Variation der Rechnungsgrundlagen in der Invalidenversicherung

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **49 (1949)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555111

Variation der Rechnungsgrundlagen in der Invalidenversicherung

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Die Wahl zutreffender Rechnungsgrundlagen ist in der privaten Invalidenversicherung mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden; man kommt meist nicht darum herum, vorgängig die Prämien mit einer grösseren Zahl Invalidierungstafeln durchzurechnen. Der Rechenaufwand lässt sich ganz bedeutend vermindern, wenn die beiden folgenden Annahmen zugelassen werden:

a) Ersetzung der Aktivitätsordnung durch die Überlebensordnung;

b) Verlauf der Invalidierungswahrscheinlichkeit (oder der Invalidierungsintensität) nach der Formel von Makeham.

Die erste der beiden Vereinfachungen ist heute weitgehend verwirklicht, so z. B. in den Tarifen 1948 für die Personalversicherung [1]). Die zweite Annahme kann ebenfalls erfüllt werden, indem die Formel von Makeham sehr gut zum Ausgleichen der beobachteten einjährigen Invalidierungswahrscheinlichkeiten (oder der Invalidierungsintensitäten) geeignet ist. In den eben erwähnten Tarifen 1948 für Personalversicherungen gibt eine Makeham-Kurve den Ablauf der Invalidierung sowohl für Männer als auch für Frauen wieder.

---

[1]) *a) Vereinigung Schweizerischer Lebensversicherungs-Gesellschaften:* Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen, 1948.

b) Zwinggi, E.: Eine Näherungsformel für die Prämie der Invalidenversicherung. Experientia, Vol. IV/6, 1948, S. 218.

c) — Initiation of a Formula for approximate Valuation of Premiums for Disability Benefits. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 31. Jahrgang, 1948, S. 165—170.

Wir nehmen an, die Rente werde jährlich vorschüssig, erstmals am Ende des Invalidierungsjahres, letztmals beim Alter von $x+n-1$ Jahren ausgerichtet. Die einjährige abhängige Invalidierungswahrscheinlichkeit sei $^*i_x = \alpha + \beta c^x$; die zugehörige Prämie wird mit $P^i_{x\overline{n}|}(\alpha, \beta, c)$ bezeichnet. Dann haben wir, wenn die Sterblichkeit der Invaliden gleich der Sterblichkeit der Lebenden überhaupt ist,

$$P^i_{x\overline{n}|}(\alpha, \beta, c) = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} v D_{x+t} \, {}^*i_{x+t} \, \mathfrak{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t}} =$$

$$= \alpha \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} v D_{x+t} \, \mathfrak{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t}} + \beta c^x \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} c^t v D_{x+t} \, \mathfrak{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t}}. \quad (1)$$

Abkürzend benennen wir

$$f_{x+t} = v D_{x+t} \, \mathfrak{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}; \quad (2)$$

diese Werte, die unabhängig vom Verlauf der Invalidierungswahrscheinlichkeit und für die vorkommenden Verfallsalter $x+n$ auf jeden Fall zu berechnen sind, sollen tabelliert vorliegen. Sodann stellen wir uns vor, dass wir für einen mittleren Wert von c, den wir mit c_0 bezeichnen, auch die Grössen $c_0^t f_{x+t} = F_{x+t}$ niedergeschrieben haben; auf das praktische Vorgehen kommen wir später zurück. — Für die Parameter α, β, c_0 lautet dann (1)

$$P^i_{x\overline{n}|}(\alpha, \beta, c_0) = \alpha \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} f_{x+t}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t}} + \beta c_0^x \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} F_{x+t}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t}}. \quad (3)$$

Die Variation von α und von β bei festem c_0 verlangt minimalen Rechenaufwand und bedarf keiner Hinweise. Soll c variiert werden, so gehen wir folgendermassen vor. Wir schreiben $c = c_0 + \lambda$. Im zweiten Glied von (3) haben wir dann an die Stelle von $\sum F_{x+t} = \sum c_0^t f_{x+t}$

die Grösse $\sum c^t f_{x+t} = \sum (c_0 + \lambda)^t f_{x+t}$ zu setzen. Bei Entwicklung von $(c_0 + \lambda)^t$ in die Binomialreihe folgt aber

$$\sum c^t f_{x+t} = \sum F_{x+t} + \frac{\lambda}{c_0} \sum \binom{t}{1} F_{x+t} + \frac{\lambda^2}{c_0^2} \sum \binom{t}{2} F_{x+t} + \ldots . \qquad (4)$$

Wir greifen das allgemeine Glied $\sum \binom{t}{r} F_{x+t}$ heraus und schreiben für

$$\binom{t}{r} = \binom{t+r}{r} - \binom{r}{1}\binom{t+r-1}{r-1} + \binom{r}{2}\binom{t+r-2}{r-2} - + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1}\binom{t+1}{1} + (-1)^r . \qquad (5)$$

Sodann benutzen wir eine Eigenschaft, welche für die höhern Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden abgeleitet worden ist. Es ist [1])

$$S_x^{(r)} = \sum_{t=0} \binom{t+r}{r} D_{x+t}$$

mit

$$S_x^{(0)} = N_x = \sum_{t=0} D_{x+t}$$

und

$$S_x^{(1)} = \sum_{t=0} N_{x+t} \quad \text{usw.};$$

umgedeutet für unsern Fall wird

$$\Phi_x^{(r)} = \sum_{t=0}^{n-2} \binom{t+r}{r} F_{x+t} \qquad (6)$$

mit

$$\Phi_x^{(0)} = \sum_{t=0}^{n-2} F_{x+t}$$

und

$$\Phi_x^{(1)} = \sum_{t=0}^{n-2} \Phi_{x+t}^{(0)} \quad \text{usw.}$$

---

[1]) *E. Fischer:* Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 42. Band, 1942, S. 211.

Die Reihe (4) ist damit darstellbar als

$$\sum_{t=0}^{n-2} c^t f_{x+t} = \Phi_x^{(0)} + \frac{\lambda}{c_0}\left[\Phi_x^{(1)} - \Phi_x^{(0)}\right] + \frac{\lambda^2}{c_0^2}\left[\Phi_x^{(2)} - 2\Phi_x^{(1)} + \Phi_x^{(0)}\right] +$$

$$+ \frac{\lambda^3}{c_0^3}\left[\Phi_x^{(3)} - 3\Phi_x^{(2)} + 3\Phi_x^{(1)} - \Phi_x^{(0)}\right] + \ldots = \tag{7}$$

$$= a_0 + \frac{\lambda}{c_0} a_1 + \frac{\lambda^2}{c_0^2} a_2 + \frac{\lambda^3}{c_0^3} a_3 + \ldots . \tag{8}$$

Die Berechnung der $\Phi_x^{(r)}$ erfolgt wie diejenige der höhern Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden durch «Summation von hinten»

Für die Konvergenz von (8) ist wichtig zu wissen, wie gross λ praktisch sein kann. Zur Abschätzung des Variabilitätsbereiches lassen wir $\alpha = 0$ werden; wir erhalten für den variierten Wert $^*i'_x = \beta(c_0 + \lambda)^x$, wenn wir für $^*i_x = \beta c_0^x$ vergleichsweise «1» setzen:

c_0	λ	$^*i'_x = \dfrac{\beta(c_0+\lambda)^x}{\beta c_0^x}$	
		$x + n = 60$	$x + n = 65$
1,1	+ 0,01	1,72	1,80
	— 0,01	0,58	0,55
	+ 0,02	2,95	3,23
	— 0,02	0,33	0,30

Grössere Variationen als $\lambda = \pm 0{,}02$ kommen praktisch nicht vor; der bei $\lambda = \pm 0{,}02$ überstrichene Bereich verhält sich bei $x + n = 65$ wie 1:10,8; bei $\lambda = \pm 0{,}01$ und $x + n = 65$ verhält sich der Bereich noch wie 1:3,3. Unter diesen Umständen ist es möglich, die Reihe (8) durch eine geometrische zu approximieren.

Wir schreiben

$$\sum_{t=0}^{n-2} c^t f_{x+t} = a_0 + \frac{\lambda a_1}{c_0}\left[1 + \frac{\lambda a_2}{c_0 a_1} + \frac{\lambda^2 a_3}{c_0^2 a_1} + \dots\right] \sim a_0 + \frac{\lambda a_1}{c_0} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda a_2}{c_0 a_1}}, \quad (9)$$

oder ausgedrückt durch die Funktionen $\Phi_x^{(r)}$,

$$\sum_{t=0}^{n-2} c^t f_{x+t} \sim \Phi_x^{(0)} + \frac{\lambda}{c_0} \frac{\Phi_x^{(1)} - \Phi_x^{(0)}}{1 - \dfrac{\lambda}{c_0} \dfrac{\Phi_x^{(2)} - 2\Phi_x^{(1)} + \Phi_x^{(0)}}{\Phi_x^{(1)} - \Phi_x^{(0)}}} =$$

$$= \Phi_x^{(0)} + \frac{\lambda}{c_0} \frac{\Phi_{x+1}^{(1)}}{1 - \dfrac{\lambda \Phi_{x+2}^{(2)}}{c_0 \Phi_{x+1}^{(1)}}}. \quad (10)$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst; es genügt, die zweiten Summen der Grösse $F_{x+t} = c_0^t v D_{x+t}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$ zu berechnen, um auf $\sum_{t=0}^{n-2} c^t v D_{x+t}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$ mit absolut ausreichender Genauigkeit schliessen zu können.

Bei der praktischen Anwendung von (10) hat man, sobald die Prämie bei ein und demselben Schlussalter für mehrere Abschlussalter berechnet werden muss, folgendes zu beachten. Man bestimmt, ausgehend von einem tiefsten Abschlussalter z, die Werte f_{z+t} und $c_0^t f_{z+t} = F_{z+t}$ und daraus durch Summation die Grössen $\Phi_{z+t}^{(0)}$, $\Phi_{z+t}^{(1)}$ und $\Phi_{z+t}^{(2)}$. Für das Abschlussalter $z + \Delta$ und mit den Parametern α, β, c lautet (3)

$$P^i_{z+\Delta:\overline{n-\Delta}|}(\alpha, \beta, c) = \alpha \frac{\sum_{t=\Delta}^{n-2} f_{z+t}}{\sum_{t=\Delta}^{n-1} D_{z+t}} + \beta c^z \frac{\sum_{t=\Delta}^{n-2} c^t f_{z+t}}{\sum_{t=\Delta}^{n-1} D_{z+t}}.$$

Für

$$\sum_{t=\Delta}^{n-2} c^t f_{z+t} = c^\Delta \sum_{t=0}^{n-2-\Delta} c^t f_{z+\Delta+t}$$

kann man aber gleich wie in (4) ansetzen

$$c^\Delta \sum_{t=0}^{n-2-\Delta} c^t f_{z+\Delta+t} = (c_0+\lambda)^\Delta \left\{ \sum_{t=0}^{n-2-\Delta} c_0^t f_{z+\Delta+t} + \frac{\lambda}{c_0} \sum_{t=0}^{n-2-\Delta} \binom{t}{1} c_0^t f_{z+\Delta+t} + \ldots \right\} =$$

$$= \left(\frac{c_0+\lambda}{c_0}\right)^\Delta \left\{ \sum_{t=0}^{n-2-\Delta} F_{z+\Delta+t} + \frac{\lambda}{c_0} \sum_{t=0}^{n-2-\Delta} \binom{t}{1} F_{z+\Delta+t} + \ldots \right\} \sim$$

$$\sim \left(\frac{c_0+\lambda}{c_0}\right)^\Delta \left\{ \Phi^{(0)}_{z+\Delta} + \frac{\lambda}{c_0} \frac{\Phi^{(1)}_{z+\Delta} - \Phi^{(0)}_{z+\Delta}}{1 - \dfrac{\lambda}{c_0} \dfrac{\Phi^{(2)}_{z+\Delta} - 2\Phi^{(1)}_{z+\Delta} + \Phi^{(0)}_{z+\Delta}}{\Phi^{(1)}_{z+\Delta} - \Phi^{(0)}_{z+\Delta}}} \right\} =$$

$$= \left(\frac{c_0+\lambda}{c_0}\right)^\Delta \left\{ \Phi^{(0)}_{z+\Delta} + \frac{\lambda}{c_0} \frac{\Phi^{(1)}_{z+\Delta+1}}{1 - \dfrac{\lambda\,\Phi^{(2)}_{z+\Delta+2}}{c_0\,\Phi^{(1)}_{z+\Delta+1}}} \right\}. \tag{11}$$

Abschliessend soll die Güte der Approximation durch ein Rechenbeispiel belegt werden. Für die Sterbetafel SM 1939/44, 3 %, $z = 20$, $z + n = 65$, $c_0 = 1{,}1$ und $c = c_0 \pm \lambda$ erhalten wir für $\sum_{t=\Delta}^{n-2} c^t f_{z+t}$ die Werte:

(Tabelle siehe nächste Seite.)

Es ist in der privaten Versicherung ziemlich selten, dass eine Invalidenrente schon für einen 20jährigen versichert wird; die beim Alter von 20 Jahren auftretenden etwas grösseren Abweichungen sind daher praktisch bedeutungslos.

Δ	$z+\Delta$	$\lambda = +0{,}01$			$\lambda = -0{,}01$		
		genau	nach (11)	Abweichung ‰	genau	nach (11)	Abweichung ‰
0	20	12 703	12 714	0,9	8 318	8 313	0,6
10	30	11 192	11 194	0,2	6 936	6 935	0,1
20	40	8 614	8 611	0,3	4 967	4 968	0,2
30	50	4 775	4 773	0,4	2 516	2 517	0,4

Δ	$z+\Delta$	$\lambda = +0{,}02$			$\lambda = -0{,}02$		
		genau	nach (11)	Abweichung ‰	genau	nach (11)	Abweichung ‰
0	20	15 880	16 016	8,6	6 821	6 772	7,2
10	30	14 299	14 339	2,8	5 500	5 484	2,9
20	40	11 353	11 356	0,3	3 779	3 774	1,3
30	50	6 558	6 554	0,6	1 825	1 823	1,1