Betrachtungen über konsekutive Verteilungen

Autor(en): **Nolfi, Padrot**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **51 (1951)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555004

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Betrachtungen über konsekutive Verteilungen

Von *Padrot Nolfi*, Zürich

In der Statistik hat man mit stochastischen Erscheinungen zu tun, die verschiedenen, zum Teil bekannten, zum Teil aber auch unbekannten Einflüssen ausgesetzt sind. So sind Sterblichkeit und Morbidität Funktionen des Alters, der Zeit, dazu aber auch anderer, meistens unbekannter Bestimmungsgrössen, wie Gesundheitszustand, Konstitution, Witterungseinflüsse, usw. — Dieser Tatbestand zeigt schon, dass man in Wirklichkeit wohl nie mit unabhängigen stochastischen Erscheinungen, wie das theoretisch oft vorausgesetzt wird, zu tun hat. Die Abhängigkeit kann eine direkte oder eine indirekte sein. *Der erste Fall* liegt vor, wenn das Zustandekommen eines Ereignisses vom Zustand abhängt, der von früher eingetretenen oder nicht eingetretenen Ereignissen gleicher oder auch anderer Art abhängt. Man spricht in solchen Fällen nach Reichenbach von einer Nachwirkung. *Der zweite Fall* liegt vor, wenn verschiedene stochastische Erscheinungen durch gemeinsame Ursachen bedingt werden. So kann der Auftritt einer Epidemie in verschiedenen Personengruppen eine erhöhte Sterblichkeit hervorrufen, obwohl keine direkte Abhängigkeit zwischen den einzelnen Betrachtungsobjekten besteht.

Wer sich diese in der Realität bestehenden Verhältnisse vor Augen führt, ist eigentlich verwundert, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung trotzdem mit einem oft erstaunlichen Erfolg zur Deutung des erfahrungsmässigen Geschehens ausreicht. Dieses Rätsel erscheint noch grösser, wenn man bedenkt, dass der Grossteil des wahrscheinlichkeitstheoretischen Formelapparates unter sehr restriktiven Annahmen, wie sie bei einem Urnenschema bestehen, abgeleitet wird.

Man versteht, dass die Übereinstimmung zwischen schematischer Darstellung und den empirischen Daten manchmal eine unbefriedigende ist, dagegen ist man erstaunt, dass sie in vielen Fällen doch eine recht gute ist. Es wäre zweifellos wertvoll, über die hier herrschenden inneren Zusammenhänge Klarheit zu gewinnen, da man damit einen Hinweis für die Brauchbarkeit eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatzes erhalten würde. Die nachfolgenden Ausführungen über konsekutive Verteilungen gestatten eine gewisse Klärung des bestehenden Sachverhaltes.

Angenommen, es seien für zwei verschiedene aufeinanderfolgende Zeitabschnitte t_1 und t_2 die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt von r_1 bzw. r_2 Ereignissen bekannt und es werde nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass in der Zeit $t_1 + t_2$ gerade r Ereignisse eintreten. Es fragt sich, wie und unter welchen Voraussetzungen diese gesuchte Wahrscheinlichkeit, die wir zur besseren Kennzeichnung *Summenwahrscheinlichkeit* nennen wollen, sich aus den für die einzelnen Zeitintervalle t_1 und t_2 vorgegebenen Grundwahrscheinlichkeiten berechnen lässt. Nehmen wir zunächst einmal an, auf Grund von Beobachtungen oder Überlegungen sei festgestellt worden, dass im ersten und zweiten Falle die *Poissonsche* Verteilung zutreffe. Dann wird, wenn wir mit u_1 bzw. u_2 die Zahl der während des ersten bzw. zweiten Intervalls zu erwartenden Ereignisse bezeichnen, die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von r_1 Ereignissen im ersten bzw. r_2 im zweiten gegeben durch:

$$w_1 = \frac{u_1^{r_1}}{r_1!} e^{-u} \quad \text{bzw.} \quad w_2 = \frac{u_2^{r_2}}{r_2!} e^{-u}$$

und die gesuchte Summenwahrscheinlichkeit für den Eintritt von r Ereignissen während des ersten oder des zweiten Intervalls ergibt den Ausdruck

$$w = \sum_{r_1+r_2=r} w_1 w_2 = \frac{(u_1+u_2)^r}{r!} e^{-(u_1+u_2)}. \tag{1}$$

Man sieht, dass sich in diesem Falle die Summenwahrscheinlichkeit aus den Grössen u_1 und u_2 berechnen lässt. Das ist eine besondere und wertvolle Eigenschaft der Poissonschen Verteilung. Man sagt, sie genüge der Faltungsbedingung: $F(x; u_1) * F(x; u_2) = F(x; u_1 + u_2)$, wie das durch direktes Ausrechnen oder in bekannter Weise mit Hilfe der charakteristischen Funktion gezeigt werden kann. Es gibt noch verschiedene andere Verteilungen, die diese wertvolle Eigenschaft besitzen, so insbesondere die Normalverteilung, die χ^2 Verteilung, die Verteilung von Cauchy, die Binomialverteilung usw. Bei der *Binomialverteilung* ist die genannte Bedingung jedoch nicht in gleichem Masse erfüllt wie bei der Poissonschen. Betrachtet man die Faltungsbedingung für unabhängige Binomialverteilungen

$$(q_1 e^{it} + p_1)^n (q_2 e^{it} + p_2)^n = (q e^{it} + p)^n,$$

so erkennt man, dass sie nur unter der Voraussetzung, dass $q_1 = q_2 = q$ ist, zu Recht besteht. Es ist also nicht so, dass zwei Binomialverteilungen mit verschiedenen Grundwahrscheinlichkeiten ohne weiteres gefaltet werden könnten, wie das im Falle der Poissonschen Verteilung zutrifft. Indessen gibt es merkwürdigerweise doch Fälle von Binomialverteilungen, wo eine Faltung auch bei verschiedenen Grundwahrscheinlichkeiten möglich ist. Es sind das die *konsekutiven Verteilungen*, die nachstehend eingeführt werden sollen. Der Nachweis ihrer Existenz könnte mit Hilfe der charakteristischen Funktion, unter Berücksichtigung der bestehenden Abhängigkeit, erbracht werden. Er gestaltet sich aber ebenso einfach auf direktem Wege, in welchem Falle man gleichzeitig eine bessere Übersicht gewinnt. Zwei Binomialverteilungen heissen konsekutiv, wenn sie in folgender Weise zusammenhängen:

Erste Verteilung $\quad w_n(r_1; q_1) = \binom{n}{r_1} q_1^{r_1} p_1^{n-r_1},$

Zweite Verteilung $\quad w_{n-r_1}(r_2; q_2) = \binom{n - r_1}{r_2} q_2^{r_2} p_2^{n-r_1-r_2}.$

Wie man sieht, sind beide Verteilungen binomial und besitzen verschiedene Grundwahrscheinlichkeiten q_1 bzw. q_2; aber sie sind *nicht* unabhängig. In der zweiten tritt die Veränderliche r_1 wieder auf. Die zweite Verteilung ist damit in bestimmter Art mit der ersten verknüpft. Diese Abhängigkeit ist indessen eine für die Praxis besonders bedeutungsvolle.

Wir zeigen nun zunächst, dass die oben angeführte Faltungsbedingung für zwei konsekutive Binomialverteilungen tatsächlich erfüllt ist. Bezeichnen wir die resultierende Verteilung mit $w_n(r; q)$, so ist der Ausdruck

$$w_n(r; q) = \sum \binom{n}{r_1} \binom{n - r_1}{r_2} q_1^{r_1} q_2^{r_2} p_1^{n-r_1} p_2^{n-r_1-r_2}$$

zu berechnen. Die Summation erstreckt sich hier über sämtliche Werte von r_1 und r_2, wobei $r_1 + r_2 = r$ sein muss. Man erhält dafür

$$w(r;q) = \binom{n}{r} \{q_1 + p_1 q_2\}^r \{p_1 p_2\}^{n-r}. \tag{2}$$

Damit ist tatsächlich bewiesen, dass zwei konsekutive Binomialverteilungen der Faltungsbedingung genügen. Der angeschriebene Ausdruck ist ja wieder eine Binomialverteilung, mit den neuen Wahrscheinlichkeiten $q_1 + p_1 q_2$ und $p_1 p_2$. Aus den Bedingungen $q_1 + p_1 = 1$ und $q_2 + p_2 = 1$ folgt, dass die Summe der neuen Wahrscheinlichkeiten $q_1 + p_1 q_2$ und $p_1 p_2$ wieder eins ist. Die erste Grösse kann als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person entweder in einer ersten oder dann in der darauffolgenden zweiten Zeitperiode stirbt, die zweite als die Wahrscheinlichkeit, dass die Person beide Perioden überlebt, gedeutet werden. Man sieht, die erhaltene Formel lässt eine in der Lebensversicherungsmathematik geläufige Interpretation zu. Tatsächlich lässt sich diese Analogie noch weiter verfolgen, und es zeigt sich, dass gestützt auf die Eigenschaft der konsekutiven Verteilungen sich die Grundformeln der Versicherungsmathematik direkt aus den Axiomen der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung herleiten lassen. Wie das geschehen kann, soll kurz gezeigt werden.

Da die Grösse $w_n(r;q)$ wieder eine Binomialverteilung ist, lässt sich diese mit einer zu ihr konsekutiven wieder falten. Sind die Wahrscheinlichkeiten der letzteren q_3 und p_3, so erhält man für die Grundwahrscheinlichkeit der neuen Verteilung den Ausdruck $q_1 + p_1 q_2 + p_1 p_2 q_3$ oder ganz allgemein, wenn man diese Operation n-mal ausführt:

$$q = q_1 + p_1 q_2 + p_1 p_2 q_3 + \cdots + p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} q_n = 1 - p_1 p_2 \cdots p_n. \tag{3}$$

Werden hier die Einzelgrössen $q_1; q_2 \ldots q_n$ als Sterbenswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zeitintervalle $t_1; t_2 \ldots t_n$ gedeutet, so stellt q die Sterbenswahrscheinlichkeit für das ganze Intervall $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ dar. Unsere Entwicklung zeigt, dass, wenn die Binomialverteilung für jedes einzelne Intervall gilt, sie dann auch für das gesamte Intervall Gültigkeit besitzt, *unabhängig von den Veränderungen*, welche die Wahrscheinlichkeit im Laufe der Zeit erfährt.

Damit wird ein Beitrag zum *Geltungsproblem* der Wahrscheinlichkeitsrechnung geliefert. Unter dem Geltungsproblem versteht Reichenbach den Fragenkomplex, welcher sich mit der Gültigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie im Naturgeschehen befasst [1]). Er sucht die Frage abzuklären, mit welchem Recht wir Naturerkenntnisse mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbegriffes aussprechen können oder inwieweit wir berechtigt sind, bei der Beschreibung von Naturerscheinungen die Gültigkeit der Wahrscheinlichkeitsgesetze vorauszusetzen. Tatsächlich ist diese Frage von zentraler Bedeutung, denn von ihr hängt es ab, ob und inwieweit die aus der Theorie gewonnenen Erkenntnisse in Wirklichkeit zutreffen. Wenn man ein axiomatisches System auf die Wirklichkeit anwendet, so wird man sorgfältig prüfen müssen, ob die realen Gegebenheiten die in den Axiomen enthaltenen Voraussetzungen in befriedigendem Masse erfüllen. Erst wenn das zutrifft, wird man mit genügender Sicherheit annehmen dürfen, dass die sich durch tautologische Umformungen ergebenden Schlussfolgerungen ebenfalls zutreffen. Bei der Prüfung dieser Frage stösst man allerdings auf mannigfache Schwierigkeiten. Grundsätzlich wird man nie behaupten können, dass bei irgendwelchen Naturerscheinungen die Voraussetzungen eines Axiomensystems restlos erfüllt sind. Nicht selten tritt man aber bei solchen Überprüfungen auf derartige Unterschiede, dass man geneigt wäre, jede Anwendbarkeit von vornherein zu verneinen, wenn nicht die Erfahrung eines anderen belehren würde. Diese Erscheinung hängt wohl damit zusammen, dass nicht alle apriorisch feststellbaren Unterschiede zwischen Theorie und Wirklichkeit von Belang sind; die Theorie ist oft so beschaffen, dass sie gewisse Divergenzen gegenüber der Wirklichkeit toleriert. Gelingt es, den wahren Grund solcher Toleranzerscheinungen aufzudecken, so erhält man damit auch eine Erklärung für die mitunter feststellbare gute Brauchbarkeit der Theorie und gleichzeitig auch einen nützlichen Hinweis für die Beurteilung ihrer Anwendbarkeit.

In der Versicherung führt die Untersuchung des Geltungsproblems vor allem auf zwei grundsätzliche Unterschiede zwischen der axiomatischen Basis und den empirischen Gegebenheiten. Die mit Hilfe eines Urnenschemas ableitbaren Sätze werden bekanntlich unter der Voraussetzung der *Gleichwahrscheinlichkeit* und der *Konstanz des Mischungsverhältnisses* während der Auslosungen erhalten. Beide Voraussetzungen sind bei einem Versicherungsbestand nicht erfüllt.

---

[1]) Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre, 1935.

Erstens bestehen z. B. bei einer Personengruppe, selbst wenn es sich um die Angehörigen des gleichen Jahrganges handelt, bei den Sterbenswahrscheinlichkeiten erhebliche Unterschiede, wie das die Ergebnisse der ärztlichen Überprüfungen des Gesundheitszustandes jeweils sehr eindrücklich erkennen lassen. *Zweitens* bleibt die Sterbenswahrscheinlichkeit während eines Jahres nicht konstant. Sie steigt nicht nur mit zunehmendem Alter an, sondern kann innert einer kurzen Zeitspanne ganz erheblich sinken oder in die Höhe schnellen.

Über das *erste* Teilproblem ist bekanntlich sehr viel geschrieben worden, ohne dass es bis heute zu einer befriedigenden Abklärung hätte geführt werden können. Immerhin konnten gewisse wertvolle Sätze, so über die Gültigkeit der Poissonschen Verteilung [1]), und in neuester Zeit gewisse Ergebnisse über die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes gewonnen werden [2]).

Das *zweite* Teilproblem, das die zeitlichen Veränderungen der Grundwahrscheinlichkeiten betrifft, erfährt durch die hier nachgewiesene Eigenschaft konsekutiver Verteilungen eine weitgehende Klärung.

Betrachten wir zunächst das Urnenschema: Die Ziehungsergebnisse aus einer Urne zeigen, dass bei konstant bleibenden Grundwahrscheinlichkeiten die Binomialverteilung gilt. Die Voraussetzung der Konstanz der Grundwahrscheinlichkeiten ist aber nicht notwendig, die Binomialverteilung bleibt erhalten, auch wenn während der Ziehungsoperation das Mischungsverhältnis und damit die Grundwahrscheinlichkeit nach der folgenden Vorschrift geändert wird. Es wird zunächst bei *konstant* gehaltenen Mischungsverhältnissen aus einer Urne mit weissen und schwarzen Kugeln n-mal eine Kugel unter Zurücklegung derselben in die Urne gezogen. Nach n Ziehungen mögen r_1 schwarze und $n - r_1$ weisse Kugeln erschienen sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $w_n(r_1; q_1)$, wenn q_1 die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer schwarzen Kugel angibt. Nun wird eine zweite Auslosung vorgenommen, bei welcher vorgängig das Mischungsverhältnis irgendwie geändert wird und dann $n - r_1$ Ziehungen vollzogen werden. Die Wahrscheinlichkeit, bei dieser zweiten Auslosung r_2 schwarze Kugeln zu ziehen, wird durch $w_{n-r}(r_2; q_2)$ ausgedrückt.

---

[1]) Siehe «Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik»: «Ein Beitrag zur mathematischen Darstellung statistischer Vorgänge».

[2]) Annals of Mathematics, vol. 21, 1950. Fundamental Limit Theorems of Probability Theory by M. Loève.

Man erkennt ohne weiteres, dass die so erzeugte zweite Verteilung zur ersten konsekutiv ist.

Das Wesentliche ist nun aber, dass dieser Prozess strukturell gewissen wichtigen Vorgängen in der Wirklichkeit entspricht. Betrachtet man eine *geschlossene Gesamtheit* gleichartiger Dinge, die irgendeinem Risiko ausgesetzt sind, wie etwa eine Gruppe von n auf den Todesfall versicherten Personen, so haben wir gerade einen solchen konsekutiven Vorgang vor uns. Wenn angenommen werden kann, dass während eines wenn auch nur sehr kleinen Zeitabschnittes die Grundwahrscheinlichkeiten unverändert bleiben, so entspricht das wahrscheinlichkeitstheoretisch einer n-maligen Auslosung aus einer Urne bei konstant gehaltenem Mischungsverhältnis. Nach Ablauf des ersten Zeitabschnittes sind nur noch $n - r_1$ versicherte Risiken vorhanden, wenn in r_1 Fällen der Versicherungsfall eingetreten ist. Die $n - r_1$ Risiken stehen nun während eines zweiten Zeitabschnittes mit veränderten, konstant bleibenden Gefahren unter Risiko, was einer zweiten $n - r_1$-maligen Auslosung aus einer zweiten Urne gleichkommt. Hieraus erkennt man, dass der Abfall einer geschlossenen Gesamtheit genau dem Vorgang entspricht, der durch die Vorschrift für die Erzeugung von konsekutiven Verteilungen an einem Urnensystem zustande kommt.

Damit ist wohl gezeigt, dass es möglich ist, ein Urnenschema zu konstruieren, das unter Erhaltung der Binomialverteilung die Erscheinungen bei geschlossenen Gesamtheiten und *veränderlichen* Wahrscheinlichkeiten in adäquater Weise wiedergibt. Indessen zeigt es sich, dass in solchen Fällen die Summenwahrscheinlichkeit nach einer *besonderen* Vorschrift berechnet werden muss. Es genügt nicht, z. B. einfach das arithmetische Mittel anzusetzen. Dazu tritt noch der weitere Umstand, dass man im konkreten Falle die Veränderungen der Grundwahrscheinlichkeiten in der überwiegend grossen Zahl der Fälle gar nicht kennt. Es ist durchaus möglich, dass z. B. die Unfallwahrscheinlichkeit plötzlich von einem Zehntausendstel auf einen Zehntel ansteigt, um dann wieder auf den Ausgangswert zurückzusinken, ohne dass ein solcher Vorgang registriert werden kann. Die Auswertung der abgeleiteten Formel setzt jedoch die Kenntnis solcher Schwankungen voraus. Nur bei Kenntnis der Grundwahrscheinlichkeit in *jedem* Zeitintervall erscheint die Summenwahrscheinlichkeit nach der Schlussformel berechenbar. — Es zeigt sich, dass diese

Schwierigkeit verhältnismässig leicht überwunden werden kann. Eine weitere Umformung des erhaltenen Wertes für die Gesamtwahrscheinlichkeit q führt zu bekannten Grössen, deren Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst durch diese Analyse in Erscheinung tritt. Um diesen Zusammenhang nachzuweisen, nehmen wir vorerst an, es sei möglich, ein Zeitintervall $\varDelta t$ so klein zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit während seines Ablaufs *unverändert* bleibt. (Da nach den gegenwärtigen physikalischen Erkenntnissen alle Änderungen sprungweise erfolgen, ist es durchaus möglich, dass eine solche Annahme der Wirklichkeit auch entspricht. Sie muss indessen für die nachfolgenden Betrachtungen nicht vorausgesetzt werden.) Wir denken uns das kleine Intervall t in m Teile unterteilt, was bei einem Intervall auch für beliebig grosses m stets möglich ist. Ist die Grundwahrscheinlichkeit für das ganze Intervall $\varDelta t$ gleich q, so wollen wir dafür $q = \mu \varDelta t$ setzen. Die Wahrscheinlichkeit für das Teilintervall $\frac{\varDelta t}{m}$ ist dann — da die Grundwahrscheinlichkeit q während der Zeit t konstant bleibt — $\mu \frac{\varDelta t}{m}$. Setzt man diese Werte in die Formel (3) ein, so erhält man zunächst für die Grundwahrscheinlichkeiten:

$$p_1 p_2 \ldots p_m = \left(1 - \frac{\mu \varDelta t}{m}\right)^m.$$

Da, wie ausgeführt, die Einteilung beliebig verfeinert werden kann, erhält man durch den Übergang zum Limes den Ausdruck:

$$p = \lim_{m \to \infty} p_1 p_2 \ldots p_m = e^{-\mu \varDelta t} \quad \text{und} \quad q = 1 - e^{-\mu \varDelta t}.$$

Nun kann an das erste Intervall ein zweites angehängt und auf Grund des Satzes über konsekutive Verteilungen mit dem ersten zusammengefasst werden usw. Sind die Intervalle von der Länge $\varDelta t_1; \varDelta t_2; \ldots \varDelta t_k$ und $\mu_1; \mu_2; \ldots \mu_k$ die entsprechenden Bestimmungsgrössen der Grundwahrscheinlichkeiten, so erhält man, wie man leicht bestätigt, als Intervallwahrscheinlichkeiten die bekannten Ausdrücke:

$$p = e^{-u(t)} \quad \text{bzw.} \quad q = 1 - e^{-u(t)}, \tag{4}$$

wobei $u(t)$ sich wie folgt zusammensetzt:

$$u(t) = \mu_1 \varDelta t_1 + \mu_2 \varDelta t_2 + \ldots + \mu_k \varDelta t_k \text{ mit } t = \varDelta t_1 + \varDelta t_2 + \ldots + \varDelta t_k.$$

Hiefür kann man auch schreiben $u(t) = \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau$, wobei nach der vorgeführten Ableitung $\mu(\tau)$ eine Treppenfunktion ist. Diese letzte Einschränkung ist indessen nicht notwendig, da die Intervalleinteilung beliebig verfeinert werden kann. Es können — wie man in der Integraltheorie zeigt — auch Fälle, da $\mu(\tau)$ eine allgemeinere Funktion ist, erfasst werden. Die einzige Voraussetzung ist, dass $\mu(\tau)$ integrierbar bleiben muss.

Selbstverständlich war nicht das Ziel dieser Abhandlung, bekannte elementare Beziehungen der Versicherungsmathematik einmal mehr abzuleiten. Was mit der gegebenen Darstellung bezweckt wird, ist vielmehr, den Nachweis zu erbringen, dass diese bekannten Beziehungen auf die axiomatische Basis der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt werden können und dadurch eine viel tiefere und sinnvollere Bedeutung erlangen.

Tatsächlich zeigt das zuletzt erhaltene Resultat, dass die auf Grund der ersten Ansätze erhaltene Regel für die Berechnung der Summenwahrscheinlichkeit, Formel (4), eine für den praktischen Gebrauch verwertbare Gestalt annimmt. Wie oben ausgeführt, bestand noch eine prinzipielle Schwierigkeit in der Ermittlung der Summenwahrscheinlichkeit, weil diese die Kenntnis der Einzelwerte der sich verändernden Grundwahrscheinlichkeit erforderte.

Das mit (4) gewonnene Resultat zeigt jedoch, dass eine solche Kenntnis glücklicherweise nicht verlangt werden muss. Die Funktion $u(t)$ ist additiv. Sie setzt sich aus den einzelnen Summanden $\mu_1; \mu_2 \ldots$ zusammen. Dabei ist es nicht notwendig, den *einzelnen* Wert dieser Summanden zu kennen; die Kenntnis ihres Integrals genügt. Mit anderen Worten, der eigentliche Verlauf der Funktion $\mu(t)$ ist nicht massgebend, sondern lediglich deren Zeitintegral, das im Prinzip direkt aus dem Beobachtungsmaterial entnommen werden kann. Dieses Resultat ist überraschend. Tatsächlich möchte man meinen, dass eine geschlossene Gesamtheit, die grossen Schwankungen der Risikogefahren ausgesetzt ist, auch eine grössere Zahl von Fällen (Todesfällen usw.) zu gewärtigen hat als eine solche, die einer gleichmässigen, konstanten Risikogefahr unterliegt. Das ist, wie die Resultate unserer Untersuchung darlegen, nicht so. Es kommt nicht einmal auf die Verteilung der Schwankungen an, obwohl man rein gefühlsmässig geneigt wäre, anzunehmen, dass ein grosser Anstieg der Risikogefahren zu Beginn eines Zeitintervalls stärker ins Gewicht fallen sollte, als ein solcher am Ende.

Zusammenfassend darf somit folgendes festgehalten werden: Es kann gezeigt werden, dass die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf geschlossene Gesamtheiten mit stochastisch bedingten Abgangsursachen trotz den in den meisten Fällen bestehenden *erheblichen zeitlichen Schwankungen* gewahrt bleibt. Ein solcher Nachweis erscheint im Hinblick auf die Skepsis, die hinsichtlich der *Anwendbarkeit* der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Gegenstände der Wirklichkeit besteht, wertvoll. — Sicher sind derartige Bedenken nicht unbegründet. Stellt man sich auf den Boden «*der geeigneten Gegenstandswahl*», d. h. würde man die sehr verbreitete Auffassung vertreten, die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung dürfen *nur* auf Gegenstände der Wirklichkeit angewendet werden, bei denen angenommen werden kann, das Axiomensystem sei erfüllt, so müsste die Frage, ob bei veränderlichen empirischen Grundwahrscheinlichkeiten eine Anwendung gewagt werden darf, vorsichtshalber *verneint* werden. Die soeben abgeleiteten Formeln zeigen aber, dass eine solche Schlussfolgerung doch voreilig wäre. Diese Feststellung deckt sich mit der allgemeinen Erfahrung, wonach die Mathematik trotz allen Diskrepanzen zwischen Wirklichkeit und Theorie zur Deutung des Naturgeschehens meistens weiter reicht, als dies vorerst angenommen werden dürfte. Der Grund ist oft nicht von vornherein ersichtlich und kann mitunter durch die Weiterentwicklung und bessere Begründung der Theorie aufgedeckt werden. Seine Kenntnis bildet aber für den Fortschritt der Wissenschaft eine wesentliche Voraussetzung, da sie zu den Vorbedingungen für die Begreiflichkeit des Geschehens gehören.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass in gleicher Weise wie die Binomiale auch die *Pascalsche Verteilung* die Bildung von konsekutiven Folgen gestattet. Auch bei der letzteren ergeben sich interessante Resultate, die mit dem realen Geschehen in engem Zusammenhang stehen.