}\, dq}{\Gamma(h_0)} $$

$$ = \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} \int_0^{\infty} e^{-q[h_0 - P(e^{it}-1)]}\, q^{h_0-1}\, dq . $$

[1]) Siehe Kap. IV.

Unter Benützung der Substitution $q' = q[h_0 - P(e^{it} - 1)]$ geht das Integral rechts in die vollständige Gammafunktion über

$$
\begin{aligned}
{}^{(h_0)}_{x}\varphi(t, P) &= \frac{h_0^{h_0}\,\Gamma(h_0)}{\Gamma(h_0)\,[h_0 - P(e^{it} - 1)]^{h_0}} \int_0^{\infty} e^{-q'}\, q'^{h_0 - 1}\, dq' \\
&= \frac{h_0^{h_0}\,\Gamma(h_0)}{\Gamma(h_0)\,[h_0 - P(e^{it} - 1)]^{h_0}}\,.
\end{aligned}
$$

Nach einer einfachen Umformung erhält man schliesslich für die der Frequenzfunktion (19) zugeordnete charakteristische Funktion den Ausdruck

$$
{}^{(h_0)}_{x}\varphi(t, P) = \left[1 - \frac{P}{h_0}(e^{it} - 1)\right]^{-h_0}. \tag{20}
$$

3. Wichtige Masszahlen für die Frequenzfunktionen sind ihre Potenzmomente, die sich nach dem Momentensatz [Formel (7′)] durch Differenzieren und anschliessendes Nullsetzen von t berechnen lassen. Diese an sich einfache, aber etwas umständliche Rechnung wird hier unterdrückt; schliesslich erhält man für das erste Moment um Null oder den Mittelwert

$$
m_1 = \sum_{x=0}^{\infty} {}^{(h_0)}f(x, P)\, x = P
$$

und für das zweite Moment um den Mittelwert oder die Streuung

$$
\begin{aligned}
m_2' = \sigma^2\{x - P\} &= \sum_{x=0}^{\infty} {}^{(h_0)}f(x, P)\,(x - P)^2 \\
&= P + P^2 h_0^{-1}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Die Streuung der Verteilung (19) setzt sich somit aus zwei Komponenten zusammen, nämlich aus der Streuung P der Poisson-Verteilung und einem stets positiven Glied, das proportional ist der Streuung h_0^{-1} der Primärverteilung (18). Die Frequenzfunktion (19), die unter der Annahme von zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten abgeleitet worden ist, weist demnach gegenüber der Poissonschen Dispersion (Streuung = Mittelwert = P) stets eine übernormale Dispersion auf. Das die übernormale Dispersion bewirkende zweite Glied fällt um so mehr ins Gewicht, je grösser der Erwartungswert P ist; umgekehrt wirkt es sich nur wenig aus, wenn P klein und, was in der Regel der Fall ist, wenn ausserdem h_0 verhältnismässig gross ist. Bei kleinen

Werten von P, das heisst bei kleinen Versicherungsbeständen, dürfen daher die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten in der Regel vernachlässigt werden.

4. Bei festen Grundwahrscheinlichkeiten kann jede beliebige Zeitstrecke als Beobachtungsperiode gewählt werden; in der Frequenzfunktion der Schadenfälle — der Poisson-Verteilung (12) — ist lediglich der entsprechende Erwartungswert P zu berücksichtigen. Vereinigt man n solche Perioden zu einer einzigen Periode, so bleibt die Frequenzfunktion eine Poisson-Verteilung, lediglich der Erwartungswert P geht in nP über [siehe auch Formel (6)].

Etwas anders liegen die Verhältnisse bei zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten, wo die Grundwahrscheinlichkeiten von Periode zu Periode ihren Wert ändern können. Die Wahl der Beobachtungsperiode kann hier nicht willkürlich erfolgen, weil beim erweiterten Urnenschema die Grundwahrscheinlichkeiten immer während einer gewissen Zeitstrecke — der Einheitsperiode — fest bleiben, wobei die Höhe der Grundwahrscheinlichkeiten zu Beginn jeder Einheitsperiode neu ausgelost wird. Fasst man die Beobachtungen von n Einheitsperioden zusammen, so erhält man eine neue Frequenzfunktion ${}^{(h_0)}f_n(x, P)$, der die charakteristische Funktion ${}^{(h_0)}_x\varphi_n(t, P)$ zugeordnet ist. Diese charakteristische Funktion lässt sich ohne weiteres mit Hilfe des Produktsatzes [Formel (5)] ableiten, weil die Beobachtungen aus den verschiedenen Perioden stochastisch unabhängig sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^{(h_0)}_x\varphi_n(x, P) &= \left[{}^{(h_0)}_x\varphi_1(t, P)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{P}{h_0}(e^{it} - 1)\right]^{-h_0 n} \\ &= \left[1 - \frac{Pn}{h_0 n}(e^{it} - 1)\right]^{-h_0 n}. \end{aligned} \tag{22'}$$

Die letzte Formel weist die gleiche Form auf wie die charakteristische Funktion der Einheitsperiode, nur dass P in Pn und h_0 in $h_0 n$ übergeht. Dieser einfache Zusammenhang zwischen der Frequenzfunktion für eine und n Einheitsperioden lässt sich somit in der Form

$${}^{(h_0)}f_n(x, P) = {}^{(nh_0)}f_1(x, nP) \tag{22}$$

schreiben.

Formel (22) gilt unter der Voraussetzung, dass während der Gesamtperiode, die dem Erwartungswert nP entspricht, der Wert der Grundwahrscheinlichkeiten n-mal neu ausgelost wird. Würden dagegen die Grundwahrscheinlichkeiten während der Gesamtperiode nur einmal ausgelost, so würde sich die gleiche Frequenzfunktion ergeben, nur dass an Stelle von (nh_0) der Wert h_0 selbst treten würde. Aus diesem Sachverhalt lässt sich ein einfaches Kriterium ableiten, ob die einer Untersuchung zugrunde liegenden Beobachtungsperioden als unabhängige Einheitsperioden betrachtet werden dürfen oder nicht. Im ersten Fall geht h_0 bei der Zusammenfassung von Einheitsperioden in nh_0 über, während im zweiten Fall, wenn n Beobachtungsperioden eine Einheitsperiode bilden, h_0 seinen Wert beibehält. Ergibt sich jedoch bei der Zusammenfassung von n Beobachtungsperioden ein Wert h_0' zwischen h_0 und nh_0, so ist das ein Anzeichen dafür, dass die Grundwahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Beobachtungsperioden teilweise voneinander abhängig sind. Dieser Fall tritt auf, wenn eine Mischung zwischen den oben behandelten Grenzfällen vorliegt, zum Beispiel, wenn Beobachtungen zusammengefasst werden, die verschieden lange, unabhängige Einheitsperioden aufweisen.

5. Aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche der Frequenzfunktion (19) entspricht,

$$^{(h_0)}F(x, P) = \sum_{x=0}^{x} {}^{(h_0)}f(x, P)$$

lassen sich verschiedene Grenzfunktionen ableiten. Zu interessanten Resultaten führen vor allem folgende drei Grenzübergänge:

$$\alpha) \quad P \to \infty; \quad h_0 < \infty \quad \text{bleibt fest}$$

$$\beta) \quad P \to \infty; \quad \frac{P}{h_0} = \chi \quad \text{bleibt fest}$$

$$\gamma) \quad P \to m\,dP; \quad \begin{matrix} dP \to 0 \\ m \to \infty \end{matrix}$$

Die beiden ersten Grenzübergänge entsprechen dem Gauss/Laplaceschen und der dritte dem Poissonschen Grenzübergang in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bei der Ableitung von Grenzverteilungen muss in der Regel durch eine geeignete Substitution eine neue zufällige Variable eingeführt werden. Beispielsweise muss bei der Ableitung der Gauss-Verteilung als Grenzfunktion der Poisson-Verteilung für grosse P die Hilfsvariable

$$z = \frac{x - P}{\sqrt{P}}$$

eingeführt werden [siehe Formeln (19), (16′) und (16)].

Beim *Grenzübergang α)*, der auftritt, wenn innerhalb einer Periode der Erwartungswert P ins Unendliche wächst, empfiehlt es sich, die Hilfsvariable $q = \frac{x}{P}$ einzuführen. Unter Benützung der Substitutionsregel bei charakteristischen Funktionen [siehe Formel (8)] bestimmt man vorerst aus Formel (20) die charakteristische Funktion

$${}^{(h_0)}_{q}\varphi(t, P) = \left[1 - \frac{P}{h_0}\left(e^{\frac{it}{P}} - 1\right)\right]^{-h_0}$$

und entwickelt die auftretende Exponentialfunktion in die stets konvergente Exponentialreihe

$${}^{(h_0)}_{q}\varphi(t, P) = \left[1 - \frac{P}{h_0}\left(\frac{it}{P} + \frac{1}{2!}\frac{(it)^2}{P^2} + \dots\right)\right]^{-h_0}.$$

Geht man schliesslich zum Grenzwert $P \to \infty$ über, so erhält man

$$\lim_{P\to\infty} {}^{(h_0)}_{q}\varphi(t, P) = \left(\frac{h_0}{h_0 - it}\right)^{h_0}. \tag{23′}$$

Gemäss Tabelle 1 ist der Ausdruck rechts in Formel (23′) die charakteristische Funktion der Primärverteilung (18). Nach dem Grenzwertsatz erhält man somit für die Wahrscheinlichkeitsfunktion die Grenzfunktion

$$\lim_{P\to\infty} {}^{(h_0)}F(q, P) = \int_0^q \frac{{h_0}^{h_0} e^{-h_0 q} q^{h_0 - 1}\, dq}{\Gamma(h_0)}, \tag{23}$$

welche die unvollständige Gammafunktion darstellt, die mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Primärverteilung (18) identisch ist. Der Grenzübergang *α)* [$P \to \infty$, h_0 fest] führt somit zur Primärverteilung als Grenzfunktion.

Der *Grenzübergang β)* tritt auf, wenn bei endlichem Erwartungswert P pro Periode, unendlich viele Perioden vereinigt werden. Nach Formel (22) streben in diesem Fall P und h_0 proportional gegen Unendlich, wobei das Verhältnis $\chi = \frac{P}{h_0}$ fest bleibt. Zur Ableitung der Grenzverteilung führt man an Stelle von x die Hilfsvariable

$$z = \frac{x - P}{\sqrt{P(1+\chi)}}$$

ein. Mit Hilfe der Substitutionsregel [siehe Formel (8)] ermittelt man zunächst die charakteristische Funktion

$${}^{(h_0)}_{z}\varphi(t, P) = \left[1 - \chi\left(e^{\frac{it}{\sqrt{P(1+\chi)}}} - 1\right)\right]^{-\frac{P}{\chi}} e^{-\frac{itP}{\sqrt{P(1+\chi)}}}$$

$$= \left\{\left[1 - \chi\left(e^{\frac{it}{\sqrt{P(1+\chi)}}} - 1\right)\right] e^{\frac{it\chi}{\sqrt{P(1+\chi)}}}\right\}^{-\frac{P}{\chi}}$$

und führt anschliessend die stets konvergente Exponentialreihe ein:

$${}^{(h_0)}_{z}\varphi(t, P) = \left\{\left[1 - \chi\left(\frac{it}{\sqrt{P(1+\chi)}} + \frac{1}{2!}\frac{(it)^2}{P(1+\chi)} \dots\right)\right]\left[1 + \frac{it\chi}{\sqrt{P(1+\chi)}} + \frac{1}{2!} \dots\right]\right\}^{-\frac{P}{\chi}}$$

$$= \left\{1 - \frac{(it)^2}{2!}\frac{\chi}{P} \dots\right\}^{-\frac{P}{\chi}}.$$

Lässt man schliesslich $P \to \infty$ streben, so resultiert für die charakteristische Funktion die Grenzfunktion

$$\lim_{\substack{P\to\infty \\ \frac{P}{h_0}=\chi}} {}^{(h_0)}_{z}\varphi(t, P) = e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad (24')$$

für die Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt somit (siehe Tabelle 1)

$$\lim_{\substack{P\to\infty \\ \frac{P}{h_0}=\chi}} {}^{(h_0)}F(z, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z). \qquad (24)$$

Der Grenzübergang $\beta)$ $\left[P \to \infty, \frac{P}{h_0} \text{ fest} \right]$ führt demnach wie bei festen Grundwahrscheinlichkeiten zu einer Gauss-Verteilung als Grenzfunktion. Zu beachten ist jedoch, dass die Hilfsvariable z bei festen Grundwahrscheinlichkeiten den Wert

$$z = \frac{x - P}{\sqrt{P}}$$

und bei zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten den Wert

$$z = \frac{x - P}{\sqrt{P(1 + \chi)}}$$

aufweist. Würden die Hilfsvariablen z in beiden Fällen gleich angesetzt, so würden die Streuungen der beiden Gauss-Verteilungen im Verhältnis $1 : (1 + \chi)$ stehen, oder mit anderen Worten, die Gauss-Verteilung bei festen Grundwahrscheinlichkeiten weist Poissonsche, bei zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten übernormale Dispersion auf. Die in der statistischen Praxis mitunter auftretenden Gauss-Verteilungen mit übernormaler Dispersion lassen sich daher mit Hilfe des Grenzüberganges $\beta)$ auf zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten zurückführen.

Bemerkenswert ist, dass die Grenzübergänge $\alpha)$ und $\beta)$, die bei festen Grundwahrscheinlichkeiten beide zu ein und derselben Gauss-Verteilung als Grenzfunktion führen (Gauss/Laplacescher Grenzübergang), bei zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten zwei verschiedene Grenzfunktionen ergeben, die beide von der Grenzfunktion bei festen Grundwahrscheinlichkeiten abweichen.

Beim *Grenzübergang* $\gamma)$ geht die Einheitsperiode in ein Risikoelement über, wobei die Konstante h_0 ihren Wert beibehält. Vereinigt man anschliessend diese Risikoelemente wieder zur Periode P, so gelangt man nach Formel (22′) für die charakteristische Funktion zur Grenzfunktion

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} {}^{(h_0)}_{x}\varphi_m \left(t, \frac{P}{m} \right) &= \lim_{m \to \infty} \left[1 - \frac{P}{m h_0} (e^{it} - 1) \right]^{-m h_0} \\ &= e^{P(e^{it} - 1)} . \end{aligned} \tag{25′}$$

Der Grenzübergang $\gamma)$ führt somit zur Poisson-Verteilung als Grenzfunktion, das heisst, es ergibt sich die gleiche Wahrscheinlichkeitsfunktion als Grenzfunktion wie bei festen Grundwahrscheinlichkeiten. Daraus lässt sich schliessen, dass von Risikoelement zu Risikoelement zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten sich gleich verhalten wie feste Grundwahrscheinlichkeiten.

III.

Statistische Untersuchungen

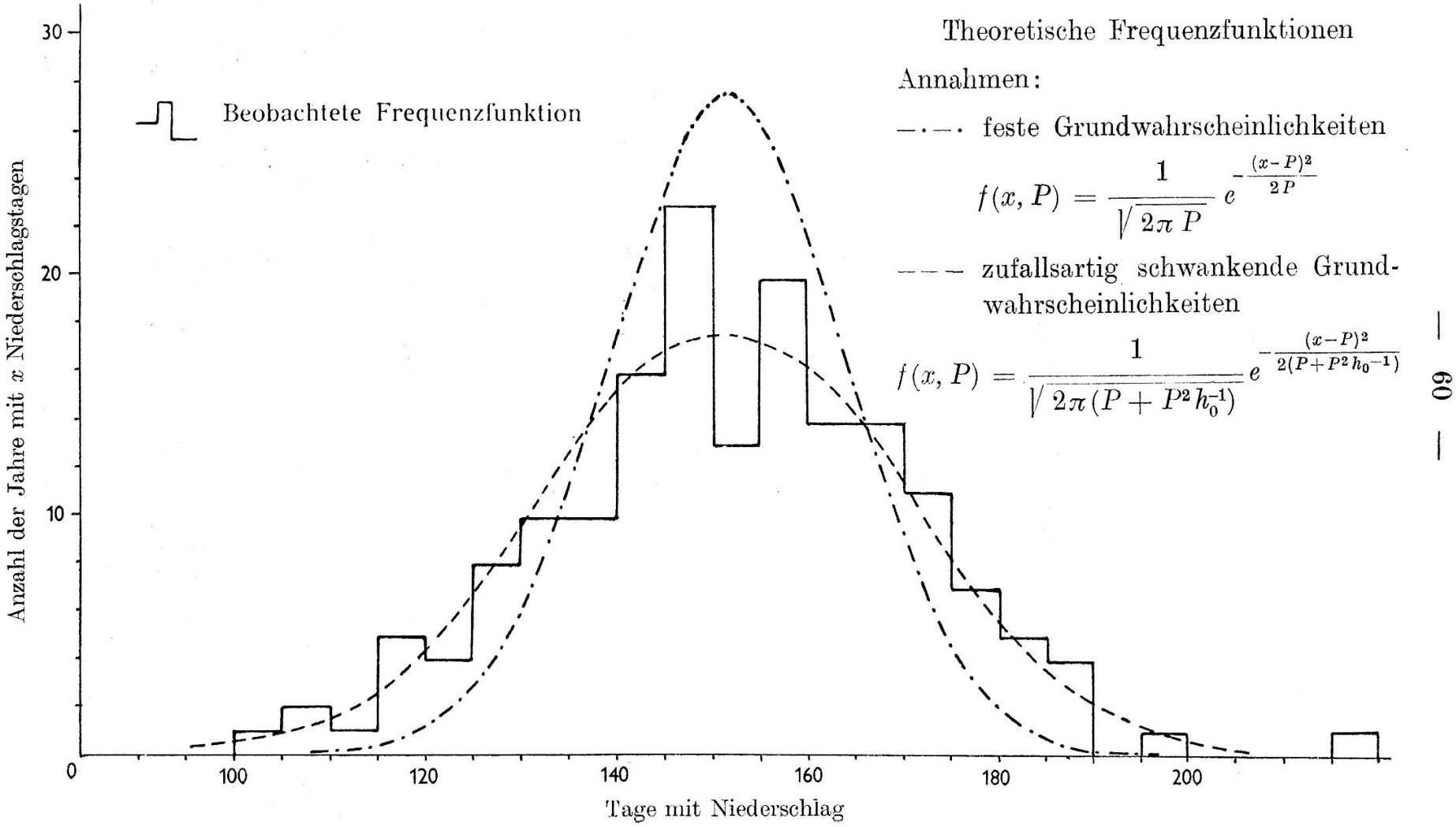
Die theoretischen Ableitungen des vorigen Kapitels sollen durch einige statistische Untersuchungen ergänzt werden. Insbesondere soll abgeklärt werden, ob die abgeleiteten Frequenzfunktionen mit empirischen Verteilungsfunktionen harmonieren und wie die auftretenden Parameter P und h_0 aus den Beobachtungszahlen bestimmt werden können.

a) Ein Beispiel aus der Meteorologie

Von der meteorologischen Zentralanstalt in Zürich wurde in freundlicher Weise eine Statistik über die Anzahl der Tage mit Niederschlag (Tage mit Niederschlagsmengen von mindestens 0,3 mm) in Basel, welche die Jahre 1755—1802 und 1826—1947 umfasst, zur Verfügung gestellt. Aus dieser Statistik lässt sich durch Auszählen der Jahre mit x Niederschlagstagen eine empirische Frequenzfunktion der Tage mit Niederschlag bilden und mit den im II. Kapitel abgeleiteten theoretischen Frequenzfunktionen vergleichen. Das Beispiel steht nicht unmittelbar im Zusammenhang mit dem Versicherungswesen; das Ereignis — Tage mit Niederschlag — könnte jedoch ohne weiteres Gegenstand eines Versicherungsverhältnisses bilden. Das Beispiel wurde gewählt, weil es zwei für die statistische Bearbeitung wesentliche Vorzüge aufweist, die bei Beispielen aus dem Versicherungswesen regelmässig fehlen, nämlich weil eine ausserordentlich lange Beobachtungsreihe (170 Jahre) vorliegt, und weil der «unter Risiko» stehende Bestand an Tagen in jedem Jahr gleich gross ist (abgesehen von den Schaltjahren).

Die empirische Frequenzfunktion der Niederschlagstage ist in der Figur 3 graphisch dargestellt; eine Übersicht über den Verlauf dieser

Fig. 3 – Frequenzfunktion der Tage mit Niederschlägen in Basel



Frequenzfunktion vermitteln ferner die Tabellen 2 und 3, in denen die Beobachtungen gruppenweise zusammengestellt sind. Die statistische Verarbeitung der Verteilung führt, wenn das Jahr zu durchschnittlich 365,25 Tagen gerechnet wird, zu folgenden Durchschnittszahlen:

Wahrscheinlichkeit für einen Niederschlagstag . . .	$p = 0{,}415$
Mittlere Anzahl der Niederschlagstage pro Jahr . .	$P = 151{,}635$
Streuung der Verteilung	$\sigma^2 = 364{,}781$

mit
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{(x)} (x - P)^2}{170 - 1}.$$

Zunächst soll geprüft werden, ob die angegebene Grundwahrscheinlichkeit ($p = 0{,}415$) als fest angesehen werden darf. Die Anzahl x der Niederschlagstage würde dann der Poisson-Verteilung (12) folgen oder näherungsweise — weil P eine grosse Zahl ist — der Gauss-Verteilung

$$f(x, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} e^{-\frac{(x-P)^2}{2P}}. \qquad (26)$$

Die theoretische Frequenzfunktion (26) harmoniert, wie man an Hand der Figur 3 feststellen kann, ziemlich schlecht mit der empirischen Frequenzfunktion. In Wirklichkeit kommen kleine Abweichungen vom Mittelwert seltener, grosse aber häufiger vor, als nach der Frequenzfunktion (26) zu erwarten wäre. Es stellt sich die Frage, ob diese Unterschiede durch den Zufall erklärt werden können, oder ob die der Frequenzfunktion (26) zugrunde liegenden Annahmen nicht zutreffen. Diese Frage lässt sich mit Hilfe des χ^2-Testes abklären, bei dem unter Berücksichtigung der Anzahl N (= 170) der Beobachtungen aus der empirischen und theoretischen Frequenzfunktion die Prüfgrösse

$$\chi^2 = \sum_{(x)}^{\text{beob.}} \frac{[Nf(x, P) - Nf(x, P)]^2}{Nf(x, P)}$$

berechnet wird, die um so grösser ausfällt, je mehr Beobachtungen und Theorie divergieren. Fasst man die vorhandenen Beobachtungen als eine Stichprobe aus einer Gesamtheit höherer Ordnung auf, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit $W(\chi^2)$ berechnen, dass bei einer anderen Stichprobe ein Wert $\chi^{2'} \geqslant \chi^2$ auftreten könnte, das heisst, dass

Beobachtungen und Theorie noch stärker divergieren als im zur Diskussion stehenden Fall. Diese Wahrscheinlichkeit eignet sich als Mass für die Übereinstimmung zwischen der theoretischen und der empirischen Frequenzfunktion. Sie hängt, wie die mathematische Statistik lehrt, nur vom Erwartungswert $(n-k)$ von χ^2 ab, der seinerseits identisch ist mit der Anzahl n der bei der Berechnung von χ^2 berücksichtigten Gruppen, vermindert um die Anzahl k der Parameter der theoretischen Verteilung, welche aus den Beobachtungen bestimmt wurden. Solange die Wahrscheinlichkeit $W_{n-k}(\chi^2)$ nicht unter einen durch Konvention festgelegten kritischen Satz — zum Beispiel 5 % — sinkt, können die Abweichungen zwischen der theoretischen und der empirischen Frequenzfunktion als zufällig angesehen werden. Fällt jedoch $W_{n-k}(\chi^2)$ unter diesen kritischen Satz, so ist eine nur durch den Zufall entstehende Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung im berechneten Ausmass so selten zu erwarten, dass sie praktisch überhaupt nicht vorkommen sollte. Die der theoretischen Frequenzfunktion zugrunde liegenden Annahmen müssen dann verworfen werden.

Im vorliegenden Fall ergibt sich folgende Rechnung:

Tabelle 2

Anzahl der Niederschlagstage x	Beobachtete Anzahl der Jahre mit x Niederschlagstagen	Erwartete Anzahl der Jahre mit x Niederschlagstagen Formel (26)	χ^2
$\leqslant 129$	21	6,71	30,43
130—134	10	8,31	0,34
135—139	10	14,28	1,28
140—144	16	20,85	1,13
145—149	23	25,87	0,32
150—154	13	27,29	7,48
155—159	20	24,45	0,81
160—164	14	18,63	1,15
165—169	14	12,06	0,31
$\geqslant 170$	29	11,55	26,37
Total	170	170,00	69,62

Der Erwartungswert von χ^2 beträgt 8 [10 Gruppen minus 2 Parameter (N, P)]. Wie man aus Tabellen über die Funktionen $W_{n-k}(\chi^2)$ entnehmen kann, weicht W_8 (69,62) verschwindend wenig von Null ab; demzufolge muss die Annahme einer festen Grundwahrscheinlichkeit, welche bei der Ableitung der Frequenzfunktion (26) getroffen wurde, verworfen werden.

Nimmt man dagegen die in Abschnitt II *c)* getroffenen Voraussetzungen, das heisst zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten, an, so müsste die Anzahl x der Niederschlagstage der Frequenzfunktion (19) folgen. Um diese Frequenzfunktion numerisch auswerten zu können, muss vorerst der Parameter h_0 ermittelt werden. Setzt man die Streuung der empirischen Frequenzfunktion $\sigma^2\{x - P\}$ gleich der Streuung der theoretischen Frequenzfunktion (19)

$$\sigma^2\{x - P\} = P + P^2 h_0^{-1},$$

so erhält man für h_0 die Bestimmungsgleichung

$$h_0 = \frac{P^2}{\sigma^2\{x - P\} - P} \sim 108. \qquad (27)$$

Die Frequenzfunktion (19) lässt sich nunmehr, nachdem die Parameter P und h_0 bekannt sind, numerisch auswerten. Da sowohl P als auch h_0 verhältnismässig gross sind, darf erwartet werden, dass die Verteilung (19) im vorliegenden Falle nur wenig von der Grenzverteilung (24) abweicht. In der Tabelle 3 sind daher die theoretischen Häufigkeiten der Jahre mit x Niederschlagstagen, nach den Formeln (19) und (24) berechnet, angegeben. Diesen theoretischen Häufigkeiten werden wiederum die beobachteten gegenübergestellt und die Prüfgrössen χ^2 berechnet.

Die Tabelle 3 bestätigt zunächst, dass die Verteilungen (19) und (24) nur wenig voneinander abweichen; es ist daher durchaus vertretbar, die einfacher auszuwertende Verteilung (24) zu benützen. Beide Verteilungen harmonieren befriedigend mit der empirischen Verteilung; (siehe Figur 3); dies zeigen auch die berechneten Prüfgrössen χ^2, die beide nahe beim Erwartungswert 9 [12 Gruppen minus 3 Parameter (N, P, h_0)] liegen. Die Wahrscheinlichkeiten $W_9(\chi^2)$ betragen 66 % [Verteilung (19)] und 81 % [Verteilung (24)] und liegen somit weit über dem kritischen Satz von 5 %; die Abweichungen zwischen den

Tabelle 3

Anzahl der Niederschlagstage x	Beobachtete	Erwartete Anzahl der Jahre mit x Niederschlagstagen		χ^2	
		Formel (19)	Formel (24)	(19)	(24)
<120 . . .	9	6,85	8,30	0,67	0,06
120—129 . . .	12	13,72	13,57	0,22	0,18
130—134 . . .	10	11,16	10,75	0,12	0,05
135—139 . . .	10	14,08	13,48	1,18	0,90
140—144 . . .	16	16,37	15,80	0,01	0,00
145—149 . . .	23	17,60	17,30	1,66	1,88
150—154 . . .	13	17,68	17,69	1,24	1,24
155—159 . . .	20	16,55	16,89	0,72	0,57
160—164 . . .	14	14,58	15,08	0,02	0,08
165—169 . . .	14	12,04	12,56	0,32	0,16
170—179 . . .	18	16,37	16,90	0,16	0,07
180 und mehr	11	13,00	11,68	0,31	0,04
Total	170	170,00	170,00	6,63	5,23

theoretischen Verteilungen und der empirischen dürfen daher als zufällig angesehen werden. Die in Abschnitt II *c)* eingeführten zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten führen demnach zu Frequenzfunktionen, welche mit den Beobachtungen im Einklang stehen.

Von Interesse ist noch die Frage, ob die Grundwahrscheinlichkeiten in aufeinanderfolgenden Jahren untereinander stochastisch abhängig oder unabhängig sind. Nach den Entwicklungen im Anschluss an Formel (22) würde im ersten Fall bei der Zusammenfassung der Beobachtungen von 2, 3, 4 usw. Jahren h_0 seinen Wert beibehalten, im zweiten Fall aber in $2h_0$, $3h_0$, $4h_0$ usw. übergehen. An Hand des vorliegenden Materials erhält man folgende Resultate:

$h_0 = 108$ bei Zusammenfassung von 1 Jahr
$h_0 = 146$ » » » 2 Jahren
$h_0 = 179$ » » » 3 »
$h_0 = 206$ » » » 4 » .

Der Verlauf dieser h_0-Werte zeigt, dass eine Mischung der oben erwähnten Grenzfälle vorliegt.

Zu diesen Untersuchungen sind noch zwei grundsätzliche Bemerkungen nachzutragen:

α) Der Parameter h_0 wurde nach Formel (27) ermittelt, welche die Gleichheit von empirischer und theoretischer Streuung voraussetzt. Die Frage bleibt offen, ob dies die beste Methode zur Berechnung von h_0 ist.

β) Zu untersuchen ist ferner noch die Genauigkeit des nur aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungsjahren bestimmten Wertes von h_0. Geht man von der Gauss-Verteilung (24) aus, und nimmt man an, der Mittelwert P sei a priori gegeben, so lässt sich der mittlere Fehler des reziproken Wertes von h_0 aus der Formel

$$\sigma\left(\frac{1}{h_0}\right) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\frac{\sigma^2(x)}{P^2}$$

abschätzen.

In dieser Formel bedeuten

N die Anzahl der Beobachtungsjahre (= 170)

$\sigma^2(x)$ die empirische Streuung der Verteilung (= 364,781)

P der Mittelwert (= 151,635).

Die Rechnung ergibt $\sigma\left(\frac{1}{h_0}\right) = 0{,}001\,721$, das sind 18,6 % des berechneten Wertes von $\left(\frac{1}{h_0}\right)$; trotz der überaus langen Beobachtungsreihe ist demnach der berechnete Wert von h_0 noch ziemlich unsicher.

b) Ein Beispiel aus der Feuerversicherung

Es ist bekannt, dass die Voraussetzungen der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Feuerversicherung nicht erfüllt sind. Die grossen Schwankungen in der Häufigkeit der Schadenfälle zeigen, dass in diesem Versicherungszweig keine festen Grundwahrscheinlichkeiten vorliegen, sondern eher die unter II *c)* eingeführten zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. Abzuklären ist noch,

ob die unter II *c)* abgeleiteten Frequenzfunktionen den Verhältnissen in der Feuerversicherung gerecht werden. Dank der in entgegenkommender Weise erteilten Erlaubnis der Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft in Bern kann diese Frage hier an Hand der in neun Jahrzehnten gesammelten Erfahrungen dieser Gesellschaft untersucht werden. Im einzelnen stehen folgende Unterlagen zur Verfügung:

1. die Anzahl der Brandgeschädigten x_t in 90 Geschäftsjahren t der Gesellschaft (33.—122. Geschäftsjahr) [1];
2. der Bestand an Versicherungssummen S_t in 90 Geschäftsjahren t;
3. der Bestand an Policen R_t in 54 Geschäftsjahren t (vom 69. Geschäftsjahr an).

Aus diesen Unterlagen sind zuerst für alle berücksichtigten Geschäftsjahre t die erwartungsmässigen Schadenzahlen P_t und anschliessend für alle Geschäftsjahre zusammen der Parameter h_0 zu bestimmen; schliesslich ist zu prüfen, ob die Abweichungen zwischen den beobachteten (x_t) und erwarteten (P_t) Schadenzahlen der Frequenzfunktion (19) folgen oder nicht.

α) Der Trend der Schadenfälle.

Die Erwartungswerte P_t, die den Trend der Schadenfälle bilden, berechnet man aus dem Trend der Grundwahrscheinlichkeiten

$$\bar{p}_t = \frac{P_t}{R_t},$$

der sich seinerseits durch Ausgleichung der Verhältniszahlen

$$p_t = \frac{x_t}{R_t}$$

ergibt. Der Trend der Grundwahrscheinlichkeiten kann für die 54 Geschäftsjahre, in denen die unter Risiko gestandenen Policenbestände R_t bekannt sind, durch eine lineare Funktion von t dargestellt werden. Für die früheren Jahre, in denen Angaben über die

[1]) Das Beobachtungsmaterial aus dem 1.—32. Geschäftsjahr ist für statistische Untersuchungen zu klein.

Policenbestände fehlen, wird an Stelle der Grundwahrscheinlichkeit p_t die Verhältniszahl

$$s_t = \frac{x_t}{S_t}$$

der Ausgleichung unterworfen. In der Figur 4 sind die Verläufe der unausgeglichenen und ausgeglichenen Verhältniszahlen p_t und s_t graphisch dargestellt.

Der durch die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten entstehende sprunghafte Verlauf der unausgeglichenen Werte gestaltet die Ausgleichung im vorliegenden Fall recht schwierig. Beispielsweise konnten die stark erhöhten Brandhäufigkeiten der Geschäftsjahre 103—110, welche in die Weltwirtschaftskrise der Dreissigerjahre fallen (1. Juli 1928 bis 30. Juni 1936), im Trend der Grundwahrscheinlichkeiten nicht berücksichtigt werden, ohne den Erfolg der ganzen Ausgleichung zu gefährden. Der Umstand, dass der Trend der Grundwahrscheinlichkeiten in den Jahren vor und nach der Krise durch die gleiche lineare Funktion dargestellt werden kann, spricht jedoch deutlich für die getroffene Annahme, dass diese erhöhten Brandhäufigkeiten nicht dem normalen Verlauf der Grundwahrscheinlichkeiten entsprechen, sondern besonders augenfällige Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten darstellen.

Im ganzen gesehen, befriedigt die Ausgleichung; dies zeigt sich unter anderem darin, dass die Differenzen $x_t - P_t$ und ihre Summen das Vorzeichen oft wechseln. Insgesamt sind in den 90 berücksichtigten Geschäftsjahren 155 066 beobachtete und 146 887 erwartete Schadenfälle zu verzeichnen; von der Gesamtdifferenz entfallen dabei 8094 Fälle auf die Krisenjahre und 85 Fälle auf alle übrigen Jahre.

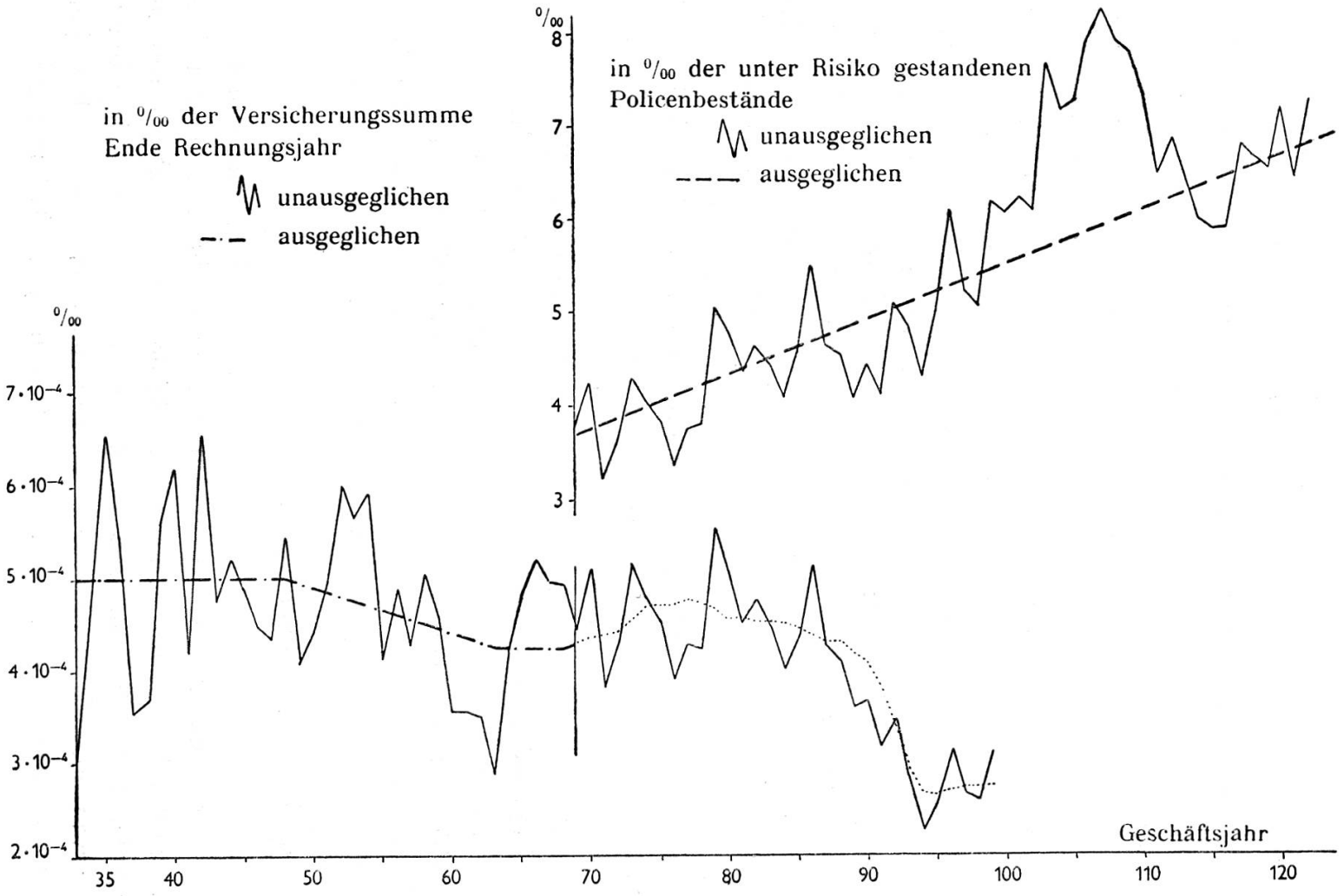
β) Die Berechnung von h_0.

Für die Berechnung von h_0 wirkt sich der Umstand störend aus, dass der Umfang des Beobachtungsmaterials in den verschiedenen Geschäftsjahren ganz ungleich ist. Im 33. Geschäftsjahr waren zum Beispiel nur 179,2, im 122. Geschäftsjahr aber 5000,2 Schadenfälle zu erwarten. Dieses ungleiche Gewicht der einzelnen Geschäftsjahre lässt sich ausgleichen, wenn an Stelle von x_t die Hilfsvariable

$$y_t = \frac{x_t - P_t}{P_t}$$

eingeführt wird.

Fig. 4 — Verlauf der Schadenfälle bei der Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft in Bern



Die Streuung von y_t beträgt dann, wie aus Formel (21) hervorgeht,

$$\sigma^2(y_t) = P_t^{-1} + h_0^{-1} \tag{29}$$

Setzt man — ähnlich wie beim Beispiel aus der Meteorologie — die Summe der beobachteten Abweichungsquadrate von y_t gleich der Summe der theoretischen Streuungen, so erhält man für h_0^{-1} die Bestimmungsgleichung

$$h_0^{-1} = \frac{\sum(t) y_t^2 - \sum(t) P_t^{-1}}{90}. \tag{30}$$

Die Rechnung ergibt für h_0 selbst den Wert $h_0 = 37{,}5$. Würden die Krisenjahre, in denen der Trend der Schadenfälle unsicher ist, weggelassen, so ergäbe sich $h_0 = 48{,}1$. Diese beiden, eigentlich nicht stark divergierenden Werte dürfen wohl als untere und obere Grenze des wahren Wertes von h_0 angesehen werden.

γ) Vergleich der theoretischen und empirischen Frequenzfunktion.

Die theoretische Frequenzfunktion der Schadenfälle (19) lässt sich nicht ohne weiteres mit einer empirischen Frequenzfunktion vergleichen, weil bei der theoretischen Frequenzfunktion in jedem Geschäftsjahr der Parameter P_t ändert. Nimmt man jedoch an, dass die Frequenzfunktion (19) in allen Geschäftsjahren durch die Grenzverteilung (24) ersetzt werden darf — eine Annahme, die allerdings nicht so gut begründet ist wie beim Beispiel aus der Meteorologie —, so ergibt sich eine für alle Geschäftsjahre einheitliche theoretische Frequenzfunktion, wenn die Hilfsvariable

$$\xi_t = \frac{x_t - P_t}{P_t \sqrt{h_0^{-1} + P_t^{-1}}}$$

an Stelle von x_t eingeführt wird. Aus den für jedes der 90 Geschäftsjahre berechneten Werten von ξ_t lässt sich dann eine empirische Frequenzfunktion von ξ bilden und der theoretischen Frequenzfunktion

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

gegenüberstellen (siehe Tabelle 5).

Tabelle 5

ξ	Beobachtete Anzahl der Geschäftsjahre, in denen der Wert ξ auftritt	Erwartete Anzahl der Geschäftsjahre, in denen der Wert ξ auftritt	χ^2
$\leqslant -1{,}5$	3	6,01	1,51
$-1{,}49$ — $-1{,}00$	6	8,27	0,62
$-0{,}99$ — $-0{,}50$	14	13,49	0,02
$-0{,}49$ — $0{,}00$	20	17,23	0,45
$0{,}01$ — $0{,}50$	15	17,23	0,29
$0{,}51$ — $1{,}00$	14	13,49	0,02
$1{,}01$ — $1{,}50$	8	8,27	0,01
$> 1{,}50$	10	6,01	2,65
Total	90	90,00	5,57

Die Tabelle 5 zeigt, dass die empirische Frequenzfunktion von ξ leicht asymmetrisch verläuft; dies lässt sich daraus erklären, dass die Grenzverteilung (24) im vorliegenden Fall von der genauen Frequenzfunktion (19) etwas abweicht, weil nur P_i nicht aber h_0 eine grosse Zahl ist. Im übrigen harmonieren jedoch die empirische und die theoretische Frequenzfunktion recht gut miteinander; dies bestätigt auch der berechnete Wert von χ^2, der nur wenig vom Erwartungswert $8 - 1 = 7$ abweicht. Im ganzen gesehen, darf festgestellt werden, dass die unter der Annahme von zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten abgeleiteten Frequenzfunktionen (19) und (24) die Verhältnisse im vorliegenden Fall richtig darstellen; dies spricht für die Brauchbarkeit der getroffenen Annahmen in der Feuerversicherung.

δ) Eine grundsätzliche Bemerkung.

Die oben beschriebene Untersuchung hat deutlich gezeigt, dass eine wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung der Schadenhäufigkeiten und die Bestimmung des Parameters h_0 bei stark schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten nur dann zu einem brauchbaren Ergebnis führen kann, wenn eine genügend lange Beobachtungsreihe vorliegt, die es ermöglicht, den Trend der Schadenfälle zu erkennen. Leider liegen zur Zeit noch wenig derartige Reihen vor.

Anderseits darf nicht übersehen werden, dass es mit zunehmender Länge der Beobachtungsreihe immer fraglicher wird, ob die Reihe überhaupt noch homogen genug ist. Bei einer mehrere Jahrhunderte umfassenden Beobachtungsreihe dürfte sich zum Beispiel das versicherte Risiko im Verlaufe der Zeit derart verändern, dass die Beobachtungen am Anfang und am Ende der Reihe gar nicht mehr zusammengefasst werden dürfen. Unter diesen Umständen lässt sich die Zuverlässigkeit des aus Beobachtungen abgeleiteten Wertes von h_0 durch eine Verlängerung der Beobachtungsreihe nicht steigern.

IV.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens

Für die Stabilität eines Versicherungsbetriebes sind die in den vorangehenden Kapiteln untersuchten Schwankungen in der Häufigkeit der Schadenfälle nicht unbedingt massgebend; entscheidend ist vielmehr die Gesamtschadensbelastung, die wie die Anzahl der Schadenfälle eine zufällige Variable darstellt, deren Verteilungsgesetz durch die Frequenz- oder Wahrscheinlichkeitsfunktion und die zugehörige charakteristische Funktion beschrieben werden kann. Im Spezialfall von einheitlichen Risikosummen ist die Verteilung des Gesamtschadens identisch mit der Verteilung der Schadenfälle. Im allgemeinen Fall mit nicht einheitlicher Risikosumme muss noch ein weiteres Rechnungselement eingeführt werden, nämlich die Risikosummenverteilung des Versicherungsbestandes. Die für die Frequenzfunktion der Schadenfälle abgeleiteten Formeln lassen sich dann mühelos auf die Frequenz- und Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens übertragen.

a) Die Risikosummenverteilung eines Versicherungsbestandes

In einem Versicherungsbestand seien k Risikoklassen mit den Schadenintensitäten $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k$ vertreten, wobei je $R_1, R_2 \ldots R_k$ Versicherungen mit nicht einheitlicher Risikosumme unter Risiko stehen mögen. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine blindlings herausgegriffene Versicherung der i-ten Klasse in den Bereich zwischen

z und $z + dz$ fällt, betrage $p_i(z)\,dz$. Aus diesen k Frequenzfunktionen $p_i(z)$ der versicherten Risikosummen lässt sich eine für alle k Risikoklassen zusammen geltende Risikosummenverteilung $p(z)$ der *fälligen* Risikosummen nach der Formel

$$p(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i \mu_i p_i(z)}{\sum_{i=1}^{k} R_i \mu_i} \tag{31a}$$

bilden; $p(z)\,dz$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine im Versicherungsbestand *fällig* werdende Risikosumme in den Bereich zwischen z und $z + dz$ fällt, gleichgültig, welcher Risikoklasse sie angehört hat. Diese Frequenzfunktion der fälligen Risikosummen, im folgenden kürzer Risikosummenverteilung genannt, berücksichtigt die Struktur des Versicherungsbestandes sowohl hinsichtlich der Risikoklassen als auch hinsichtlich der Höhe der Risikosummen.

Im allgemeinen wird sich die Risikosummenverteilung mit der Zeit verändern. Im Risikoelement zwischen P und $P + dP$ gelte zum Beispiel die Risikosummenverteilung $p_P(z)$. Aus dieser Folge von Risikosummenverteilungen lässt sich eine mittlere Risikosummenverteilung

$$\bar{p}(z) = \frac{1}{P} \int_0^P p_P(z)\,dP \tag{31b}$$

konstruieren, die an Stelle der veränderlichen Risikosummenverteilung $p_P(z)$ als feste Risikosummenverteilung verwendet werden darf. In der Regel verändert sich allerdings $p_P(z)$ nur so langsam, dass die anfängliche Risikosummenverteilung $p_0(z)$ und die mittlere Risikosummenverteilung $\bar{p}(z)$ praktisch zusammenfallen.

Durch die auftretenden Versicherungsfälle verändert sich die Risikosummenverteilung, so dass sie streng genommen von den aufgetretenen Versicherungsfällen abhängt. Bei grossen Versicherungsbeständen dürfen diese Veränderungen jedoch vernachlässigt werden. In der kollektiven Risikotheorie geht man daher von der grundlegenden Annahme aus, dass die Risikosummenverteilung $p(z)$ nicht von den aufgetretenen Versicherungsfällen abhängt.

Es erweist sich als nützlich, die mittlere Risikosumme $\bar{z}$ als Masseinheit für die fälligen Risikosummen z zu benützen. Es gelten dann, wenn nur positive Risikosummen auftreten, die Beziehungen

$$\bar{z} = \int_0^\infty p(z)\,dz = \int_0^\infty z\,p(z)\,dz = 1. \tag{32}$$

Schliesslich sei noch vorausgesetzt, dass das Integral

$$\int_0^\infty e^{Rz}\,p(z)\,dz$$

für alle Werte $R \leqslant R_0$ konvergiere, eine Bedingung, die bei allen Anwendungen ohne weiteres erfüllt ist, weil Risikosummen, welche ein gewisses Maximum M überschreiten, nicht vorkommen.

Im konkreten Fall bestimmt man $p(z)$ am besten unmittelbar aus der Statistik der Schadenfälle. In der Figur 5 sind unter anderem drei nach dieser Methode ermittelte Risikosummenverteilungen graphisch dargestellt, nämlich die aus den Erfahrungen der

Thule, Lebensversicherungsaktiengesellschaft, Schweden (1929/31),

Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt, Zürich (Einzelkapitalversicherungen des schweizerischen Bestandes der Hauptabteilung) 1943/45,

und der

Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft, Bern (Feuerversicherung 1947)

abgeleiteten Risikosummenverteilungen.

Diese empirischen Verteilungen verlaufen ganz ähnlich wie die in der Literatur oft benützte analytische Verteilung $p(z) = e^{-z}$, nur dass die kleinsten und grössten Risikosummen in den empirischen Risikosummenverteilungen stärker vertreten sind als in der Verteilung $p(z) = e^{-z}$.

b) Theoretische Untersuchungen

Für die meisten Anwendungen der Risikotheorie ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens wichtiger als die zugehörige Frequenzfunktion. Die weiteren Untersuchungen befassen sich

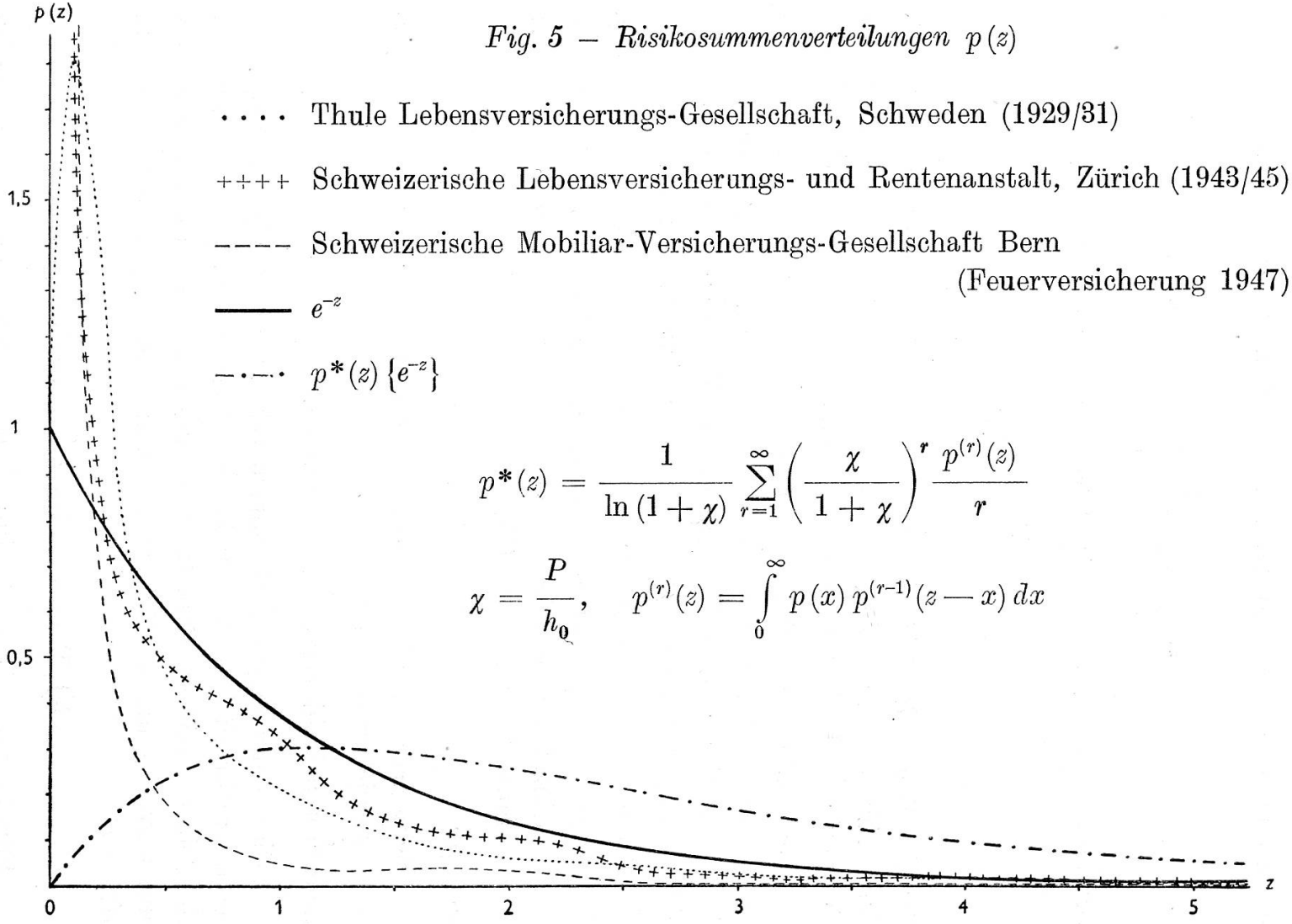


Fig. 5 — Risikosummenverteilungen $p(z)$

.... Thule Lebensversicherungs-Gesellschaft, Schweden (1929/31)

++++ Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt, Zürich (1943/45)

---- Schweizerische Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft Bern (Feuerversicherung 1947)

——— e^{-z}

—·—· $p^*(z)\,\{e^{-z}\}$

$$p^*(z) = \frac{1}{\ln(1+\chi)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r \frac{p^{(r)}(z)}{r}$$

$$\chi = \frac{P}{h_0}, \qquad p^{(r)}(z) = \int_0^{\infty} p(x)\, p^{(r-1)}(z-x)\, dx$$

daher vorwiegend mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion ${}^{(h_0)}F(x, P, p(z))$; diese gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Gesamtschaden in einem Versicherungsbestand mit der Risikosummenverteilung $p(z)$ während der Periode P den Betrag x nicht übersteigt, wenn die Primärverteilung (18) den Parameter h_0 aufweist. Mit Rücksicht auf die gewählte Masseinheit für x und z (Mittlere Risikosumme = 1) ist die Anzahl der zu erwartenden Schadenfälle P identisch mit der gesamten nach Grundlagen zweiter Ordnung berechneten Nettorisikoprämieneinnahme der Periode P.

1. Die in den Abschnitten *b)* und *c)* des II. Kapitels abgeleiteten Resultate sollen im folgenden auf die Verteilung des Gesamtschadens übertragen werden. Zunächst sei der unter II *b)* behandelte Fall mit festen oder planmässig veränderlichen Grundwahrscheinlichkeiten betrachtet, bei dem man wiederum von der Frequenzfunktion in einem Risikoelement ausgeht, in dem nur ein oder gar kein Schadenfall mit den Wahrscheinlichkeiten dP und $1 - dP$ auftreten können. Für die Frequenzfunktion der Schadenfälle in einem Risikoelement gelten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} {}^{(\infty)}f(0, dP, p(z)) &= 1 - dP \\ {}^{(\infty)}f(x, dP, p(z)) &= dP\, p(x) \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Dieser Frequenzfunktion ist die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} {}^{(\infty)}_{x}\varphi(t, dP, p(z)) &= 1 + dP\left[\int_0^\infty e^{itz}\, p(z)\, dz - 1\right] \\ &= 1 + dP\,[{}_z\pi(t) - 1] \end{aligned} \tag{33'}$$

zugeordnet, in der ${}_z\pi(t)$ die charakteristische Funktion bedeutet, die der Risikosummenverteilung $p(z)$ entspricht. Der Gesamtschaden während der Periode P ist gleich der Summe aller Schäden, welche in allen Risikoelementen der Periode P aufgetreten sind. Es gilt somit nach dem Produktsatz für die charakteristische Funktion, die der Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens für die ganze Periode zugeordnet ist, die Formel

$$\begin{aligned} {}^{(\infty)}_{x}\varphi(t, P, p(z)) &= \lim_{dP \to 0}\left[1 + dP\,({}_z\pi(t) - 1)\right]^{\frac{P}{dP}} \\ &= e^{P({}_z\pi(t) - 1)}. \end{aligned} \tag{34'}$$

Formel (34′) weist die gleiche Form auf wie die charakteristische Funktion (12′), welche der Verteilung der Schadenfälle zugeordnet ist, nur dass e^{it} in ${}_z\pi(t)$ übergeht. Dieses Resultat ist plausibel, weil ${}_z\pi(t) = e^{it}$ ist, wenn alle Risikosummen gleich sind. Eine Reihe von weiteren Formeln aus dem Kapitel II lässt sich in analoger Weise — das heisst, indem man e^{it} durch ${}_z\pi(t)$ ersetzt — verallgemeinern. Insbesondere erhält man für die charakteristische Funktion, die der Verteilung des Gesamtschadens zugeordnet ist, wenn zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten vorausgesetzt werden,

$$ {}^{(h_0)}_{x}\varphi(t, P, p(z)) = \left[1 - \frac{P}{h_0}({}_z\pi(t) - 1)\right]^{-h_0} \qquad (35′) $$

als Verallgemeinerung von Formel (20′).

2. Aus der charakteristischen Funktion (35′) lässt sich ein expliziter Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsfunktion selbst herleiten. Zunächst formt man Formel (35′) etwas um und erhält den Ausdruck

$$ {}^{(h_0)}_{x}\varphi(t, P, p(z)) = \left(\frac{h_0}{h_0 + P}\right)^{h_0}\left[1 - \frac{P}{h_0 + P}\,{}_z\pi(t)\right]^{-h_0}, $$

in dem der zweite Faktor rechts in die hier konvergente Binomial-Reihe entwickelt wird

$$ {}^{(h_0)}_{x}\varphi(t, P, p(z)) = \left(\frac{h_0}{h_0 + P}\right)^{h_0}\left[1 + \binom{h_0}{1}\frac{P}{h_0 + P}\,{}_z\pi(t) + \binom{h_0 + 1}{2}\cdots\right] $$

$$ = \sum_{r=0}^{\infty}\left[\binom{h_0 - 1 + r}{r}\left(\frac{P}{h_0 + P}\right)^{r}\left(\frac{h_0}{h_0 + P}\right)^{h_0}\right][{}_z\pi(t)]^{r}. \qquad (40′) $$

Die Potenzen der charakteristischen Funktion $[{}_z\pi(t)]^r$ entsprechen nach dem Produktsatz, den durch fortgesetzte Faltung von $p(z)$ entstehenden Risikosummenverteilungen

$$ p^{(r)}(z) = p^{(r-1)}(z) \;*\; p(z), $$

welche die Wahrscheinlichkeit $p^{(r)}(z)\,dz$ angeben, dass der Gesamtschaden aus r Schadenfällen zwischen z und $z + dz$ liegt.

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt somit die Formel (40a)

$$ {}^{(h_0)}F(x, P, p(z)) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\binom{h_0 - 1 + r}{r} \left(\frac{P}{h_0 + P} \right)^r \left(\frac{h_0}{h_0 + P} \right)^{h_0} \right] \left[\int_0^x p^{(r)}(z)\, dz \right], $$

die für $h_0 = \infty$, das heisst für feste oder planmässige veränderliche Grundwahrscheinlichkeiten, in den Ausdruck

$$ {}^{(\infty)}F(x, P, p(z)) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-P} P^r}{r!} \right] \left[\int_0^x p^{(r)}(z)\, dz \right] \tag{40b} $$

übergeht. In den Formeln (40a) und (40b) tritt rechts jeweils als erster Faktor die Frequenzfunktion der Schadenfälle auf [Formeln (19) und (12)]. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens bei festen planmässig und zufallsartig veränderlichen Grundwahrscheinlichkeiten lässt sich somit durch die allgemeine Formel

$$ {}^{(h_0)}F(x, P, p(z)) = \sum_{r=0}^{\infty} {}^{(h_0)}f(r, P) \int_0^x p^{(r)}(z)\, dz \tag{40} $$

darstellen.

3. Die Momente der Wahrscheinlichkeitsfunktionen (40) erhält man nach dem Momentensatz [Formel (7′)] durch Differenzieren der entsprechenden charakteristischen Funktionen (34′) und (35′). Das erste Moment oder der Mittelwert ist gleich dem Erwartungswert P, gleichgültig, ob feste oder zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten vorliegen. Für das zweite Moment um diesen Mittelwert oder die Streuung der Verteilung des Gesamtschadens findet man die Formeln

$$ {}^{(h_0)}M_2' = P p_2 + P^2 h_0^{-1} = P(p_2 + \chi) \tag{41a} $$

oder

$$ {}^{(\infty)}\overline{M}_2' = P p_2, \tag{41b} $$

je nachdem zufallsartig schwankende oder feste Grundwahrscheinlichkeiten vorliegen. In diesen Formeln bedeutet p_2 das zweite Moment der Risikosummenverteilung $p(z)$

$$ p_2 = \int_0^{\infty} z^2 p(z)\, dz. $$

4. Von besonderer Bedeutung ist, dass Formel (41a), die für zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten gilt, gleich aufgebaut ist wie die für feste Grundwahrscheinlichkeiten geltende Formel (41b), wenn man $p_2^* = p_2 + \chi$ als zweites Moment einer fiktiven Risikosummenverteilung $p^*(z)$ auffasst. Diese Feststellung führt zur Vermutung, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens bei zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten (40a) identisch ist mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens bei festen Grundwahrscheinlichkeiten, wenn bei der Berechnung der letzteren eine noch unbekannte Risikosummenverteilung $p^*(z)$ angenommen wird. Eine nähere Prüfung dieses Sachverhaltes führt zum Transformationssatz, der durch die Formel

$$^{(h_0)}F(x, P, p(z)) = {}^{(\infty)}F(x, P^*, p^*(z)) \tag{42}$$

dargestellt werden kann, in der für die transformierten Rechnungselemente rechts die Formeln

$$P^* = P\frac{\ln(1+\chi)}{\chi} \tag{42a}$$

und

$$p^*(z) = \frac{1}{\ln(1+\chi)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r \frac{p^{(r)}(z)}{r}$$

gelten.

Der durch die Formeln (42) gegebene Zusammenhang ist für die Risikotheorie, welche zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten voraussetzt, von grundlegender Bedeutung. Er erlaubt es, viele Sätze und Formeln, die für feste Grundwahrscheinlichkeiten bekannt sind, ohne weiteres auf zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten zu verallgemeinern.

Für die Ableitung des Transformationssatzes geht man von den durch die Ausdrücke (34′) und (35′) gegebenen charakteristischen Funktionen aus und setzt

$$e^{P^*[{}_z\pi^*(t)-1]} = \left[1 - \frac{P}{h_0}[{}_z\pi(t) - 1]\right]^{-h_0}.$$

Logarithmiert man diese Gleichung, so erhält man die Formeln

$$P^*({}_z\pi^*(t)-1) = \ln\left[\left(1+\frac{P}{h_0}\right)\left(1-\frac{P}{h_0+P}\,{}_z\pi(t)\right)\right]^{-h_0}$$

$$= -\frac{P}{\chi}\left[\ln(1+\chi)+\ln\left(1-\frac{\chi}{1+\chi}\,{}_z\pi(t)\right)\right],$$

in denen zur Abkürzung $\chi = \dfrac{P}{h_0}$ eingeführt wurde. Das zweite Glied rechts wird in die im vorliegenden Fall konvergente, logarithmische Reihe entwickelt.

$$P^*({}_z\pi^*(t)-1) = -\frac{P}{\chi}\left[\ln(1+\chi)-\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r\frac{[{}_z\pi(t)]^r}{r}\right]$$

Setzt man jetzt

$$P^* = \frac{P\ln(1+\chi)}{\chi},$$

so erhält man nach einer einfachen Umformung die Beziehung

$${}_z\pi^*(t) = \frac{1}{\ln(1+\chi)}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r\frac{[{}_z\pi(t)]^r}{r}. \qquad (42'a)$$

Diese für die charakteristischen Funktionen geltende Beziehung muss noch auf die zugehörigen Frequenzfunktionen übertragen werden. Beachtet man, dass $[{}_z\pi(t)]^r$ die charakteristische Funktion der durch r-fache, fortgesetzte Faltung aus der gegebenen Risikosummenverteilung $p(z)$ erzeugten Risikosummenverteilung $p^{(r)}(z)$ ist, so ergibt sich die gesuchte Schlussformel

$$p^*(z) = \frac{1}{\ln(1+\chi)}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r\frac{p^{(r)}(z)}{r}, \qquad (42a)$$

womit der Transformationssatz bewiesen ist.

Die transformierte Risikosummenverteilung $p^*(z)$ stellt eine lineare Kombination sämtlicher Faltungen der gegebenen Risikosummenverteilung $p(z)$ dar. In der Figur (5) ist die transformierte Risikosummenverteilung $p^*(z)$ eingezeichnet, die der analytischen

Risikosummenverteilung $p(z) = e^{-z}$ entspricht. Der Mittelwert von $p^*(z)$ ist nicht mehr gleich der Einheit, sondern beträgt

$$\bar{z}^* = \int_0^\infty z\, p^*(z)\, dz = \frac{1}{\ln(1+\chi)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r = \frac{\chi}{\ln(1+\chi)}. \quad (43)$$

Die in der transformierten Risikosummenverteilung auftretenden, durch fortgesetzte Faltung erzeugten Frequenzfunktionen $p^{(r)}(z)$ ergeben die Wahrscheinlichkeiten, in r Schadenfällen einen Gesamtschaden zwischen z und $z + dz$ zu erzielen. Daraus lässt sich schliessen, dass die transformierte Risikosummenverteilung die Wahrscheinlichkeiten $p^*(z)\, dz$ liefert, dass der Gesamtschaden bei einem Schadenereignis, bei dem $r = 1, 2, 3, \ldots$ Schadenfälle miteinander auftreten können (zum Beispiel ein Verkehrsunfall mit 3 Todesopfern), zwischen z und $z + dz$ liegt. Die in der Gleichung (42) rechtsstehende Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt somit für den Fall von festen Grundwahrscheinlichkeiten mit mehrfachen Schadenfällen pro Schadenereignis. Die zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten voraussetzende Wahrscheinlichkeitsfunktion (40a) des Gesamtschadens umfasst somit auch den Fall, bei dem feste Grundwahrscheinlichkeiten, aber mehrfache Schadenfälle auftreten können und, wie im Abschnitt II *c*) festgestellt wurde, die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Diese Vielseitigkeit der Wahrscheinlichkeitsfunktion (40a) sichert ihr eine umfassende Anwendbarkeit.

5. Die im zweiten Kapitel behandelten Grenzübergänge können auch bei der Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens durchgeführt werden. Die Grenzfunktionen lassen sich dabei Schritt für Schritt nach der gleichen Methode ableiten wie bei der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Schadenfälle. Es genügt daher, hier noch die Schlussformeln anzuführen:

$$\alpha) \quad \lim_{P\to\infty} {}^{(\infty)}F(z, P, p(z)) = \Phi(z) \quad \text{mit} \quad z = \frac{x - P}{\sqrt{P p_2}} \quad (44)$$

$$\beta) \quad \lim_{P\to\infty} {}^{(h_0)}F(q, P, p(z)) = \int_0^q \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} e^{-h_0 q} q^{h_0-1}\, dq \quad \text{mit} \quad q = \frac{x}{P} \quad \text{und} \quad h_0 \neq \infty \quad (45)$$

$$\gamma) \quad \lim_{\substack{P\to\infty \\ \frac{P}{h_0} = \chi}} {}^{(h_0)}F(z, P, p(z)) = \Phi(z) \quad \text{mit} \quad z = \frac{x - P}{\sqrt{P(p_2 + \chi)}} \quad (46)$$

$$\delta) \quad \lim_{m\to\infty} {}^{(h_0)}F_m\left(x, \frac{P}{m}, p(z)\right) = {}^{(\infty)}F(x, P, p(z)). \quad (47)$$

c) Die numerische Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens

Die bisher abgeleiteten Formeln erlauben es im allgemeinen nicht, die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens numerisch auszuwerten, wenigstens nicht mit einem in der Praxis vertretbaren Arbeitsaufwand. Ein brauchbares Verfahren für die numerische Auswertung ist dagegen von Esscher [9] entwickelt worden. Die Esscherschen Formeln setzen feste oder planmässige veränderliche Grundwahrscheinlichkeiten voraus. Mit Hilfe des Transformationssatzes (42) lassen sich die von Esscher abgeleiteten Formeln auch auf zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten erweitern. Im folgenden sollen die für den letzteren Fall geltenden Formeln direkt abgeleitet werden. Die ursprünglichen, von Esscher gefundenen Formeln ergeben sich dann, indem man $h_0 = \infty$ setzt.

An Stelle von $p(z)$ werde eine transformierte Risikosummenverteilung

$$\bar{p}(z) = \frac{p(z)\, e^{kz}}{\nu_0}$$

eingeführt, deren Momente durch die Formel

$$\nu_r = \int_0^\infty \bar{p}(z)\, z^r\, dz = \int_0^\infty \frac{e^{kz}\, z^r\, p(z)\, dz}{\nu_0} = \frac{\bar{\nu}_r}{\nu_0}$$

bestimmt seien. In diesen Formeln bedeutet k eine vorläufig noch willkürliche Konstante, über deren Wert später verfügt wird. Zwischen den durch fortgesetzte Faltung von $p(z)$ und $\bar{p}(z)$ erzeugten Risikosummenverteilungen $p^{(r)}(z)$ und $\bar{p}^{(r)}(z)$ besteht die Beziehung

$$p^{(r)}(z) = \nu_0^r e^{-kz}\, \bar{p}^{(r)}(z).$$

Führt man diese transformierten Risikosummenverteilungen $\bar{p}^{(r)}(z)$ in die Formel (40a) ein und geht man gleichzeitig zur Frequenzfunktion des Gesamtschadens über, so erhält man die Formel

$${}^{(h_0)}f(x, P, p(z)) = \sum_{r=0}^{\infty} {}^{(h_0)}f(r, P)\, \nu_0^r\, e^{-kx}\, \bar{p}^{(r)}(x). \qquad (48)$$

Ersetzt man den Erwartungswert P durch

$$\bar{P} = \frac{P\nu_0}{1-\chi(\nu_0-1)},$$

so lässt sich Formel (48) auch schreiben

$$^{(h_0)}f(x,P,p(z)) = {}^{(h_0)}f(x,\bar{P},\bar{p}(z))\left\{e^{-kx}\left[1-\chi(\nu_0-1)\right]^{-h_0}\right\}, \quad (48a)$$

worin $^{(h_0)}f(x,\bar{P},\bar{p}(z))$ eine Frequenzfunktion des Gesamtschadens bedeutet, die gleich aufgebaut ist wie die gegebene, nur dass die Rechnungselemente P und $p(z)$ ersetzt sind durch $\bar{P}$ und $\bar{p}(z)$. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens erhält man dann aus der Beziehung (48a) durch Integration; substituiert man noch $x = uP$, so ergeben sich die Formeln

$$^{(h_0)}F(uP,P,p(z)) = \psi\int_0^{uP} e^{-k(z-uP)}\,{}^{(h_0)}f(z,\bar{P},\bar{p}(z))\,dz \quad (49a)$$

$$= 1-\psi\int_{uP}^{\infty} e^{-k(z-uP)}\,{}^{(h_0)}f(z,\bar{P},\bar{p}(z))\,dz, \quad (49b)$$

in denen zur Abkürzung die Funktion

$$\psi = \left[1-\chi(\nu_0-1)\right]^{-h_0} e^{-ukP} \quad (50)$$

eingeführt wurde. Diese Funktion erreicht für gegebene Werte von u — wie man durch Differenzieren feststellen kann — ihren Minimalwert, wenn die bisher willkürliche Konstante k aus der Gleichung

$$u = \frac{\bar{\nu}_1}{1-\chi(\nu_0-1)} = \frac{\int_0^{\infty} z\,e^{kz}\,p(z)\,dz}{1-\frac{P}{h_0}\left(\int_0^{\infty} e^{kz}\,p(z)\,dz-1\right)} \quad (51)$$

bestimmt wird. Die Konstante k wird dann negativ oder positiv, je nachdem u kleiner oder grösser als Eins ist. Ferner fallen die in den Formeln (49) auftretenden Integrale immer kleiner als Eins aus, wenn für $0 < u \leqslant 1$ Formel (49a) und für $u \geqslant 1$ Formel (49b) benützt wird.

Daraus folgen die Ungleichungen

$$^{(h_0)}F(uP, P, p(z)) < \psi \qquad 0 < u \leqslant 1 \tag{52a}$$

$$1 - {}^{(h_0)}F(uP, P, p(z)) < \psi, \qquad u \geqslant 1 \tag{52b}$$

von denen die letztere für grosse Werte von u oft eine hinreichend genaue Abschätzung der Wahrscheinlichkeitsfunktion erlaubt.

Eine genauere Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion erfordert die Auswertung der in den Formeln (49) auftretenden Integrale. Zu diesem Zweck substituiert man

$$z = \bar{P}\nu_1 + \xi\sqrt{\bar{M}_2'} = \bar{P}\nu_1 + \xi\sqrt{\bar{P}\nu_2 + \bar{P}^2 h_0^{-1}}$$

und bezeichnet die Frequenzfunktion der zufälligen Variablen ξ mit $^{(h_0)}\bar{f}(\xi, \bar{P}, \bar{p}(z))$.

Die Formeln (49) gehen dann in die Ausdrücke

$$^{(h_0)}F(uP, P, p(z)) = \psi \int_{-\infty}^{0} e^{-k\xi\sqrt{\bar{M}_2'}}\, {}^{(h_0)}\bar{f}(\xi, \bar{P}, \bar{p}(z))\, d\xi \tag{53a}$$

und

$$1 - {}^{(h_0)}F(uP, P, p(z)) = \psi \int_{0}^{\infty} e^{-k\xi\sqrt{\bar{M}_2'}}\, {}^{(h_0)}\bar{f}(\xi, \bar{P}, \bar{p}(z))\, d\xi \tag{53b}$$

über. Ersetzt man ferner die Verteilung $^{(h_0)}\bar{f}(\xi, \bar{P}, \bar{p}(z))$ durch ihre Grenzfunktion (46), das heisst, setzt man

$$\bar{f}(\xi, \bar{P}, \bar{p}(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

so erhält man an Stelle der Formeln (53) die Näherungsformeln

$$^{(h_0)}F(uP, P, p(z)) \sim \psi A_0\left(-k\sqrt{\bar{M}_2'}\right) \tag{54a}$$

und

$$1 - {}^{(h_0)}F(uP, P, p(z)) \sim \psi A_0\left(k\sqrt{\bar{M}_2'}\right), \tag{54b}$$

in denen für das Integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{\xi y}\, d\Phi(\xi) = \frac{1 - \Phi(\xi)}{\sqrt{2\pi}\,\Phi'(\xi)}$$

die Abkürzung $A_0(y)$ eingeführt wurde. Einige Werte der Funktion $A_0(y)$ sind in der Tabelle im Anhang zusammengestellt.

In der Regel lässt sich mit Hilfe der Formeln (54) eine hinreichend genaue Auswertung der Wahrscheinlichkeitsfunktion erreichen. Noch genauere Formeln lassen sich ableiten, wenn die Verteilung ${}^{(h_0)}\overline{f}(\xi, \overline{P}, \overline{p}(z))$ nicht durch die Grenzverteilung (46), sondern durch die beiden ersten Glieder der Brunsschen Reihe approximiert wird. Die Formeln (54) sind dann durch je ein weiteres Glied zu ergänzen. Für die Ableitung dieser Formeln sei jedoch auf die Arbeiten [9] und [15] verwiesen.

Die oben abgeleiteten Formeln beziehen sich auf zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeiten. Die ursprünglich von Esscher aufgestellten, für feste Grundwahrscheinlichkeiten geltenden Formeln ergeben sich aus ihnen, indem man $h_0 = \infty$ berücksichtigt. Man gelangt dann zu folgenden neuen Formeln:

$$\psi = e^{-P(1-\nu_0+uk)} \qquad (50') \text{ an Stelle von Formel (50)}$$

$$u = \bar{\nu}_1 = \int_0^\infty z e^{kz} p(z)\, dz \qquad (51') \text{ an Stelle von Formel (51).}$$

Will man eine Wahrscheinlichkeitsfunktion nach der Methode von Esscher auswerten, so wählt man zuerst eine Reihe von geeigneten Werten für k und berechnet die Momente $\nu_0, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2 \ldots$. Anschliessend bestimmt man die zu den gewählten Werten von k entsprechenden Werte von u nach den Formeln (51) oder (51') und ferner die Grössen ψ [Formel (50) oder (51')] und

$$M_2' = \begin{cases} (uP)\dfrac{\bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_1} + \dfrac{(uP)^2}{h_0} & h_0 \neq \infty \\ P\bar{\nu}_2 & h_0 = \infty \end{cases} \qquad (55)$$

Schliesslich erhält man unter Benützung einer Tabelle über die Funktion $A_0(y)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion selbst nach den Formeln (54). In der nachstehenden Tabelle (6) ist die numerische Berechnung einiger Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion auszugsweise ersichtlich. Die Tabelle stützt sich auf die Risikosummenverteilung der Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft in Bern (siehe Figur 5). Ferner wird $P = 5000$ und $h_0 = 40$ vorausgesetzt.

Tabelle 6

Die numerische Auswertung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion nach der Methode von Esscher				
k	0,000 05	0,000 10	0,000 175	0,000 20
v_0	1,000 449	1,000 912	1,001 637	1,001 888
$\bar{v}_1$	1,031 070	1,065 380	1,123 916	1,145 559
$\bar{v}_2$	73,801	81,632	95,359	100,537
u	1,092	1,202	1,413	1,499
ψ	0,908 8	0,622 7	0,170 6	0,083 1
$k\sqrt{\bar{M}_2'}$	0,470 9	1,032 6	2,102 8	2,630 4
${}^{(h_0)}F(uP, P, p(z))$	0,676 0	0,839 8	0,972 4	0,988 7

V.

Anwendungen auf Rückversicherungsprobleme

Eine Versicherungsunternehmung kann die ihr übertragene Ausgleichsaufgabe nur dann erfüllen, wenn sie in der Lage ist, in jedem Geschäftsjahr die gesamte Schadenbelastung zu decken. Die Einnahmen an Nettorisikoprämien — von den Sparprämien und Kostenzuschlägen wird hier abgesehen — reichen dazu nicht immer aus; es ist daher unerlässlich, dass weitere Mittel (Sicherheitszuschläge oder -reserven) zur Verfügung stehen. Diese Sicherheitsmittel müssen anderseits nicht so gross sein, dass sie auch im schlimmsten Falle, das heisst, wenn alle versicherten Summen in einem Geschäftsjahr fällig würden, ausreichen. Praktisch genügt es, wenn ein Betrag vorhanden ist, der nur ganz selten von der Gesamtschadenbelastung in einem Geschäftsjahr überschritten wird. Die vorhandenen Mittel reichen dann allerdings nicht mehr mit Sicherheit, sondern nur noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus. Diese Wahrscheinlichkeit, der sogenannte Sicherheitsgrad, ist ein Mass für die Stabilität des Risikogeschäftes. Geht man von einem bestimmten Sicherheitsgrad aus, so lassen sich die ihm entsprechenden Sicherheitsmittel berechnen.

Der Sicherheitsgrad berechnet sich aus der im Kapitel IV untersuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens. Er hängt von der Höhe der Sicherheitsmittel, von der durch die erwartungsmässige Anzahl der Schadenfälle P gemessenen Bestandesgrösse, von der Risikosummenverteilung $p(z)$ und schliesslich vom Parameter h_0 ab. Führt die Rechnung unter Benützung dieser Elemente zu einem ungenügenden Sicherheitsgrad, so stellt sich die Frage, durch welche Massnahmen der Sicherheitsgrad hinreichend verbessert werden könnte.

Ganz allgemein lässt sich zu dieser Frage feststellen, dass der Sicherheitsgrad nur durch eine geeignete Veränderung der oben erwähnten Rechnungselemente der Wahrscheinlichkeitsfunktion erhöht werden kann. Aus der Fülle der sich bietenden Möglichkeiten soll hier nur die Rückversicherung nach der sogenannten Exzedenten- und Quotenmethode, die eine Veränderung der Risikosummenverteilung $p(z)$ bewirkt, näher untersucht werden.

a) Das Maximum des Selbstbehaltes als Funktion des Sicherheitszuschlages

Bei der Exzedentenrückversicherung werden alle Risikosummen rückversichert, welche ein bestimmtes Maximum M überschreiten. Die ursprüngliche Risikosummenverteilung $p(z)$ geht dann in $p_M(z)$ und der Sicherheitsgrad ${}^{(h_0)}F(uP, P, p(z))$ in ${}^{(h_0)}F(uP, P, p_M(z))$ über, wenn vereinfachend angenommen wird, dass die für ein Rechnungsjahr zur Verfügung stehenden Sicherheitsmittel ausschliesslich aus einem proportionalen Zuschlag $(u-1)$ zu den Nettorisikoprämien bestehen. Berechnet man den Sicherheitsgrad für ein bestimmtes Maximum für verschiedene Werte des Sicherheitszuschlages $(u-1)$, so lässt sich anschliessend durch Interpolation der erforderliche Sicherheitszuschlag berechnen, der einem gegebenen Sicherheitsgrad entspricht. In der Tabelle 7 sind die erforderlichen Sicherheitszuschläge für verschiedene Werte des Maximums M und des Parameters h_0 zusammengestellt, wobei in zwei Varianten ein Sicherheitsgrad von 95 % und 97,5 % vorausgesetzt wird. Die Tabelle stützt sich im übrigen auf $P = 5000$ und die Risikosummenverteilung der Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft in Bern. Die numerischen Resultate dürften in erster Linie für die Feuerversicherung bedeutsam sein.

Tabelle 7

h_0	Erforderlicher Sicherheitszuschlag in % der Nettorisikoprämieneinnahme bei einem Maximum des Selbstbehaltes von M =				
	Fr. 50 000	Fr. 100 000	Fr. 200 000	Fr. 500 000	Fr. 750 000
	a) Sicherheitsgrad 95 %				
∞	9	11	14	18	21
100	19	20	22	25	27
40	29	30	31	34	35
	b) Sicherheitsgrad 97,5 %				
∞	11	13	17	22	25
100	23	25	27	30	33
40	35	36	38	41	43

In der Praxis wird oft nicht nach dem erforderlichen Sicherheitszuschlag bei gegebenem Maximum, sondern umgekehrt nach dem Maximum des Selbstbehaltes bei gegebenem Sicherheitszuschlag gefragt. Das gesuchte Maximum des Selbstbehaltes bestimmt sich in diesem Falle durch Interpolation aus den für verschiedene Maxima berechneten Sicherheitszuschlägen; zum Beispiel erhält man für $h_0 = \infty$ bei einem Sicherheitsgrad von 97,5 % und einem verfügbaren Sicherheitszuschlag von 15 % ein Maximum des Selbstbehaltes von $M = 150\,000$ Fr.

Aus der Tabelle 7 lässt sich folgendes entnehmen:

1. Die Höhe des erforderlichen Sicherheitszuschlages ist in erster Linie abhängig vom Parameter h_0, der die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Daraus lässt sich schliessen, dass die Vernachlässigung dieser Schwankungen unter Umständen zu ganz unrichtigen Resultaten führen kann.

2. Die Rückversicherung nach der Exzedentenmethode wirkt sich um so stärker auf die Höhe des erforderlichen Sicherheitszuschlages aus, je grösser h_0 ist oder, mit anderen Worten, je kleiner die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten sind. Am wirksamsten ist die Exzedentenrückversicherung bei festen Grundwahrscheinlichkeiten.

Vernachlässigt man die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten, so läuft man Gefahr, den Einfluss der Rückversicherung zu überschätzen.

3. Die erforderlichen Sicherheitszuschläge weichen bei verschiedenen Werten von h_0 und M um so stärker voneinander ab, je höher der Sicherheitsgrad gewählt wird.

Der relative Sicherheitszuschlag ist im allgemeinen in einem Versicherungsbestand nicht für alle Risikoklassen gleich hoch; in der Regel ist er um so kleiner, je grösser die Grundwahrscheinlichkeiten und die Risikoprämien sind. Unter diesen Umständen ist es angebracht, das Maximum des Selbstbehaltes nicht einheitlich, sondern für jede Risikoklasse verschieden hoch anzusetzen, und zwar zweckmässig so, dass diese Maxima möglichst unabhängig sind von der Zusammensetzung des Versicherungsbestandes nach Risikoklassen. Dies lässt sich — wenigstens näherungsweise — erreichen, wenn man das Maximum des Selbstbehaltes in jeder Risikoklasse so berechnet, wie wenn der gesamte Versicherungsbestand nur aus Versicherungen der betreffenden Risikoklasse bestehen würde.

b) Die Quotenrückversicherung bei Versicherungsbeständen mit verschiedenen Versicherungszweigen

Die meisten Versicherungsunternehmungen führen eine Reihe von Versicherungszweigen nebeneinander. Für jeden dieser Versicherungszweige werden im allgemeinen die Rechnungselemente P, $p(z)$ und h_0 und der Sicherheitsgrad verschieden ausfallen. Massgebend für die Unternehmung sind aber nicht die Sicherheitsgrade der einzelnen Versicherungszweige, sondern nur der Sicherheitsgrad des Gesamtbestandes. Der Gesamtsicherheitsgrad hängt jedoch stark davon ab, mit welchem Gewicht jene Versicherungszweige im Bestand vertreten sind, bei denen grosse Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten vorkommen. Daraus folgt anderseits, dass der Gesamtsicherheitsgrad sich merklich verbessern lässt, wenn das Gewicht der gefährdeten Teilbestände durch eine Quotenrückversicherung aller Versicherungen dieser Teilbestände verkleinert wird.

Um die Auswirkung einer derartigen Quotenversicherung auf den Sicherheitsgrad einer Unternehmung zu untersuchen, muss vorerst

eine Methode entwickelt werden, die es gestattet, die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens zu berechnen, wenn der Gesamtbestand aus mehreren Teilbeständen mit den Rechnungselementen P_i, $p_i(z)$ und h_{0i} besteht. Wäre der Parameter h_{0i} in allen Teilbeständen gleich gross, so liesse sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Gesamtbestand nach den in Kapitel IV entwickelten Methoden auswerten, wobei die Elemente

$$\begin{aligned} h_0 &= h_{01} = h_{02} = h_{03} = \dots \\ P &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots \\ p(z) &= \frac{1}{P}\left[P_1 p_1(z) + P_2 p_2(z) + P_3 p_3(z) + \dots\right] \end{aligned} \tag{56}$$

in Rechnung zu stellen wären. Der allgemeine Fall mit $h_{01} \neq h_{02} \neq h_{03} \dots$ lässt sich auf den Spezialfall (56) zurückführen, weil nach dem Transformationssatz eine Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $h_{0i} \neq \infty$ immer durch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $h_{0i} = \infty$ ersetzt werden kann. Setzt man die für jeden Teilbestand geltenden transformierten Rechnungselemente P_i^* und $p_i^*(z)$ in Formel (56) ein, so erhält man die für den Gesamtbestand gültigen Rechnungselemente. P^* und $p^*(z)$, aus denen nach der Methode von Esscher die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens berechnet wird. Diese etwas langwierige Zwischenrechnung wird hier weggelassen; für $u \geqslant 1$ erhält man schlussendlich folgende Formeln:

$$1 - {}^{(h_{0i})}F(uP, P_i, p_i(z)) \sim \psi A_0\left(k\sqrt{\bar{M}_2'}\right) \tag{57}$$

mit

$$\psi = e^{-ukP} \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \frac{P_i}{h_{0i}}(\nu_{0i} - 1)\right]^{-h_{0i}} \tag{58}$$

$$u = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i \bar{\nu}_{1i}}{1 - \frac{P_i}{h_{0i}}(\nu_{0i} - 1)} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{m} P_i u_i \tag{59}$$

$$\bar{M}_2' = \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i P_i \bar{\nu}_{2i}}{\bar{\nu}_{1i}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(u_i P_i)^2}{h_{0i}}. \tag{60}$$

Die Formeln (57) bis (60) sind gleich aufgebaut wie die im Abschnitt IV *c* abgeleiteten Formeln (50) bis (55), nur dass die Summen oder Produkte der für alle Teilbestände geltenden Ausdrücke an Stelle der einzelnen Ausdrücke auftreten. Die verallgemeinerten Formeln erlauben es, die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens bei beliebig zusammengesetzten Versicherungsbeständen zu berechnen und insbesondere die Auswirkung einer Quotenrückversicherung bei gefährdeten Teilbeständen numerisch zu untersuchen.

Es sei folgendes Beispiel betrachtet: Ein Versicherungsbestand zerfalle in zwei Teilbestände mit $P_1 = P_2 = 2500$, $h_{01} = \infty$ und $h_{02} = 40$; in beiden Teilbeständen gelte die Risikosummenverteilung der Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft in Bern mit einem Maximum des Selbstbehaltes von Fr. 100 000. In der Tabelle 8 sind die erforderlichen Sicherheitszuschläge für verschiedene Werte des Sicherheitsgrades zusammengestellt, wobei angenommen wird, der zweite Teilbestand werde in drei Varianten zu 0 %, 25 % oder 50 % quotenweise rückversichert.

Tabelle 8

Sicherheitsgrad	Erforderlicher Sicherheitszuschlag in % der Nettorisikoprämie bei einer quotenmässigen Rückversicherung des Teilbestandes mit $h_0 = 40$ von		
	0 %	25 %	50 %
80 %	8,50	7,25	6,00
85 %	10,75	9,25	7,50
90 %	13,75	11,50	9,50
95 %	17,00	14,50	12,00

Die Tabelle zeigt, dass der erforderliche Sicherheitszuschlag nahezu eine lineare Funktion der im Selbstbehalt verbleibenden Quote des zweiten Teilbestandes darstellt; die Auswirkung der Rückversicherung auf die Höhe des Sicherheitszuschlages ist im übrigen um so stärker, je höher der Sicherheitsgrad gewählt wird. Durch eine Quotenrückversicherung lässt sich unter Umständen eine ins Gewicht fallende Verbesserung des Sicherheitsgrades erreichen.

c) Die Prämienberechnung bei der Schadenexzedentenrückversicherung

Bei einer Schadenexzedentenrückversicherung vergütet der Rückversicherer gegen eine bestimmte Prämie dem Erstversicherer die Gesamtschadenbelastung, sofern und soweit sie eine zum voraus festgesetzte Grenze — zum Beispiel 120 % der Nettorisikoprämieneinnahme — übersteigt. Bei dieser Rückversicherungsform stehen nicht — wie bei der gewöhnlichen Rückversicherung nach der Exzedenten- oder Quotenmethode — einzelne dem Rückversicherer überwiesene Versicherungen unter Risiko, sondern das kollektive Ergebnis des Risikogeschäftes des Erstversicherers. Im folgenden soll die Berechnung der Prämie für die Schadenexzedentenrückversicherung kurz behandelt werden, wobei von der Annahme ausgegangen wird, dass der Rückversicherer den Gesamtschaden x zu vergüten hat, sofern und soweit er den Betrag uP übersteigt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Rückversicherer einen Betrag zwischen $y = x - uP$ und $y + dy$ an den Erstversicherer leisten muss, beträgt ${}^{(h_0)}f(x, P, p(z))\,dx$, wobei nur Gesamtschäden $x > uP$ zu einer Leistung des Rückversicherers führen. Die Prämie für die Schadenexzedentenrückversicherung ${}^{(h_0)}\mathfrak{P}(uP, P, p(z))$ ergibt sich somit aus dem Integral

$$ {}^{(h_0)}\mathfrak{P}(uP, P, p(z)) = \int_{uP}^{\infty} (x - uP)\, {}^{(h_0)}f(x, P, p(z))\, dx. \tag{61} $$

Das Integral (61) lässt sich, wie die Wahrscheinlichkeitsfunktion nach der Methode von Esscher, auf eine der numerischen Auswirkung zugängliche Form bringen. Die Ableitung der nachstehenden Formel (62) erfolgt ganz analog wie bei der Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens im Abschnitt IV c); es genügt deshalb hier nur die Schlussformel

$$ {}^{(h_0)}\mathfrak{P}(uP, P, p(z)) \sim \psi \overline{M}_2' A_1\left(k \sqrt{\overline{M}_2'}\right) \tag{62} $$

mit

$$ A_1(y) = \int_0^{\infty} e^{\xi y}\, \xi\, d\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - y \frac{1 - \Phi(y)}{\Phi'(y)}\right) \tag{63} $$

anzugeben. Die in der Formel (62) auftretenden Grössen k, ψ und $\overline{M}_2'$ sind durch die Formeln (50), (51) und (55) im Abschnitt IV c) gegeben;

im Anhang sind einige für numerische Berechnungen nützliche Werte der Funktion $A_1(y)$ zusammengestellt.

In der nachstehenden Tabelle 9 sind einige Prämien für Schadenexzedentenrückversicherungen aufgeführt; diese Zahlenwerte gelten für $P = 5000$ und stützen sich auf die Risikosummenverteilung der Schweizerischen Mobiliar-Versicherungs-Gesellschaft in Bern; in einer Variante wird ferner vorausgesetzt, dass neben der Schadenexzedentenrückversicherung noch eine gewöhnliche Exzedentenrückversicherung mit einem Maximum des Selbstbehaltes von Fr. 200 000 geführt wird.

Tabelle 9

Maximaler Gesamtschaden zu Lasten des Erstversicherers	Prämie für die Schadenexzedentenrückversicherung in % der Nettorisikoprämieneinnahme des Erstversicherers		
	$h_0 =$ 40	$h_0 =$ 100	$h_0 =$ ∞
a) kein Maximum des Selbstbehaltes			
110	4,25	2,64	1,46
120	1,99	0,90	0,33
130	0,81	0,27	0,05
140	0,32	0,07	—
b) Maximum des Selbstbehaltes = 200 000 Fr.			
110	3,48	1,61	0,45
120	1,43	0,42	0,03
130	0,51	0,08	—
140	0,17	—	—

Aus der Tabelle 9 lässt sich folgendes entnehmen.

1. Die Prämien für eine Schadenexzedentenrückversicherung hangen wesentlich vom Maximum des Selbstbehaltes ab; die Kosten der Schadenexzedentenrückversicherung lassen sich fühlbar senken,

wenn die grössten Risikosummen nach der gewöhnlichen Exzedentenmethode individuell rückversichert werden. Es empfiehlt sich überhaupt fast immer, die Schadenexzedentenrückversicherung in Verbindung mit einer gewöhnlichen Exzedentenrückversicherung zu führen, weil die Prämien der Schadenexzedentenrückversicherung durch das stets recht unsichere Gewicht der grossen Risikosummen in der Risikosummenverteilung stark beeinflusst werden. Die Prämienberechnung bei der Schadenexzedentenrückversicherung lässt sich somit auf eine sicherere Grundlage stellen, wenn die grössten Risikosummen individuell rückversichert werden.

2. Der die zufallsartigen Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten messende Parameter h_0 ist für das Prämienniveau bei der Schadenexzedentenrückversicherung von grundlegender Bedeutung. Eine Vernachlässigung der Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten würde in der Regel zu ganz ungenügenden Prämien führen. Die erweiterte Risikotheorie, welche die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten berücksichtigt, erlaubt es demgegenüber, die Prämien für die Schadenexzedentenrückversicherung so zu berechnen, dass sie dem wirklichen Risiko in den verschiedenen Versicherungszweigen Rechnung tragen.

* * *

Die behandelten Beispiele dürften eine gewisse Vorstellung von den numerischen Auswirkungen von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten gegeben haben. Im allgemeinen lässt sich feststellen, dass die Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeiten sich numerisch so stark auswirken, dass sie nicht vernachlässigt werden dürfen. Die erörterten Anwendungsbeispiele zeigen überdies, dass die von der Risikotheorie entwickelten Methoden es erlauben, eine Reihe von versicherungstechnischen Problemen rechnerisch zu behandeln, welche in der Praxis oft nur mit Hilfe von gefühlsmässigen Erwägungen gelöst werden, die insbesondere den Mathematiker nicht befriedigen können. Es ist zu hoffen, dass die Praxis von der durch die Einführung von zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten anpassungsfähiger gewordenen Risikotheorie in vermehrtem Masse Gebrauch machen wird.

Anhang

Einige Werte der Funktionen $A_0(y)$ und $A_1(y)$

y	$A_0(y)\,10^3$ [1]	$A_1(y)\,10^3$ [2]	y	$A_0(y)\,10^3$ [1]	$A_1(y)\,10^3$ [2]
0,0	5000	3989	2,0	1681	627
0,1	4625	3527	2,1	1620	586
0,2	4292	3131	2,2	1564	549
0,3	3997	2790	2,3	1510	516
0,4	3733	2496	2,4	1460	485
0,5	3496	2241	2,5	1413	456
0,6	3283	2019	2,6	1369	430
0,7	3091	1825	2,7	1327	406
0,8	2918	1655	2,8	1288	384
0,9	2760	1506	2,9	1250	363
1,0	2616	1374	3,0	1215	344
1,1	2484	1257	3,5	1063	266
1,2	2364	1153	4,0	944	210
1,3	2253	1060	4,5	848	170
1,4	2152	977	5,0	769	143
1,5	2058	903			
1,6	1971	836			
1,7	1890	776			
1,8	1816	721			
1,9	1746	672			

$$A_0(y) = \int_0^\infty e^{\xi y}\, d\Phi(\xi) = \frac{1-\Phi(y)}{\sqrt{2\pi}\,\Phi'(y)}$$

$$A_1(y) = \int_0^\infty e^{\xi y}\,\xi\, d\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - y\,\frac{1-\Phi(y)}{\Phi'(y)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - y\,A_0(y)$$

[1]) Diese Werte wurden aus der Arbeit [9] übernommen.

[2]) Für die höheren Werte von y ist die letzte Dezimale unsicher.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Cramér:* On the mathematical theory of risk. Skandiafestschrift, Stockholm 1930.

[2] *C.-O. Segerdahl:* On homogeneous random processes and collective risk theory, Uppsala 1939.

[3] — Über einige risikotheoretische Fragestellungen. Skand. Aktuarietidskrift 1942.

[4] — Some properties of the ruin function in the collective theory of risk. Skand. Aktuarietidskrift 1948.

[5] *F. Lundberg:* Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. Skand. Aktuarietidskrift 1930.

[6] — Some supplementary researches on the collective risk theory. Skand. Aktuarietidskrift 1932.

[7] — On the numerical application of the collective risk theory. De Förenade 1933, Stockholm 1934.

[8] *I. Laurin:* An introduction into Lundberg's theory of risk. Skand. Aktuarietidskrift 1930.

[9] *F. Esscher:* On the probability-function in the collective theory of risk. Skand. Aktuarietidskrift 1932.

[10] *Sven Tächlind:* Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables. Skand. Aktuarietidskrift 1942.

[11] *Knut Hultmann:* Einige numerische Untersuchungen auf Grund der kollektiven Risikotheorie. Skand. Aktuarietidskrift 1942.

[12] *Teivo Pentikäinen:* Einige numerische Untersuchungen über das risikotheoretische Verhalten von Sterbekassen. Skand. Aktuarietidskrift 1947.

[13] *Ove Lundberg:* On random processes and their application to sicknes and accident statistics, Uppsala 1940.

[14] *Hans Ammeter:* Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten. Mitteilungen 1946.

[15] — A generalisation of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic-probabilities. Skand. Aktuarietidskrift 1948.

[16] — Untersuchungen über die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einem Versicherungsbestand. Mitteilungen 1945.

[17] *R. v. Mises:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1931.

[18] *M. G. Kendall:* The advanced theory of statistics, London 1947.

[19] *F. Eggenberger:* Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Mitteilungen, Heft 19, 1924.

[20] *P. Nolfi:* Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung. XII. Internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940.

[21] — Wahrscheinlichkeit unstetiger Ereignisse bei kontinuierlich wirkenden Ursachen. Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 15, fasc. 1.

[22] *C. Lange:* Untersuchungen über die jährlichen Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebensversicherung und in der Feuerversicherung. Wirtschaft und Recht der Versicherung 64/2, 1932.