Notiz zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **51 (1951)**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555064

Notiz zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

A. J. Lotka hat seinerzeit nachgewiesen, dass jede Bevölkerung unter dem Einfluss gleichbleibender Sterblichkeit und Fruchtbarkeit einem Endzustand zustrebt. Dieser Endzustand ist durch einen unveränderlichen (stabilen) Altersaufbau und eine gleichbleibende Vermehrungsrate gekennzeichnet [1]).

Bedeutet $p(y)$ die y-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer Nulljährigen, ferner $f(y)$ die Intensität der Fruchtbarkeit im Alter y mit den Reproduktionsgrenzen y_1 und y_2, so ist die Vermehrungsrate r der stabilen Bevölkerung gegeben durch die Gleichung [1])

$$\int_{y_1}^{y_2} e^{-ry}\, p(y)\, f(y)\, dy = 1. \tag{1}$$

Zur numerischen Bestimmung von r sind verschiedene Verfahren bekannt. Wird, wie es in (1) angenommen ist, die Fruchtbarkeit nur nach dem erreichten Alter y, nicht aber nach Zivilständen usw. abgestuft, so führt die von *Lotka* angegebene Methode rasch zum Ziel. Wird die Fruchtbarkeit auch als vom Zivilstand, von der Ehedauer usw. abhängig vorausgesetzt, so wird man das Verfahren von *A. Linder*[1]) gebrauchen. Im folgenden wollen wir ein weiteres Vorgehen zur Berechnung von r darstellen; es geht von den gleichen Gegebenheiten aus wie das erste der genannten Verfahren.

In (1) setzen wir abkürzend $p(y)\, f(y) = h(y)$. Sodann führen wir die Grösse ε ein, derart, dass $e^{-r} = 1 + \varepsilon$ und betrachten den

[1]) Vgl. *A. Linder:* Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung (Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Band 4, 1938, S. 136–156).

allgemeinen Ausdruck

$$J(\varepsilon) = \int\limits_{y_1}^{y_2} (1+\varepsilon)^y \, h(y) \, dy = \tag{2}$$

$$= \int\limits_{y_1}^{y_2} h(y) \, dy + \varepsilon \int\limits_{y_1}^{y_2} \binom{y}{1} h(y) \, dy + \varepsilon^2 \int\limits_{y_1}^{y_2} \binom{y}{2} h(y) \, dy + \dots .$$

Die Momente von $h(y)$ seien bezeichnet mit

$$R_k = \int\limits_{y_1}^{y_2} y^k \, h(y) \, dy ; \tag{3}$$

damit wird

$$J(\varepsilon) = R_0 + R_1 \varepsilon + \frac{R_2 - R_1}{2} \varepsilon^2 + \dots . \tag{4}$$

Wir schreiben (4) in der Form

$$J(\varepsilon) = m_0 + m_1 \varepsilon + m_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \tag{5}$$

und setzen, indem wir zu den Semi-Invarianten nach *Thiele* übergehen,

$$J(\varepsilon) = m_0 \exp \left[\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right]. \tag{6}$$

Zwischen den m_i und den λ_i bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \lambda_1 m_0 , \\ m_2 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_0 , \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{7}$$

mit

$$\left.\begin{array}{l} m_0 = R_0 , \\ m_1 = R_1 , \\ m_2 = R_2 - R_1 , \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{8}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{R_1}{R_0} , \\ \lambda_2 = \dfrac{R_2 - R_1}{R_0} - \lambda_1^2 , \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{9}$$

Weil ε im allgemeinen nur kleine Werte annimmt, genügt es, (6) zu begrenzen auf

$$J(\varepsilon) = R_0 \exp\left[\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2}\right]. \tag{10}$$

Wir haben ε so zu bestimmen, dass $J(\varepsilon) = 1$, also

$$R_0 \exp\left[\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2}\right] = 1. \tag{11}$$

Daraus folgt für ε die quadratische Gleichung

$$\lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \lambda_1 \varepsilon + \ln R_0 = 0, \tag{12}$$

woraus ε berechenbar ist. Aus dem Ansatz $e^{-r} = 1 + \varepsilon$ wird schliesslich

$$r = \ln \frac{1}{1 + \varepsilon} \sim -\varepsilon. \tag{13}$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.