Berechnung und Darstellung der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Berechnung und Darstellung der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

1. Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen

Aufgabe. — Gegeben ist eine Gesamtheit von gleichaltrigen Personen, aus welcher n voneinander unabhängige Ursachen das endgültige Ausscheiden bewirken. Gesucht sind die einjährigen unabhängigen und die einjährigen abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen über die Verteilung der Ausscheidefälle innerhalb des Beobachtungsjahres und über die zeitliche Entwicklung des Beobachtungsbestandes.

Ausgangsgleichungen. — Wir bezeichnen mit $L(x)$ die Anzahl der Personen vom Alter x und mit $T^i(x)\,dx$ die Anzahl Personen, welche aus der Ursache i ausschieden und im Zeitpunkte des Ausscheidens das Alter x bis $x + dx$ aufwiesen. Dann ist die Intensität des Ausscheidens infolge der Ursache i definiert durch

$$\mu_x^i = \frac{T^i(x)}{L(x)}.$$

Weiter haben wir zwischen der gesuchten einjährigen *unabhängigen* Ausscheidewahrscheinlichkeit q_x^i und der zugehörigen Intensität μ_x^i den Zusammenhang [1])

$$q_x^i = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t}^i\,dt\right) = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \frac{T^i(x+t)}{L(x+t)}\,dt\right). \quad (1)$$

---

[1]) Formel (25), S. 22 in E. Zwinggi: Versicherungsmathematik (Basel 1945).

In gleicher Weise gilt für die einjährige *abhängige* Wahrscheinlichkeit $^*q_x^i$ die Darstellung[1])

$$^*q_x^i = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^\tau \sum_{k=1}^n \mu_{x+t}^k \, dt\right) \mu_{x+\tau}^i \, d\tau =$$

$$= \int_0^1 \exp\left(-\int_0^\tau \sum_{k=1}^n \frac{T^k(x+t)}{L(x+t)} dt\right) \frac{T^i(x+\tau)}{L(x+\tau)} d\tau . \tag{2}$$

Auswertung der Gleichung (1). — Oftmals kann es genügen, anzunehmen, dass die Ausscheidefälle gleichmässig über das Jahr verteilt sind und der Beobachtungsbestand sich linear verändert. Wenn L_x den Beobachtungsbestand zu Beginn des Jahres bedeutet und T_x^i die Anzahl der über das Beobachtungsjahr insgesamt aus der Ursache i ausgeschiedenen Elemente, wobei das Alter x beidemal auf den Beginn des Beobachtungsjahres gemessen ist, so hätte man für $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$T^i(x+t)\,dt = T_x^i dt,$$

$$L(x+t) = L_x + (L_{x+1} - L_x)\,t = L_x + \Delta_x t .$$

Um den möglichst allgemeinen Fall zu erhalten, nehmen wir nunmehr an, es seien

$$T^i(x+t)\,dt = T_x^i \left[a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + a_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\right] dt \tag{3}$$

und

$$L(x+t) = L_x \left[b_0 + b_1 t + b_2 \frac{t^2}{2!} + b_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\right] \tag{4}$$

mit

$$1 = \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots\right) dt,$$

wobei die a_k und b_k als gegeben, das will heissen als aus den Beobachtungszahlen feststellbar anzusehen sind. Wenn z. B. angesetzt wird

$$T^i(x+t)\,dt = T_x^i [a_0 + a_1 t]\,dt,$$

[1]) Formel (32), S. 24 in «Versicherungsmathematik».

so brauchen wir zur Bestimmung von a_0 und a_1 zwei Beobachtungszahlen, z. B.

$$\int_0^{1/2} T^i(x+t)\,dt = {}_{\frac{1}{2}}T_x^i = T_x^i\left[\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{8}\right]$$

und

$$\int_0^1 T^i(x+t)\,dt = {}_1T_x^i = T_x^i = T_x^i\left[a_0+\frac{a_1}{2}\right].$$

Aus (4) folgt

$$\frac{1}{L(x+t)} = \frac{1}{L_x}\,\frac{1}{b_0+b_1 t+b_2\dfrac{t^2}{2!}+b_3\dfrac{t^3}{3!}+\ldots} =$$

$$= \frac{1}{L_x}\left[B_0+B_1 t+B_2\frac{t^2}{2!}+B_3\frac{t^3}{3!}+\ldots\right] \tag{5}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
1 &= B_0 b_0\\
0 &= B_0 b_1 + B_1 b_0\\
0 &= B_0 b_2 + 2B_1 b_1 + B_2 b_0\\
0 &= B_0 b_3 + 3B_1 b_2 + 3B_2 b_1 + B_3 b_0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir kürzen ab mit $J_t^i = \dfrac{T^i(x+t)}{L(x+t)}$ und erhalten aus (1) unter Verwendung von (3) und (5),

$$J_t^i = \frac{T_x^i}{L_x}\left[a_0B_0+(a_0B_1+a_1B_0)\,t+(a_0B_2+2a_1B_1+a_2B_0)\frac{t^2}{2!}+\ldots\right] =$$

$$= \frac{T_x^i}{L_x}\left[c_0+c_1 t+c_2\frac{t^2}{2!}+c_3\frac{t^3}{3!}+\ldots\right], \tag{7}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= a_0 B_0 \\ c_1 &= a_0 B_1 + a_1 B_0 \\ c_2 &= a_0 B_2 + 2 a_1 B_1 + a_2 B_0 \\ c_3 &= a_0 B_3 + 3 a_1 B_2 + 3 a_2 B_1 + a_3 B_0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Sei weiter

$$\lambda_k = \frac{c_{k-1} T_x^i}{L_x}; \tag{9}$$

dann wird

$$I_1^i = \int_0^1 J_t^i dt = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2!} + \frac{\lambda_3}{3!} + \dots; \tag{10}$$

dies eingeführt in (1) ergibt

$$1 - q_x^i = \exp(-I_1^i) = \exp\left(-\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2!} - \frac{\lambda_3}{3!} - \dots\right). \tag{11}$$

Für die weitere Entwicklung empfiehlt es sich, in (11) von den Semi-Invarianten nach Thiele abzugehen. Es gilt allgemein

$$\exp\left(-\lambda_1 r - \lambda_2 \frac{r^2}{2!} - \lambda_3 \frac{r^3}{3!} - \dots\right) = 1 - \mu_1 r - \mu_2 \frac{r^2}{2!} - \mu_3 \frac{r^3}{3!} - \dots. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt mit $r = 1$,

$$\underline{q_x^i = \mu_1 + \frac{\mu_2}{2!} + \frac{\mu_3}{3!} + \dots.} \tag{13}$$

Durch Differentiation von (12) und Koeffizientenvergleich kann man die μ_k leicht erhalten; es ist

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_1 \\ \mu_2 &= \lambda_2 - \lambda_1 \mu_1 \\ \mu_3 &= \lambda_3 - 2 \lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2 \\ \mu_4 &= \lambda_4 - 3 \lambda_3 \mu_1 - 3 \lambda_2 \mu_2 - \lambda_1 \mu_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

oder alles ausgedrückt durch λ_k,

$$\left.\begin{array}{l}
\mu_1 = \lambda_1 \\
\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1^2 \\
\mu_3 = \lambda_3 - 3\,\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^3 \\
\mu_4 = \lambda_4 - 4\,\lambda_3\lambda_1 - 3\,\lambda_2^2 + 6\,\lambda_2\lambda_1^2 - \lambda_1^4 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (14)$$

Der erste Teil der Aufgabe ist mit (13) und (14) gelöst. Aus den als bekannt vorauszusetzenden a_k und b_k bestimmen wir zuerst aus (6) die Reihe der B_k, dann aus (8) die c_k, weiter aus (9) die λ_k und endlich aus (14) die μ_k.

Beispiel. — Für den eingangs erwähnten Fall der gleichmässigen Verteilung der Ausscheidefälle und der linearen Entwicklung des Beobachtungsbestandes findet man

aus (3):

$$a_0 = 1\,,$$

aus (4):

$$b_0 = 1 \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{\Delta_x}{L_x}\,,$$

aus (6) und (8):

$$B_k = \frac{(-1)^k\,k!\,\Delta_x^k}{L_x^k} = c_k\,,$$

aus (9):

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!\,\Delta_x^{k-1}\,T_x^i}{L_x^k}\,,$$

aus (14):

$$\mu_k = \frac{(-1)^{k-1}\,T_x^i(T_x^i+\Delta_x)(T_x^i+2\Delta_x)\ldots\{T_x^i+(k-1)\,\Delta_x\}}{L_x^k}\,,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Eingesetzt in (13) erhalten wir

$$q_x^i = \sum_{k=1} (-1)^{k-1}\,\frac{T_x^i(T_x^i+\Delta_x)\,(T_x^i+2\,\Delta_x)\ldots\{T_x^i+(k-1)\,\Delta_x\}}{k!\,L_x^k} \qquad (15)$$

oder, weil (15) die Binomialreihe darstellt,

$$q_x^i = 1 - \left\{1 + \frac{\Delta_x}{L_x}\right\}^{-\frac{T_x^i}{\Delta_x}}. \qquad (16)$$

Die Summe in (15) wird oft durch eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $-\dfrac{T_x^i + \Delta_x}{2\,L_x}$ approximiert. Dann lässt sich (15) schreiben als [1])

$$q_x^i \sim \frac{T_x^i}{L_x + \dfrac{T_x^i + \Delta_x}{2}}. \tag{17}$$

Die Formel (17) ist bekannt; sie geht hier als Spezialfall aus dem allgemeinen Ansatz hervor.

Auswertung der Gleichung (2). — Wir schreiben für

$$\sum_{k=1}^{n} T^k(x+t) - T^i(x+t) = T^{-i}(x+t)$$

und erhalten aus (2)

$$*q_x^i = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^\tau \frac{T^i(x+t) + T^{-i}(x+t)}{L(x+t)}\,dt\right)\frac{T^i(x+\tau)}{L(x+\tau)}\,d\tau. \tag{18}$$

Nunmehr läuft die Auswertung gleich wie diejenige von (1). Wir setzen $T^i(x+t)$ und $L(x+t)$ nach (3) und (4) und finden gemäss (10)

$$I_\tau^i = \int_0^\tau J_t^i\,dt = \lambda_1\tau + \lambda_2\frac{\tau^2}{2!} + \lambda_3\frac{\tau^3}{3!} + \ldots; \tag{19}$$

analog wäre

$$I_\tau^{-i} = \int_0^\tau J_t^{-i}\,dt = \lambda_1'\tau + \lambda_2'\frac{\tau^2}{2!} + \lambda_3'\frac{\tau^3}{3!} + \ldots. \tag{20}$$

Sei

$$\varphi_k = \lambda_k + \lambda_k'; \tag{21}$$

dann ist aus (19) und (20)

$$\exp\left(-I_\tau^i - I_\tau^{-i}\right) = \exp\left(-\varphi_1\tau - \varphi_2\frac{\tau^2}{2!} - \varphi_3\frac{\tau^3}{3!} - \ldots\right), \tag{22}$$

und entsprechend zu (12)

$$\exp\left(-I_\tau^i - I_\tau^{-i}\right) = 1 - \mu_1'\tau - \mu_2'\frac{\tau^2}{2!} - \mu_3'\frac{\tau^3}{3!} - \ldots \tag{23}$$

---

[1]) Formel (50), S. 30 in «Versicherungsmathematik».

mit

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1' &= \varphi_1 \\
\mu_2' &= \varphi_2 - \varphi_1^2 \\
\mu_3' &= \varphi_3 - 3\varphi_2\varphi_1 + \varphi_1^3 \\
\mu_4' &= \varphi_4 - 4\varphi_3\varphi_1 - 3\varphi_2^2 + 6\varphi_2\varphi_1^2 - \varphi_1^4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Sodann haben wir in (18) $\dfrac{T^i(x+t)}{L(x+t)}$ unter Verwendung von (7) zu ersetzen; wir erhalten

$$*q_x^i = \frac{T_x^i}{L_x}\int_0^1 \left[1 - \mu_1'\tau - \mu_2'\frac{\tau^2}{2!} - \dots\right]\left[c_0 + c_1\tau + c_2\frac{\tau^2}{2!} + \dots\right] d\tau =$$

$$= \frac{T_x^i}{L_x}\int_0^1 \left[\Phi_1 + \Phi_2\tau + \Phi_3\frac{\tau^2}{2!} + \dots\right] d\tau, \tag{25}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 &= c_0 \\
\Phi_2 &= c_1 - c_0\mu_1' \\
\Phi_3 &= c_2 - 2c_1\mu_1' - c_0\mu_2' \\
\Phi_4 &= c_3 - 3c_2\mu_1' - 3c_1\mu_2' - c_0\mu_3' \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

schliesslich wird aus (25)

$$\underline{*q_x^i = \frac{T_x^i}{L_x}\left[\Phi_1 + \frac{\Phi_2}{2!} + \frac{\Phi_3}{3!} + \dots\right].} \tag{27}$$

Damit ist auch der zweite Teil der Aufgabe gelöst.

Beispiel. — Für den früher behandelten Fall der gleichmässigen Verteilung der Ausscheidefälle und der linearen Entwicklung des Bestandes erhalten wir

aus (3):
$$a_0 = 1,$$

aus (4):
$$b_0 = 1 \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{\Delta_x}{L_x},$$

aus (6) und (8):

$$B_k = \frac{(-1)^k k!\,\Delta_x^k}{L_x^k} = c_k\,,$$

aus (9):

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,\Delta_x^{k-1}\,T_x^i}{L_x^k}\,,$$

$$\lambda_k' = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,\Delta_x^{k-1}\,T_x^{-i}}{L_x^k}\,,$$

aus (21) mit $T_x^i + T_x^{-i} = T_x$ für

$$\varphi_k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,\Delta_x^{k-1}\,T_x}{L_x^k}\,,$$

aus (24):

$$\mu_k' = \frac{(-1)^{k-1}\,T_x(T_x+\Delta_x)(T_x+2\Delta_x)\,\ldots\,\{T_x+(k-1)\,\Delta_x\}}{L_x^k}\,,$$

aus (26):

$$\Phi_1 = 1\,,$$

$$\Phi_k = \frac{(-1)^{k-1}(T_x+\Delta_x)(T_x+2\Delta_x)\,\ldots\,\{T_x+(k-1)\,\Delta_x\}}{L_x^{k-1}}\,,$$

$$k = 2, 3, 4, \ldots .$$

Die Reihe der Φ_k in (27) eingesetzt ergibt

$$*q_x^i = \frac{T_x^i}{L_x} + \sum_{k=2} \frac{(-1)^{k-1}\,T_x^i(T_x+\Delta_x)(T_x+2\Delta_x)\,\ldots\,\{T_x+(k-1)\,\Delta_x\}}{k!\,L_x^k} = \qquad (28)$$

$$= \frac{T_x^i}{T_x^i + T_x^{-i}}\left[1 - \left\{1 + \frac{\Delta_x}{L_x}\right\}^{-\frac{T_x^i + T_x^{-i}}{\Delta_x}}\right], \qquad (29)$$

oder bei Approximation in (28) durch eine geometrische Reihe [1]),

$$*q_x^i \sim \frac{T_x^i}{L_x + \dfrac{T_x^i + T_x^{-i} + \Delta_x}{2}}\,. \qquad (30)$$

Auch diese bekannte Beziehung folgt als Spezialfall aus den allgemeinen Ansätzen.

[1]) Formel (48), S. 30 in «Versicherungsmathematik».

2. Darstellung der abhängigen Wahrscheinlichkeiten durch die unabhängigen und umgekehrt

Aufgabe. — Gegeben ist die Reihe der einjährigen unabhängigen und die Reihe der einjährigen abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Gesucht sind unter möglichst allgemeinen Annahmen über den Verlauf der Wahrscheinlichkeiten innerhalb des Jahres die abhängigen Wahrscheinlichkeiten, ausgedrückt durch die unabhängigen, und umgekehrt.

Ausgangsgleichungen. — Die t-jährige Verbleibswahrscheinlichkeit lässt sich mit Hilfe der t-jährigen unabhängigen und abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten schreiben als [1])

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = \prod_{k=1} (1 - {}_tq_x^k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} {}^*_tq_x^k . \tag{31}$$

Ferner ist [2])

$$\mu_{x+t}^i = \frac{\dfrac{-d}{dt}(1 - {}_tq_x^i)}{1 - {}_tq_x^i}, \tag{32}$$

so dass aus der Definitionsgleichung [3]) für die einjährige *abhängige* Ausscheidewahrscheinlichkeit $^*q_x^i$ folgt

$$^*q_x^i = \int_0^1 \frac{l_{x+t}\,\mu_{x+t}^i}{l_x}\,dt = \int_0^1 \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - {}_tq_x^k)}{1 - {}_tq_x^i}\,d({}_tq_x^i) . \tag{33}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir $i = n$ setzen, d. h. die Ursachen so anordnen, dass die ausgezeichnete als letzte auftritt. Beziehung (33) geht dann über in

$$^*q_x^n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - {}_tq_x^k)\, d({}_tq_x^n) . \tag{34}$$

Damit haben wir eine Ausgangsgleichung zur Darstellung der abhängigen Wahrscheinlichkeit durch die Reihe der unabhängigen

---

[1]) Formel (31), S. 23 in «Versicherungsmathematik».
[2]) S. 24 unten in «Versicherungsmathematik».
[3]) Formel (35), S. 24 in «Versicherungsmathematik».

Werte gewonnen; unter dem Integralzeichen treten ausser den unabhängigen Wahrscheinlichkeiten keine andern Grössen mehr auf.

Zur Wiedergabe der *unabhängigen* Wahrscheinlichkeit q_x^n durch die Reihe der abhängigen Werte setzen wir in (1), d. h. in

$$q_x^n = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t}^n \, dt\right)$$

aus

$$l_{x+t}\, \mu_{x+t}^n \, dt = l_x \cdot {}_{t+dt}\overset{*}{q}{}_x^n - l_x \cdot {}_t\overset{*}{q}{}_x^n = l_x \, d\left({}_t\overset{*}{q}{}_x^n\right)$$

für

$$\mu_{x+t}^n = \frac{l_x \, d\left({}_t\overset{*}{q}{}_x^n\right)}{l_{x+t}} = \frac{d\left({}_t\overset{*}{q}{}_x^n\right)}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} {}_t\overset{*}{q}{}_x^k} \tag{35}$$

ein und erhalten

$$q_x^n = 1 - \exp\left(- \int_0^1 \frac{d\left({}_t\overset{*}{q}{}_x^n\right)}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} {}_t\overset{*}{q}{}_x^k}\right). \tag{36}$$

Auswertung der Gleichung (34). — Die Auswertung soll sich wiederum auf möglichst allgemeine Annahmen über den Verlauf der Wahrscheinlichkeiten innerhalb des Jahres stützen; wir setzen an

$$1 - {}_tq_x^k = 1 - q_x^k \left[\alpha_0^k + \alpha_1^k t + \alpha_2^k \frac{t^2}{2!} + \alpha_3^k \frac{t^3}{3!} + \ldots\right] =$$

$$= q_x^k \left[\frac{1}{q_x^k} - \alpha_0^k - \alpha_1^k t - \alpha_2^k \frac{t^2}{2!} - \ldots\right]; \tag{37}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} d_0^k &= \frac{1}{q_x^k} - \alpha_0^k, \\ d_h^k &= -\alpha_h^k \qquad h = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

wird

$$1 - {}_tq_x^k = q_x^k \left[d_0^k + d_1^k t + d_2^k \frac{t^2}{2!} + d_3^k \frac{t^3}{3!} + \ldots\right]. \tag{39}$$

Daraus folgt für

$$\frac{d\,({}_t q_x^n)}{dt} = -\,q_x^n \left[d_1^n + d_2^n t + d_3^n \frac{t^2}{2!} + \ldots \right]. \tag{40}$$

Die Ergebnisse (39) und (40) werden in (34) eingeführt; wir erhalten

$$*q_x^n = -\prod_{k=1}^{n} q_x^k \int_0^1 \left[d_1^n + d_2^n t + d_3^n \frac{t^2}{2!} + \ldots \right] \prod_{k=1}^{n-1} \left[d_0^k + d_1^k t + d_2^k \frac{t^2}{2!} + \ldots \right] dt. \tag{41}$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= d_0^1 d_0^2 d_0^3 \ldots d_0^{n-1} d_1^n, \\ A_2 &= d_1^1 d_0^2 d_0^3 \ldots d_0^{n-1} d_1^n + d_0^1 d_1^2 d_0^3 \ldots d_0^{n-1} d_1^n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

und finden nach durchgeführter Integration

$$*q_x^n = -\prod_{k=1}^{n} q_x^k \left[A_1 + \frac{A_2}{2!} + \frac{A_3}{3!} + \ldots \right]. \tag{43}$$

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst; Gleichung (43) gibt die einjährige abhängige Wahrscheinlichkeit $*q_x^n$ durch die Reihe der einjährigen unabhängigen Werte wieder. (In den Grössen A_h treten ausser den Wahrscheinlichkeiten nur die Parameter d_h^k auf, welche den Verlauf über das Jahr bestimmen.)

Beispiel. — Als Beispiel behandeln wir den Fall von drei Ausscheideursachen bei linearem Verlauf der einzelnen Wahrscheinlichkeit über das Jahr. Es ist also in (37) anzusetzen

$${}_t q_x^k = q_x^k \left[\alpha_0^k + \alpha_1^k t \right] = t\, q_x^k, \qquad (k = 1, 2 \text{ und } 3)$$

d. h.

$$\alpha_0^k = 0,$$

$$\alpha_1^k = 1;$$

dann wird aus (38)

$$d_0^k = \frac{1}{q_x^k},$$

$$d_1^k = -1$$

und weiter aus (42)

$$A_1 = d_0^1 d_0^2 d_1^3 = \frac{-1}{q_x^1 q_x^2},$$

$$A_2 = d_0^1 d_1^2 d_1^3 + d_1^1 d_0^2 d_1^3 = \frac{1}{q_x^1} + \frac{1}{q_x^2},$$

$$A_3 = 2 d_1^1 d_1^2 d_1^3 = -2.$$

Eingeführt in (43) folgt für den zu bestimmenden Wert ${}^*q_x^n = {}^*q_x^3$,

$$\begin{aligned} {}^*q_x^3 &= q_x^3 \left[1 - \frac{q_x^1 + q_x^2}{2} + \frac{q_x^1 q_x^2}{3}\right] = \\ &= q_x^3 \left[1 - \frac{q_x^1}{2}\right] \left[1 - \frac{q_x^2}{2}\right] + \frac{q_x^1 q_x^2 q_x^3}{12}. \end{aligned} \tag{44}$$ [1]

Auswertung der Gleichung (36). — Wir setzen allgemein an

$$ {}_t^*q_x^k = {}^*q_x^k \left[\beta_0^k + \beta_1^k t + \beta_2^k \frac{t^2}{2!} + \beta_3^k \frac{t^3}{3!} + \ldots\right]; \tag{45}$$

dann ist vorerst

$$\frac{d\,({}_t^*q_x^n)}{dt} = {}^*q_x^n \left[\beta_1^n + \beta_2^n t + \beta_3^n \frac{t^2}{2!} + \ldots\right]. \tag{46}$$

Sodann folgt für

$$1 - \sum_{k=1}^{n} {}_t^*q_x^k = 1 - \sum_{k=1}^{n} {}^*q_x^k \left[\beta_0^k + \beta_1^k t + \beta_2^k \frac{t^2}{2!} + \ldots\right]$$

und mit neuen Parametern e_h gemäss

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} {}^*q_x^k \beta_0^k &= e_0 \sum_{k=1}^{n} {}^*q_x^k = e_0\, q_x \\ \sum_{k=1}^{n} {}^*q_x^k \beta_1^k &= e_1 \sum_{k=1}^{n} {}^*q_x^k = e_1\, q_x \\ \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

[1]) Formel (36), S. 25 in «Versicherungsmathematik» ist eine Näherung für (44), indem bei drei Ursachen auf das Glied $\dfrac{q_x^1 q_x^2 q_x^3}{12}$ verzichtet wird.

für

$$1 - \sum_{k=1}^{n} {}^*_t q_x^k = 1 - q_x \left[e_0 + e_1 t + e_2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right]. \tag{48}$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} 1 - q_x e_0 &= q_x g_0, \\ -e_h &= g_h \qquad e = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

und erhalten

$$1 - \sum_{k=1}^{n} {}^*_t q_x^k = q_x \left[g_0 + g_1 t + g_2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right]. \tag{50}$$

Zur Auswertung von (36) brauchen wir den reziproken Wert von (50). In Übereinstimmung mit dem Vorgehen bei Formel (5) können wir aber schreiben

$$\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} {}^*_t q_x^k} = \frac{1}{q_x} \left[D_0 + D_1 t + D_2 \frac{t^2}{2!} + D_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right], \tag{51}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} 1 &= D_0 g_0 \\ 0 &= D_0 g_1 + D_1 g_0 \\ 0 &= D_0 g_2 + 2 D_1 g_1 + D_2 g_0 \\ 0 &= D_0 g_3 + 3 D_1 g_2 + 3 D_2 g_1 + D_3 g_0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Wir führen (46) und (52) in (36) ein und erhalten

$$q_x^n = 1 - \exp\left(- \frac{{}^*q_x^n}{q_x} \int_0^1 \left[\beta_1^n + \beta_2^n t + \beta_3^n \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \left[D_0 + D_1 t + D_2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right] dt \right). \tag{53}$$

Sei

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \beta_1^n D_0 \\ m_1 &= \beta_1^n D_1 + \beta_2^n D_0 \\ m_2 &= \beta_1^n D_2 + 2 \beta_2^n D_1 + \beta_3^n D_0 \\ m_3 &= \beta_1^n D_3 + 3 \beta_2^n D_2 + 3 \beta_3^n D_1 + \beta_4^n D_0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Dann wird

$$q_x^n = 1 - \exp\left(-\frac{{}^*q_x^n}{q_x}\left[m_0 + \frac{m_1}{2!} + \frac{m_2}{3!} + \dots\right]\right);$$

mit

$$\frac{{}^*q_x^n}{q_x} m_{h-1} = \xi_h \tag{55}$$

folgt weiter

$$q_x^n = 1 - \exp\left(-\xi_1 - \frac{\xi_2}{2!} - \frac{\xi_3}{3!} - \dots\right) \tag{56}$$

und gleichlaufend zu (12)

$$\underline{q_x^n = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2!} + \frac{\varepsilon_3}{3!} + \dots,} \tag{57}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \xi_1 \\
\varepsilon_2 &= \xi_2 - \xi_1\,\varepsilon_1 \\
\varepsilon_3 &= \xi_3 - 2\,\xi_2\,\varepsilon_1 - \xi_1\,\varepsilon_2 \\
\varepsilon_4 &= \xi_4 - 3\,\xi_3\,\varepsilon_1 - 3\,\xi_2\,\varepsilon_2 - \xi_1\,\varepsilon_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Beziehung (57) stellt die allgemeine Lösung dar.

Beispiel. — Es sollen n Ausscheideursachen gegeben sein und die Wahrscheinlichkeiten linear im Jahr verlaufen. Wir haben also in (45) zu setzen

$${}^*_tq_x^k = {}^*q_x^k[\beta_0^k + \beta_1^k t] = t\,{}^*q_x^k, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

d. h.

$$\beta_0^k = 0,$$

$$\beta_1^k = 1.$$

Wir erhalten der Reihe nach

aus (47):

$$e_0 = 0,$$

$$e_1 = 1,$$

aus (49):

$$g_0 = \frac{1}{q_x},$$

$$g_1 = -1,$$

wo

$$q_x = \sum_{k=1}^{n} {}^*q_x^k,$$

aus (52):

$$D_k = k!\,(q_x)^{k+1} = m_k\,,$$

aus (55):

$$\xi_k = (k-1)!\ {}^*q_x^n\,(q_x)^{k-1}\,,$$

aus (58):

$$\varepsilon_k = (-1)^{k-1}\,{}^*q_x^n\,({}^*q_x^n - q_x)\,({}^*q_x^n - 2\,q_x)\,\ldots\,\{{}^*q_x^n - (k-1)\,q_x\}\,.$$

Eingeführt in (57) wird

$$q_x^n = {}^*q_x^n\left[1 + \sum_{k=2} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,({}^*q_x^n - q_x)\,({}^*q_x^n - 2\,q_x)\,\ldots\,\{{}^*q_x^n - (k-1)\,q_x\}\right] = 1 - \{1 - q_x\}^{\frac{{}^*q_x^n}{q_x}}\,. \tag{59}$$

Bricht man die Entwicklung (59) mit dem zweiten Glied ab, so bleibt die Näherung [1])

$$q_x^n \sim {}^*q_x^n\left[1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} {}^*q_x^k\right], \tag{60}$$

oder bei Approximation durch eine geometrische Reihe

$$q_x^n \sim \frac{{}^*q_x^n}{1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} {}^*q_n^k}\,. \tag{61}$$

---

[1]) Formel (39), S. 26 in «Versicherungsmathematik».