Ergänzende Bemerkungen zur Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation (F-Methode)

Autor(en): **Jecklin, H. / Zimmermann, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **51 (1951)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-554988

Ergänzende Bemerkungen zur Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation
(F-Methode)

Von *H. Jecklin* und *H. Zimmermann*, Zürich

Es sei vorerst ganz kurz der Gedankengang resümiert, welcher zu dieser Reserveberechnungsmethode führt, wobei bezüglich näherer Details und Beweisführung auf die Arbeit in Heft 50, 2, vorliegender Zeitschrift verwiesen wird. Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass sich die Reservekurve der gemischten Versicherung, sowie auch von Versicherungsarten mit ähnlichem Reserveverlauf, gut durch eine gleichseitige Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten approximieren lässt. Für eine solche Hyperbel, gegeben durch die Gleichung

$$y = \frac{x + C}{A\,x + B}, \qquad A,\ B,\ C \text{ Konstanten,}$$

oder auch durch die Gleichung

$$y = K + \frac{x}{L\,x + M}, \qquad K,\ L,\ M \text{ Konstanten,}$$

(welch zweite Darstellung in die erste übergeht, wenn man setzt

$$\frac{M}{1 + KL} = B, \quad B\frac{L}{M} = A, \quad BK = C)$$

gilt, wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei feste Punkte auf derselben sind:

$$\frac{(y_2 - y)\,(x - x_1)}{(y - y_1)\,(x_2 - x)} = \text{konstant.}$$

Wählt man insbesondere eine durch den Koordinatennullpunkt gehende Hyperbel genannter Art, gegeben durch die Gleichung

$$y = \frac{x}{Lx + M}, \qquad L, M \text{ Konstanten,}$$

und sei der erste feste Punkt (x_1, y_1) identisch mit $(0,0)$, dann gilt:

$$\frac{(y_2 - y)\,x}{y\,(x_2 - x)} = \text{konstant.}$$

Identifiziert man nun die letztere Hyperbel mit einer Reservekurve, wobei $x = t$, $y = {}_tV$, $x_2 = n$, $y_2 = 1$, so ist offenbar

$$\frac{(1 - {}_tV)\,t}{{}_tV\,(n - t)} = \text{konstant} = F.$$

Die Konstante F bestimmt man aus einer bekannten Reserveposition ${}_\alpha V$, $0 < \alpha < n$, mithin

$$F = \frac{(1 - {}_\alpha V)\,\alpha}{{}_\alpha V\,(n - \alpha)},$$

wobei mit Vorteil

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n + 1), & \text{wenn } n \text{ ungerade, gewählt wird,} \end{cases}$$

wodurch

$$F = \frac{1}{{}_\alpha V} - 1, \text{ für gerades } n,$$

$$F = \left(\frac{1}{{}_\alpha V} - 1\right)\frac{n + 1}{n - 1}, \text{ für ungerades } n,$$

und als Gleichung der Reservekurve hat man

$${}_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}. \qquad \text{(I)}$$

Diese Form der Reservedarstellung eignet sich sehr gut als Grundlage für die Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer t, indem in guter Näherung gilt

$$\sum S\,{}_tV = \frac{t\sum a}{1 - t\dfrac{\sum ab}{\sum a}} = \frac{t(\sum a)^2}{\sum a - t\sum ab}. \tag{II}$$

Hiebei bedeuten:

S	die Erlebensfallsumme der einzelnen Versicherung,
${}_tV$	der Reservesatz der Einzelversicherung nach Ablauf der Zeit t,
$a = \dfrac{S}{Fn}$	eine konstante Hilfsgrösse, berechnet aus der charakteristischen Konstante F, der Dauer n und der Summe S der Einzelversicherung,

$b = \dfrac{F-1}{Fn}$, somit $ab = S\dfrac{F-1}{(Fn)^2}$ eine zweite konstante Hilfsgrösse.

Die Konstante F ist charakteristisch für Versicherungsart, Eintrittsalter, Dauer, Sterbetafel und Zinsfuss. Es ist also nur notwendig, dass die in die gleiche Gruppe zusammengefassten Versicherungen die gleiche verflossene Zeit t haben, und dass sich der Reserveverlauf der einzelnen Versicherung befriedigend nach Formel I approximieren lässt; alles andere ist irrelevant, und die Gruppe kann bezüglich Versicherungskombinationen und Rechnungsgrundlagen ganz inhomogen sein. Die Zusammenfassung in Gruppen gleicher verflossener Dauer t ist praktisch gleichbedeutend mit einer Gruppierung nach Zugangsjahren, das heisst also, dass die einzelnen Versicherungen in ihrer natürlichen Numerierung für die globale Reserveberechnung keiner Umsortierung bedürfen. Wir werden noch zeigen, dass auch im Falle von Änderungen, insbesondere im Falle prämienfreier Reduktion, der Standort der Einzelversicherung unverändert bleiben kann. Als wichtiges Faktum sei hier noch erwähnt, dass die globale Reserveberechnung nach der F-Methode für beliebigen Zeitpunkt, also für gebrochene Werte von t, ohne weiteres erfolgen kann.

Zur Prüfung der Frage, ob sich eine Reservekurve oder ein Teil einer solchen in befriedigender Weise hyperbolisch approximieren lässt, gibt es ein einfaches Kriterium, das bereits in der Arbeit in Heft 50, 2, erwähnt wurde: es sollte für vier äquidistante Abszissenwerte t, $t+k$, $t+2k$, $t+3k$ das Doppelverhältnis

$$\frac{({}_{t+3k}V - {}_tV)\,({}_{t+2k}V - {}_{t+k}V)}{({}_{t+3k}V - {}_{t+2k}V)\,({}_{t+k}V - {}_tV)}$$

ungefähr den Wert 3 haben. Es ist nun zweifellos sehr wichtig zu wissen, wie stark dieses Doppelverhältnis vom Wert 3 abweichen darf, ohne dass die nach Formel I berechnete Reserve wesentlich vom genauen Reservewert abweicht. Systematische Untersuchungen in dieser Richtung haben ergeben, dass der Wert genannten Doppelverhältnisses eine Abweichung von $\pm$ 10 % vom Wert 3 nicht überschreiten sollte. Ist die Abweichung grösser, so ist es empfehlenswert, das Interpolationsintervall im notwendigen Ausmass zu verkürzen.

Im Hinblick auf die Praxis erweist es sich als nützlich, für die Grössen $\frac{1}{Fn} = \frac{a}{S}$ und $\frac{F-1}{(Fn)^2} = \frac{ab}{S}$, d. h. also für die auf die Summeneinheit bezogenen Hilfsgrössen, besondere Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen

$$\frac{1}{Fn} = G$$

und

$$\frac{F-1}{(Fn)^2} = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F^2}\right)\frac{1}{n^2} = Gb = H.$$

Es ist dann also

$$\sum S\,{}_tV = \frac{t\sum SG}{1 - t\,\dfrac{\sum SH}{\sum SG}} = \frac{t(\sum SG)^2}{\sum SG - t\sum SH}. \qquad \text{(III)}$$

Wie ohne weiteres ersichtlich, gilt die Beziehung $G + b = \frac{1}{n}$, welche für Rechnungs- und Kontrollzwecke sehr dienlich ist.

Ein besonderer Vorteil der F-Methode besteht darin, dass die Werte G und H ganz unabhängig von Berechnungsgrundlagen ein für allemal tabelliert werden können. Wie soeben erwähnt, sind G und H einfache Funktionen von F und n, und F seinerseits ist gegeben durch die Relation $F = \frac{(1 - {}_tV)\,t}{{}_tV\,(n-t)}$, also insbesondere $F = \frac{1}{{}_\alpha V} - 1$, wenn $\alpha = \frac{n}{2}$.

Nun liegt der Reservesatz für $t = \frac{n}{2}$ bekanntlich im allgemeinen zwischen 250 $^0/_{00}$ und 450 $^0/_{00}$. Man legt mithin eine Tabelle an, welche für die Werte von 250 bis 450 $^0/_{00}$, in Intervallen von 0,2 $^0/_{00}$ fortschreitend, für die gebräuchlichsten Dauern n die Werte G und H angibt. Ein Ausschnitt aus einer solchen Tabelle ist am Schluss dieser Arbeit angefügt. Für den praktischen Gebrauch ist es also nur notwendig, den nach den gewünschten Grundlagen berechneten Reservesatz in der Mitte der Versicherungsdauer zu kennen, worauf man in der ersten Kolonne der Tabelle den nächstliegenden Wert sucht und in der gleichen Zeile in der entsprechenden n-Kolonne die beiden Sätze für G und H ablesen kann. Es sei z. B. für eine Versicherung der Dauer 20 der Satz ${}_{10}V = 423{,}48$ $^0/_{00}$. Der nächste Tabellenwert in der ersten Kolonne ist 423,4, und die entsprechenden Hilfszahlwerte sind $G = 36{,}72$, $H = 0{,}4878$. Eine kleine Komplikation ist noch zu überwinden. Wenn n gerade ist, so kann der Reservesatz für $\frac{n}{2}$ nach klassischen Formeln berechnet werden. Ist dagegen n ungerade, so muss er interpolatorisch bestimmt werden, ausgehend von den Reservesätzen für $\frac{1}{2}(n-1)$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$. Eine lineare Interpolation zwischen letzteren beiden Reservesätzen wäre zu ungenau. Aber es zeigt sich ein einfacher Weg: Ausgehend von der fundamentalen Relation $\frac{(1-{}_tV)\,t}{{}_tV(n-t)} = F$ muss gelten, wenn man t die speziellen Werte $\frac{1}{2}(n-1)$, $\frac{n}{2}$, $\frac{1}{2}(n+1)$ gibt:

$$\frac{(1-{}_\beta V)\,(n-1)}{{}_\beta V(n+1)} = \frac{1}{{}_{n/2}V} - 1 = \frac{(1-{}_\alpha V)\,(n+1)}{{}_\alpha V(n-1)}\,; \quad \begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{2}(n+1),\\ \beta = \frac{1}{2}(n-1),\end{array}$$

woraus wir finden

$${}_{n/2}V = \frac{{}_\alpha V(n-1)}{(1-{}_\alpha V)\,(n+1) + {}_\alpha V(n-1)}\,,$$

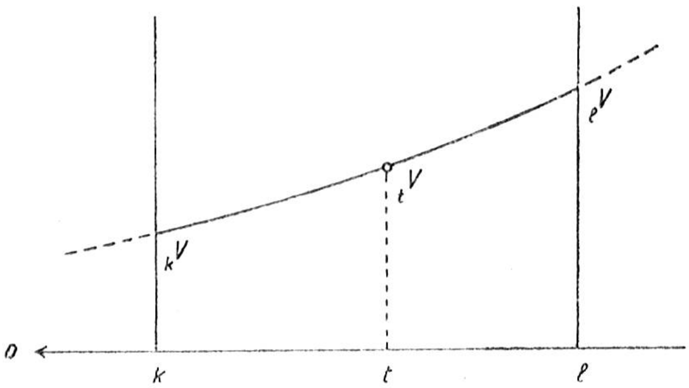
oder auch

$${}_{n/2}V = \frac{{}_\beta V(n+1)}{(1-{}_\beta V)\,(n-1) + {}_\beta V(n+1)}\,.$$

Wenn daher n ungerade, bestimmt man vorerst den Reservesatz für $t = \frac{1}{2}(n+1)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$, um dann nach letztgenannter Interpolationsmöglichkeit den Satz für $\frac{n}{2}$ zu berechnen, mit welchem man in die Tabelle eingehen kann.

Von grösster Wichtigkeit ist der Umstand, dass sich bei der Reserveberechnung nach der F-Methode das Interpolationsintervall nicht über die ganze Versicherungsdauer n erstrecken muss und dass die Reservesätze zu Anfang und Ende des Interpolationsintervalles nicht den Wert 0 bzw. 1 haben müssen. Massgeblich ist einzig und allein die Gestalt der Reservekurve im fraglichen Intervall und ihre Approximationsmöglichkeit durch hyperbolische Interpolation. Machen wir die Annahme, das Interpolationsintervall erstrecke sich von $t = k \geqslant 0$ bis $t = l \leqslant n$, wobei die bezüglichen Reservesätze den Wert haben ${}_kV \geqslant 0$ und ${}_lV \leqslant 1$.

Hier gilt, wenn die Voraussetzungen bezüglich der Reservekurve erfüllt sind,



$$\frac{({}_lV - {}_tV)\,(t - k)}{({}_tV - {}_kV)\,(l - t)} = F.$$

Die Konstante F bestimmt sich aus einer Reserveposition ${}_\alpha V$ mit $k < \alpha < l$, und zwar setzt man zweckmässig

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}(k + l), & \text{wenn } (l - k) \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(k + l + 1), & \text{wenn } (l - k) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist dann

$${}_tV = {}_kV + \frac{({}_lV - {}_kV)\,(t - k)}{F(l - t) + (t - k)} = {}_kV + \frac{({}_lV - {}_kV)}{F\left(\dfrac{l - k}{t'} - 1\right) + 1}, \qquad \text{(IV)}$$

wenn $t - k = t'$ gesetzt wird. Die Analogie zu Formel I ist offensichtlich, nur dass, abgesehen von der additiven konstanten Grösse ${}_kV$, an Stelle der Erlebensfallsumme 1 der Wert $({}_lV - {}_kV)$ und an Stelle der Versicherungsdauer n die Intervall-Länge $(l - k)$ tritt. Des weiteren erhellt deutlich, dass für die Reserveberechnung, d. h. bezüglich der abgelaufenen Zeit, immer vom Beginn des Interpolationsintervalles aus zu zählen ist $\left(t' = 0, 1, 2, \ldots (l - k)\right)$. Für die gruppenweise Reserveberechnung ist dann:

$$G = \frac{1}{F(l - k)}, \quad H = \frac{F - 1}{\left(F(l - k)\right)^2},$$

also

$$a = S({}_lV - {}_kV)\,G, \quad a\,b = S({}_lV - {}_kV)\,H.$$

Somit ergibt sich die allgemeinere Gruppenformel

$$\sum S_l V = \sum S_k V + \frac{t'(\sum a)^2}{\sum a - t' \sum a b}. \tag{V}$$

Man sieht ohne weiteres, dass der Normalfall der prämienzahlenden Versicherung mit über die ganze Versicherungsdauer erstrecktem Interpolationsintervall gemäss Formel II hierin enthalten ist; es ist diesfalls

$$_kV = 0, \quad _lV = 1, \quad k = 0, \quad l = n, \quad t' = t.$$

Die Formeln IV und V weisen den Weg, die Resultate der Reserveberechnung nach der F-Methode zu verbessern, indem durch kürzeren Ansatz des Interpolationsintervalles die Abweichungen von den genauen Reservewerten verkleinert werden können. So kann man z. B. als maximales Interpolationsintervall 10 Jahre ansetzen, welche Möglichkeit in der Arbeit in Heft 50, 2, bereits genügend erörtert wurde.

Aus Formel IV ist aber insbesondere auch zu ersehen, dass auch die Reserven von Versicherungen mit Einmaleinlage nach der F-Methode berechnet werden können. Betrachten wir eine solche Versicherung, wobei die Interpolation sich auf die ganze Versicherungsdauer beziehen soll, so ist in Formel IV offenbar $_lV = 1$, $_kV = {}_0V = {}_0A$, $k = 0$, $l = n$ zu setzen (wir bezeichnen Einmaleinlagen mit dem Buchstaben A), und wir haben

$$_tV = {}_0A + \frac{(1 - {}_0A)}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, \tag{VI}$$

wobei

$$F = \frac{(1 - {}_\alpha A)}{({}_\alpha A - {}_0A)} \left(\frac{\alpha}{n - \alpha}\right), \quad \text{mit}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n+1), & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Interessant und sehr wichtig in diesem Zusammenhange ist die folgende Feststellung: Wenn es sich um eine gemischte Versicherung mit Einmaleinlage handelt, so ist die Konstante F offenbar

$$F = \frac{1 - (1 - d\,\mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|})}{(1 - d\,\mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|}) - (1 - d\,\mathrm{a}_{\overline{xn}|})} \left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right) = \left(\frac{\mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|}}{\mathrm{a}_{\overline{xn}|} - \mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|}}\right)\left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right).$$

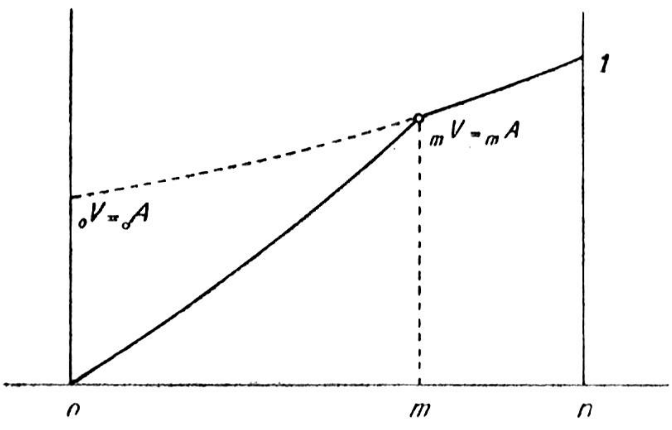
Vergleichen wir damit die Konstante F der prämienzahlenden gemischten Versicherung, so ist dort

$$F = \left(\frac{1}{{}_\alpha V} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{\mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|}}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}}} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right) = \left(\frac{\mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|}}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x+\alpha,\overline{n-\alpha}|}}\right)\left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right).$$

Das heisst also, dass die gemischte Versicherung mit jährlicher Prämie und jene mit Einmaleinlage, gleiches Eintrittsalter und gleiche Dauer vorausgesetzt, die gleiche Konstante F haben! Somit sind auch die Hilfswerte G und H in beiden Fällen die gleichen. Der Unterschied bezüglich der Reserveberechnung besteht darin, dass bei jährlicher Prämie $a = SG$, $ab = SH$, dagegen bei Einmaleinlage $a = S(1 - A_{x\overline{n}|})\,G$, $ab = S(1 - A_{x\overline{n}|})\,H$, und es ist in letzterem Falle noch das additive konstante Glied $SA_{x\overline{n}|}$ zu berücksichtigen (entsprechend der Grösse $S_k V$ in Formel V).

Nunmehr seien die Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung einer näheren Betrachtung unterzogen: Versicherungsdauer sei n, Prämienzahlungsdauer $m < n$.

Während der Prämienzahlungsdauer wird diese Versicherung als von der Interpolationsperiode 0 bis m behandelt, und es gilt



$${}_tV = \frac{{}_mV}{F\left(\frac{m}{t} - 1\right) + 1}, \qquad t \leqq m,$$

wobei

$$F = \left(\frac{{}_mV}{{}_\alpha V} - 1\right)\frac{\alpha}{m - \alpha}$$

$$\text{mit } \alpha = \begin{cases} \frac{m}{2}, & \text{wenn } m \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(m+1), & \text{wenn } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nach Ablauf der Prämienzahlungsdauer könnte man die Versicherung als Kombination mit Einmaleinlage und dem Interpolationsintervall von m bis n auffassen, und es wäre dann für $t \geqq m$:

$$ {}_tV = {}_mA + \frac{(1 - {}_mA)}{F\left(\frac{n-m}{t'} - 1\right) + 1}, \qquad t' = t - m, $$

wobei

$$ F = \left(\frac{1 - {}_\alpha A}{{}_\alpha A - {}_mA}\right)\left(\frac{\alpha - m}{n - \alpha}\right) $$

$$ \text{mit } \alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}(n+m), \text{ wenn } (n-m) \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(n+m+1), \text{ wenn } (n-m) \text{ ungerade.} \end{cases} $$

Ein solches Vorgehen hätte jedoch zur Folge, dass die Versicherung dann nicht mehr in die ursprüngliche t-Gruppe zu stehen käme, sondern in die Gruppe mit um die Zeit m späterem Versicherungsbeginn. Damit ginge der besondere Vorteil der F-Methode, dass nämlich Versicherungen gleichen Abschlussjahres gemäss ihrer natürlichen Ordnungsnummer auch für die Reserveberechnung als Gruppe beisammen bleiben, teilweise verloren. Es soll daher wenn immer möglich vermieden werden, dass eine Versicherung, deren Beginn nicht geändert wird, in eine andere Reservegruppe versetzt werden muss.

Im vorliegenden Falle ergibt sich die Lösung leicht: ab Anfang der prämienfreien Periode wird die Versicherung so behandelt, wie wenn sie ab Beginn mit Einmaleinlage abgeschlossen gewesen wäre (s. Figur), und es ist dann offenbar:

$$ {}_tV = {}_0A + \frac{(1 - {}_0A)}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, \qquad t \geqslant m, $$

wobei man setzen kann

$$ F = \left(\frac{1 - {}_mA}{{}_mA - {}_0A}\right)\frac{m}{n-m}. $$

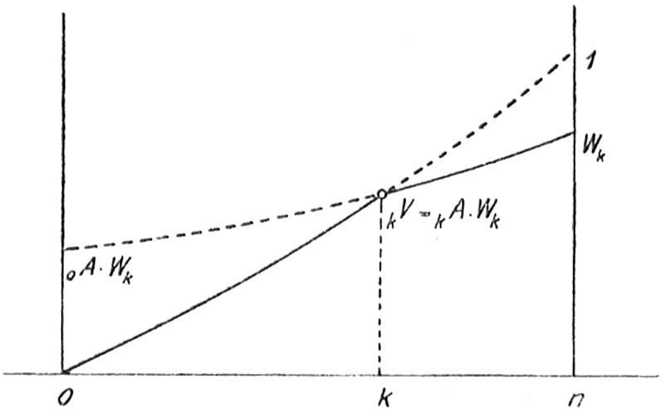
Dabei kann ${}_0A$ aus den Grundlagen oder durch Extrapolation aus 1, ${}_\alpha A$ und ${}_mA$ bestimmt werden. Für die gruppenweise Reserveberechnung ist dann $a = S(1 - {}_0A)\,G$, $ab = S(1 - {}_0A)\,H$, und das additive Zusatzglied $S\,{}_0A$. Handelt es sich insbesondere um eine gemischte Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung, so ist die Sachlage besonders einfach. Wir wissen bereits, dass für prämienzahlende und prämienfreie gemischte Versicherung (mit gleichem x und n) die gleichen Werte F, G und H gelten. Es ist also eine gemischte Versicherung mit abgekürzter

Prämienzahlung vom Moment der Prämienfreiheit an zu behandeln wie wenn sie ab Beginn mit Einmaleinlage abgeschlossen gewesen wäre, also

$$ {}_tV = A_{x\overline{n}|} + \frac{(1 - A_{x\overline{n}|})}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, \qquad t \geqq m. $$

Für die globale Reserveberechnung ist sodann $a = S(1 - A_{x\overline{n}|})G$, $ab = S(1 - A_{x\overline{n}|})H$, und das additive Zusatzglied $SA_{x\overline{n}|}$. Dabei sind F, G und H die Konstantensätze der prämienzahlenden gemischten Versicherung mit Eintrittsalter x und Dauer n.

Die soeben beschriebene Behandlung der Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung gibt uns auch den Fingerzeig, wie im Falle von prämienfreier Reduktion einer Versicherung praktisch vorzugehen ist.



Ist der Reduktionssatz nach k Jahren W_k (d. h. wird die Einheit der Versicherungssumme auf $W_k < 1$ reduziert), so wird die Versicherung ab Umstellungsdatum so behandelt, wie wenn sie ab Beginn mit Einmaleinlage auf die Summe $S' = SW_k$ (wobei S = ursprüngliche Versicherungssumme) abgeschlossen worden wäre. So bleibt die Versicherung in der gleichen t-Gruppe, und wir haben für $t \geqq k$, bezogen auf die Einheit der ursprünglichen Versicherungssumme

$$ {}_tVW_k = {}_0AW_k + \frac{W_k(1 - {}_0A)}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, $$

wobei man setzen kann

$$ F = \left(\frac{1 - {}_kA}{{}_kA - {}_0A}\right)\frac{k}{n - k}. $$

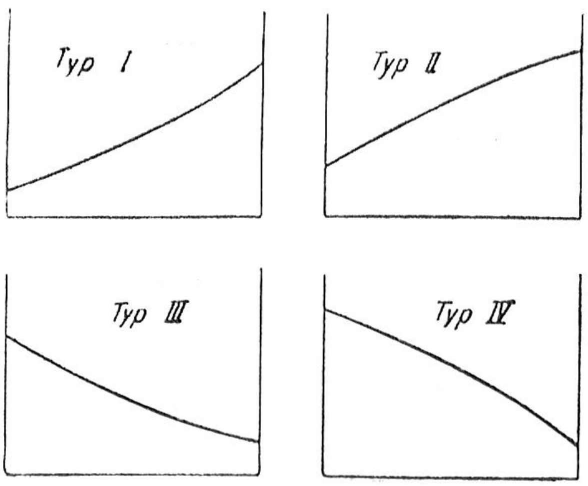
Für die globale Reserveberechnung ist offenbar $a = S'(1 - {}_0A)G$, $ab = S'(1 - {}_0A)H$, und das additive Zusatzglied $S'{}_0A$. Die extrapolatorische Bestimmung des Wertes ${}_0A$ kann auch vorteilhaft auf nomographischem Wege erfolgen, worüber eine gesonderte Mitteilung in Aussicht genommen ist. Handelt es sich im speziellen um eine gemischte Versicherung, so ändern sich nach Gesagtem die Konstantensätze F, G und H im Falle prämienfreier Reduktion überhaupt nicht; es sind daher lediglich die ursprünglichen Werte a und ab mit $\frac{S'}{S}(1 - A_{x\overline{n}|}) = W_k(1 - A_{x\overline{n}|})$ zu multiplizieren und das konstante additive Glied $S'A_{x\overline{n}|} = SW_k A_{x\overline{n}|}$ beizufügen.

Verstehen wir unter S die effektive Erlebensfallsumme einer Versicherung (also im Falle von Reduktionen die neue, reduzierte Summe), und erstreckt man das Interpolationsintervall durchwegs über die ganze Versicherungsdauer n, so können demnach in die allgemeine Gruppenformel

$$\sum S_t V = \sum S_0 V + \frac{t(\sum a)^2}{\sum a - t \sum ab},$$

wobei $a = S(1 - {}_0V)G$, $ab = S(1 - {}_0V)H$, alle Versicherungen mit Prämienzahlung über die ganze Versicherungsdauer, mit abgekürzter Prämienzahlung, mit Einmaleinlage und die prämienfreien Reduktionen einbezogen werden, sofern nur die Reservekurven konkav steigend sind und sich befriedigend nach den stipulierten Voraussetzungen approximieren lassen.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob es nicht möglich ist, auch Reservekurven, die nicht konkav steigend sind, z. B. konvex fallend oder überhaupt nicht monoton, mit Hilfe der hyperbolischen Interpolation zu approximieren. Da als Basis dieser Interpolation ein Ast einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten dient, ist auch klar, dass nur (konkave, konvexe oder lineare) monotone Kurven approximiert werden können. Hier aber bestehen, wenn man von der Geraden absieht, offenbar vier Möglichkeiten: konvex steigend, konkav steigend, konvex fallend, konkav fallend (s. Figuren).



Typ I: $${}_tV = K + \frac{t}{Fn - t(F-1)}$$

$$\sim K + tG\left(1 + t\frac{H}{G} + t^2\left(\frac{H}{G}\right)^2 + t^3\left(\frac{H}{G}\right)^3 + \ldots\right) = K + \frac{tG}{1 - t\frac{H}{G}},$$

Typ II: $${}_tV = K + \frac{t}{Fn + t(F-1)}$$

$$\sim K + tG\left(1 - t\frac{H}{G} + t^2\left(\frac{H}{G}\right)^2 - t^3\left(\frac{H}{G}\right)^3 + \ldots\right) = K + \frac{tG}{1 + t\frac{H}{G}},$$

Typ III: $${}_tV = K - \frac{t}{Fn + t(F-1)}$$

$$\sim K - tG\left(1 - t\frac{H}{G} + t^2\left(\frac{H}{G}\right)^2 - t^3\left(\frac{H}{G}\right)^3 + \ldots\right) = K + \frac{tG}{-1 - t\frac{H}{G}},$$

Typ IV: $${}_tV = K - \frac{t}{Fn - t(F-1)}$$

$$\sim K - tG\left(1 + t\frac{H}{G} + t^2\left(\frac{H}{G}\right)^2 + t^3\left(\frac{H}{G}\right)^3 + \ldots\right) = K + \frac{tG}{-1 + t\frac{H}{G}},$$

wobei $G = \frac{1}{Fn}$, $H = \frac{F-1}{(Fn)^2}$, und bezüglich der Reihenentwicklungen vergleiche man Heft 50, 2, Seite 186.

Für Einzelreserven ist also die approximierte Rechnung sicher möglich, wenn die Reservekurve einen der vier vorgenannten Typen aufweist. Für die globale Reserveberechnung nach der F-Methode müssen aber die summenmässig zusammengefassten Grössen G und H je durchwegs gleiches Vorzeichen haben, ansonst die Begründung des Verfahrens mit Hilfe der verallgemeinerten Ungleichung von Cauchy-

Lagrange (Seite 185, Heft 50, 2) nicht mehr zulässig ist. Prinzipiell müssen also Versicherungen mit verschiedenem Typus des Reserveverlaufs in getrennte Gruppenformeln zusammengefasst werden; inwieweit in Durchbrechung dieses Prinzips durch Einbezug nur einzelner Versicherungen von anderem Reservetypus das Gesamtergebnis beeinflusst wird, kann jedenfalls nur empirisch untersucht werden und mag späteren Studien vorbehalten bleiben.

Nun ist glücklicherweise die überwiegende Mehrzahl der Reservekurven vom ersten Typus. Aber beispielsweise die temporäre Todesfallversicherung mit Einmaleinlage ist vom Typus IV, die Überlebensrente mit Einmaleinlage vom Typus III. Es gibt aber bekanntlich auch Reservekurven, welche keinem der vier Typen entsprechen, so z. B. jene der temporären Todesfallversicherung mit jährlicher Prämie, welche konkav, aber nicht monoton verläuft. Hier ergibt die Zerlegung in Komponenten eine Lösungsmöglichkeit. Eine einfache Zerlegung besteht offenbar darin, dass man von der prospektiven Reserveformel ${}_tV = A_t - P\mathrm{a}_t$ ausgeht. Bei der temporären Todesfallversicherung mit jährlicher Prämie haben wir dann

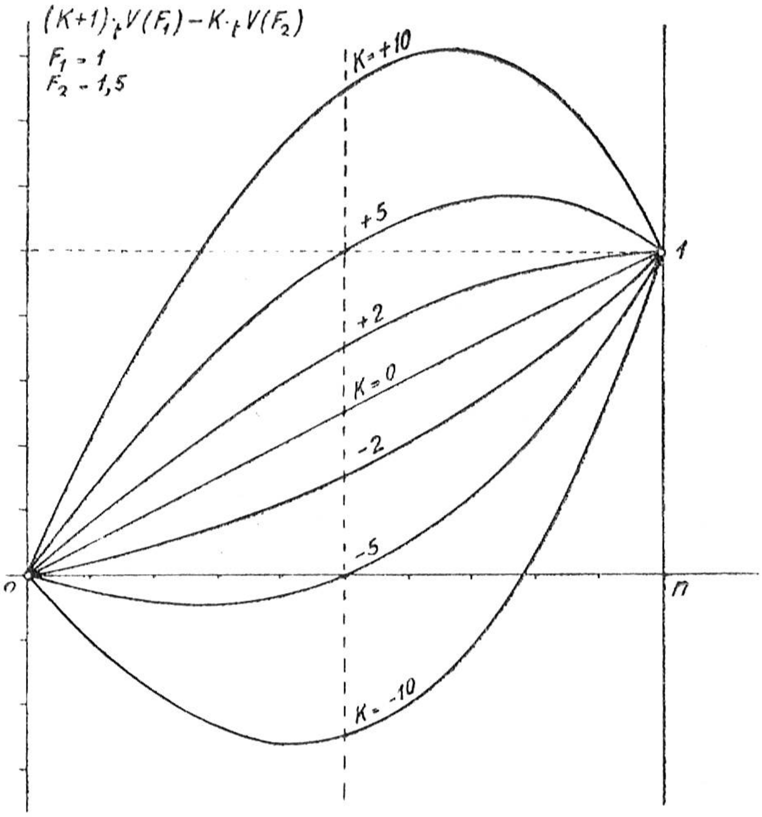
$$ {}_tV = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - P\,\frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} . $$

Der Barwert der Versicherungsleistungen verläuft hier, wie bereits erwähnt, nach Typus IV, aber auch der Prämienbarwert entspricht dem Typ IV (letzteres ist bei allen Versicherungsarten der Fall). Es ist jedoch der Prämienbarwert negativ in Rechnung zu stellen, und Typus IV, negativ genommen, ergibt Typus I. Hier ersehen wir übrigens auch den Grund, weshalb die gemischte Versicherung und nahe verwandte Versicherungsarten mit jährlicher Prämie sich als Ganzes durch den Typ I erfassen lassen: die Einmalprämie $A_{x\overline{n}|}$ verläuft nach Typ I; der Prämienbarwert dagegen nach Typ IV, ist aber negativ in Rechnung zu stellen, was einer Addition von Typ I gleichkommt. — Man kann die Zerlegung der temporären Todesfallversicherung mit jährlicher Prämie auch in anderer Weise vornehmen, indem man sie als Differenz zwischen der gemischten Versicherung und der reinen Erlebensfallversicherung deutet. Beide Reservekurven entsprechen Typ I, nachdem aber die zweite negativ in Rechnung zu stellen ist, ergibt sich wieder Zerlegung in zwei verschiedene Typen. Ähnliche Überlegungen wie bei der temporären Todesfallversicherung lassen sich bei der Überlebenszeitrente (Hypothekarversicherung) und der einseitigen Überlebensrente anstellen. Auch hier hat man vor allem die Zerlegungsmöglichkeit, wie sie durch die prospektive Reserveformel geboten wird, und insbesondere bei Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung dürfte dies der einzige praktische Weg sein. Bei jährlicher Prämienzahlung über die ganze Versicherungsdauer dagegen ist durch die Beziehung, dass die Überlebenszeitrente 1 gleich ist der mit $\frac{1}{d}$ multiplizierten Differenz zwischen gemischter und terme-fixe-Versicherung, und dass die einseitige Überlebensrente 1 gleich ist der mit $a_{x\overline{n}|}$ multiplizierten Differenz zwischen gemischter Versicherung auf zwei Leben und jener auf ein Leben, eine weitere Zerlegungsmöglichkeit gegeben.

Es dürfte sich lohnen, die Frage der Zerlegungs- und Zusammensetzungs-Möglichkeiten von Reservekurven noch näher zu studieren, wobei es sich vermutlich zeigen wird, dass eine ganze Reihe von Versicherungskombinationen, deren Reserveverlauf nicht einem der vier genannten Typen entspricht, doch durch die F-Methode erfasst werden können. Wir müssen uns hier mit einem vorläufigen Hinweis begnügen. Wie wir wissen, entspricht für gegebenes n jedem Wert F eine Hyperbel

$$ {}_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, $$

welche u. U. zwischen $t = 0$ und $t = n$ als Reserveverlauf gedeutet werden kann. Nehmen wir nun bei festem n zwei verschiedene F-Werte, $F_1 < F_2$, wobei wir die beiden bezüglichen Hyperbeln mit ${}_tV(F_1)$ bzw. ${}_tV(F_2)$ bezeichnen, so erhalten wir beispielsweise durch die Zusammensetzung $(k+1)\,{}_tV(F_1) - k\,{}_tV(F_2)$, $-\infty < k < +\infty$, mittels verschiedener Ansätze der Konstanten k eine Kurvenschar mit den beiden Fixpunkten $(0,0)$ und $(n,1)$. Für $n = 20$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1{,}5$ sind in nachstehender Figur einige Möglichkeiten dargestellt, wobei insbesondere ersichtlich wird, dass auch konvexer und konkaver nicht monotoner Verlauf der Reservekurve auf Basis hyperbolischer Interpolation darstellbar sein kann.



Abschliessend sei noch darauf hingewiesen, dass Versicherungen mit variabler Summe oder solche mit variabler Prämie sich ebenfalls weitgehend für die F-Methode eignen. Handelt es sich insbesondere um Versicherungen gemischten Charakters mit steigender Summe, so ist deren Erfassung ohne weiteres möglich, denn deren Reservekurve muss zwischen jener der gewöhnlichen gemischten Versicherung und jener der reinen Erlebensfallversicherung liegen. Was die Versicherungen gemischten Charakters mit variabler Prämie anbetrifft, so entspricht die Reservekurve bei steigender Prämie im Sinne regelmässiger arithmetischer Progression im allgemeinen dem Typus I. Handelt es sich dagegen um regelmässige Prämienverminderung nach arithmetischer Progression, so ist die Reservekurve ebenfalls vom Typus I, solange der Prozentsatz der jährlichen Prämienreduktion den technischen Zinssatz nicht übersteigt; ungefähr von dieser Grenze weg wechselt die Reservekurve zum Typus II über.

Ausschnitt aus der Hilfszahlentabelle

$n/2V$	$n = 19$ G	H	$n = 20$ G	H	$n = 21$ G	H	$n = 22$ G	H
420,0	38,11	0,5534	36,21	0,4994	34,48	0,4530	32,92	0,4127
420,2	38,14	5526	36,24	4987	34,51	4524	32,94	4122
420,4	38,18	5519	36,27	4981	34,54	4518	32,97	4116
420,6	38,21	5511	36,30	4974	34,57	4512	33,00	4111
420,8	38,24	5504	36,33	4967	34,60	4505	33,02	4105
421,0	38,27	0,5496	36,36	0,4960	34,62	0,4499	33,05	0,4100
421,2	38,30	5489	36,39	4954	34,65	4493	33,08	4094
421,4	38,33	5481	36,42	4947	34,68	4487	33,11	4088
421,6	38,36	5474	36,45	4940	34,71	4481	33,13	4083
421,8	38,40	5466	36,48	4933	34,74	4475	33,16	4077
422,0	38,43	0,5459	36,51	0,4926	34,77	0,4468	33,19	0,4071
422,2	38,46	5451	36,54	4919	34,80	4462	33,21	4066
422,4	38,49	5443	36,57	4912	34,82	4456	33,24	4060
422,6	38,52	5435	36,60	4906	34,85	4449	33,27	4054
422,8	38,55	5428	36,63	4899	34,88	4443	33,30	4048
423,0	38,58	0,5420	36,66	0,4892	34,91	0,4437	33,32	0,4043
423,2	38,62	5412	36,69	4885	34,94	4430	33,35	4037
423,4	38,65	5404	36,72	4878	34,97	4424	33,38	4031
423,6	38,68	5397	36,75	4870	35,00	4418	33,40	4025
423,8	38,71	5389	36,78	4863	35,02	4411	33,43	4019
424,0	38,74	0,5381	36,81	0,4856	35,05	0,4405	33,46	0,4013
424,2	38,77	5373	36,84	4849	35,08	4398	33,49	4008
424,4	38,81	5365	36,87	4842	35,11	4392	33,51	4002
424,6	38,84	5357	36,90	4835	35,14	4385	33,54	3996
424,8	38,87	5349	36,93	4828	35,17	4379	33,57	3990
425,0	38,90	0,5341	36,96	0,4820	35,20	0,4372	33,60	0,3984
425,2	38,93	5333	36,99	4813	35,23	4366	33,62	3978
425,4	38,97	5325	37,02	4806	35,25	4359	33,65	3972
425,6	39,00	5317	37,05	4799	35,28	4352	33,68	3966
425,8	39,03	5309	37,08	4791	35,31	4346	33,71	3960