

# Über die Orthogonalpolynome

Autor(en): **Kreis, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-550887>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Über die Orthogonalpolynome

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die Entwicklung einer Funktion nach Orthogonalpolynomen wird durch zwei charakteristische Eigenschaften ausgezeichnet:

1. bei *gegebener Gradzahl* liefert sie die *Minimalsumme* der quadratischen Abweichungen der ausgeglichenen von den ursprünglichen Werten;
2. bei *wachsender Gradzahl* der herangezogenen Orthogonalpolynome nimmt diese Summe der Fehlerquadrate monoton gegen 0 ab.

Die vorliegende Mitteilung untersucht allgemein diese bei der Ausgleichung von Beobachtungswerten sich aufdrängenden Funktionen und bringt in Zusammenhang damit einen Beweis für eine von *Tchebycheff* angegebene Formel.

Die den beliebigen Abszissen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zugeordneten Orthogonalpolynome werden durch folgende Bedingungsgleichungen definiert:

$$\sum_x P_h(x) P_k(x) = 0, \quad (1)$$

$P_s(x)$  bedeutet ein Polynom vom  $s$ . Grad, das in der Normalform folgendermassen geschrieben werden kann:

$$P_s(x) = x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0.$$

Die Summation erstreckt sich über die  $n$  Abszissen  $x_1$  bis  $x_n$ ; die Gleichungen (1) gelten für alle Zahlenpaare  $h \neq k$ .

Der Definition zufolge hat man insbesondere:

- a)  $P_0(x) = x^0 = 1, \quad \sum_x P_0(x) = n \equiv N_0;$
- b)  $\sum_x P_k(x) = 0, \quad \text{für } k \neq 0;$
- c)  $\sum_x x^h P_k(x) = 0, \quad \text{für } h < k.$

Hieraus folgt:

$$P_1(x) = x - \frac{\sum_1^n x_i}{n},$$

und falls  $n > 1$ , ist die Norm

$$N_1 \equiv \sum_x P_1^2(x) = \sum_x x P_1(x)$$

von Null verschieden, da sonst die lineare Gleichung  $P_1(x) = 0$ ,  $n > 1$  verschiedene Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$  hätte.

Das Polynom  $P_2(x)$  kann aus der Gleichung

$$x^2 = P_2(x) + A_1 P_1(x) + A_0 P_0(x)$$

ermittelt werden, in der  $A_0$  und  $A_1$  durch die Bedingungsgleichungen

$$A_0 N_0 = \sum_x x^2 P_0(x),$$

$$A_1 N_1 = \sum_x x^2 P_1(x),$$

bestimmt werden. Das so definierte Polynom  $P_2$  erfüllt die Orthogonalitätsbedingungen (1), und falls  $n > 2$ , ist die Norm

$$N_2 \equiv \sum_x P_2^2(x) = \sum_x x^2 P_2(x)$$

nicht Null.

Werden auf diese Weise die Polynome  $P_3, P_4 \dots$  und die zugehörigen Normen  $N_3, N_4 \dots$  nach und nach ermittelt, so gelangt man schliesslich zum Polynom  $P_n(x)$ , das mit dem Produkt

$$P_n^*(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

identisch ist. Denn in der Entwicklung

$$P_n^*(x) = P_n(x) + A_{n-1} P_{n-1} + \dots + A_0 P_0(x)$$

hat man

$$A_i N_i = \sum_x P_n^*(x) P_i(x) = 0, \quad \text{für } 0 \leq i \leq n-1,$$

also  $A_i = 0$ . Folglich sind  $P_n(x)$  und  $P_n^*(x)$  identisch gleich und die Norm

$$N_n \equiv \sum_x P_n^2(x) = \sum_x P_n^{*2}(x)$$

verschwindet.

Durch das beliebige Abszissensystem  $x_1, x_2 \dots x_n$  wird infolgedessen ein System von Polynomen, das den Orthogonalbedingungen (1) genügt, eindeutig definiert.

Führt man eine neue Variable  $z = x - m$ ,  $m$  beliebig, ein und setzt

$$P_s(x) = P_s(z + m) \equiv Q_s(z),$$

so erfüllen die Polynome  $Q_s(z)$  ebenfalls die Bedingungen (1). Die beiden Koordinatensysteme  $(x_i)$  und  $(z_i)$  sind sowohl in bezug auf die Polynomauswertungen als auch in bezug auf die Normen äquivalent. Für jeden Index  $s$  ist nämlich

$$P_s(x_i) = Q_s(z_i).$$

$$N_s = \sum_1^n P_s^2(x_i) = \sum_1^n Q_s^2(z_i).$$

*Zahlenbeispiel: 1.*  $x = 1, 2, 4, 5.$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - 3$$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 6,5$$

$$P_3(x) = x^3 - 9x^2 + 23,6x - 16,8$$

$$P_4(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5)$$

2.  $m = 3 : z = x - 3 = -2, -1, 1, 2.$

$$Q_0(z) = 1$$

$$Q_1(z) = z$$

$$Q_2(z) = z^2 - 2,5$$

$$Q_3(z) = z^3 - 3,4z$$

$$Q_4(z) = (z^2 - 1)(z^2 - 4)$$

$x$	$z$	$P_0 = Q_0$	$P_1 = Q_1$	$P_2 = Q_2$	$P_3 = Q_3$	$P_4 = Q_4$
1	-2	1	-2	1,5	-1,2	0
2	-1	1	-1	-1,5	2,4	0
4	1	1	1	-1,5	-2,4	0
5	2	1	2	1,5	1,2	0

$$N_0 = 4; N_1 = 10; N_2 = 9; N_3 = 14,4; N_4 = 0.$$

Bilden die Abszissen  $x_i$  die natürliche Zahlenreihe  $1, 2, \dots, n$  und wird  $m = \frac{1+n}{2}$  gewählt, so bilden die  $z$ -Werte eine arithmetische

*symmetrische* Folge mit dem Anfangsglied  $z_1 = -\frac{n-1}{2}$  und dem Schlussglied  $z_n = \frac{n-1}{2}$ . Da die Argumente  $z$  paarweise entgegengesetzt gleich sind, erfüllen die beiden Polynome  $Q_s(z)$  und  $(-1)^s Q_s(-z)$  die Orthogonalitätsbedingungen (1), und da die Koeffizienten von  $z^s$ , nämlich 1 und  $(-1)^{2s}$ , gleich sind, hat man

$$(-1)^s Q_s(-z) = Q_s(z).$$

Für ein gerades  $s$  folgt hieraus

$$Q_s(-z) = Q_s(z)$$

und für ein ungerades  $s$

$$-Q_s(-z) = Q_s(z).$$

D. h. das Orthogonalpolynom  $Q_s(z)$  ist eine gerade oder ungerade Funktion von  $z$ , je nachdem der Grad  $s$  desselben eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zwischen drei aufeinanderfolgenden Polynomen  $Q_s(z)$  besteht folgende Beziehung:

$$Q_{s+1}(z) = z Q_s(z) - \frac{N_s}{N_{s-1}} Q_{s-1}(z). \quad (2)$$

Um diese Relation zu beweisen, denken wir uns das Produkt  $z Q_s(z)$  nach Orthogonalpolynomen entwickelt:

$$z Q_s(z) = Q_{s+1}(z) + A_{s-1} Q_{s-1}(z) \dots + A_0 Q_0(z).$$

Der allgemeine Koeffizient  $A_i$  für  $i = 0$  bis  $s-2$  wird erhalten durch Multiplikation mit  $z^i$  und Summation; es ergibt sich

$$\sum_z z^{i+1} Q_s(z) = A_i N_i,$$

da  $i+1 < s$  ist, verschwindet die Summe auf der linken Seite, also  $A_i = 0$ . Multipliziert man aber die Gleichung mit  $z^{s-1}$  und summiert, so erhält man

$$\sum_z z^s Q_s(z) = A_{s-1} \sum_z z^{s-1} Q_{s-1}(z),$$

also

$$N_s = A_{s-1} N_{s-1},$$

somit

$$A_{s-1} = N_s : N_{s-1}.$$

Hieraus resultiert die Rekursionsformel

$$N_{s-1} Q_{s+1}(z) = N_{s-1} z Q_s(z) - N_s Q_{s-1}(z). \quad (3)$$

Für die Norm  $N_s$  besteht die noch zu beweisende allgemeine Beziehung:

$$N_s = \frac{s! s!}{\binom{2s}{s}} \binom{n+1}{2s+1}. \quad (4)$$

Durch Einsetzung geht die Formel (2) in die eingangs erwähnte Formel von Tchebycheff über

$$Q_{s+1}(z) = z Q_s(z) - \frac{s^2(n^2 - s^2)}{4(4s^2 - 1)} Q_{s-1}(z).$$

Zur Begründung der Formel (4) formen wir die rechte Seite der Definitionsgleichung

$$N_s = \sum_z z^s Q_s(z)$$

um, indem wir die Summen der geraden Potenzen der Zahlen  $z_i$ ,  $Z_{2k}$ , einführen.  $N_s$  lässt sich folgendermassen darstellen

$$N_s = Z_{2s} + b_{2s-2} Z_{2s-2} + \dots + b_{2r} Z_{2r},$$

wobei  $2r$  gleich  $s$  oder  $s+1$ , je nachdem  $s$  eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet.

Durch partielle Differentiation der erzeugenden Funktion

$$F(t; m) = e^{-mt} + e^{-mt+t} + \dots + e^{mt}$$

$\left(m = \frac{n+1}{2}\right)$  nach  $t$ , findet man

$$Z_{2k} = \frac{\partial^{2k} F(t; m)}{\partial t^{2k}}, \quad \text{für } t = 0.$$

Summiert man die geometrische Folge rechts, so wird

$$F(t; m) = \frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} \equiv E(t; n).$$

Es ist somit auch

$$Z_{2k} = \frac{\partial^{2k} E(t; n)}{\partial t^{2k}}, \quad \text{für } t = 0.$$

Da  $E(t; n) = E(-t; n)$ , eine gerade Funktion von  $t$  ist, gilt folgende Entwicklung nach Potenzen von  $t^2$ :

$$E(t; n) = A_0(n) + A_2(n) t^2 + A_4(n) t^4 + \dots$$

Aus  $E(t; -n) = -E(t; n)$ , ergibt sich ferner

$$A_{2k}(-n) = -A_{2k}(n),$$

d. h. die Koeffizienten  $A_{2k}$  sind ungerade Funktionen von  $n$ .

Für  $n = 1$  wird

$$E(t; 1) = 1 = \sum_0^{\infty} A_{2k}(1) t^{2k},$$

folglich

$$A_0(1) = 1; \quad A_{2k}(1) = 0, \quad \text{für } k > 0.$$

Für  $n = -1$  findet man analog aus

$$E(t; -1) = -1 = \sum_0^{\infty} A_{2k}(-1) t^{2k},$$

$$A_0(-1) = -1; \quad A_{2k}(-1) = 0, \quad \text{für } k > 0.$$

Zweimalige Differentiation von

$$\frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{\frac{t}{e^{\frac{t}{2}}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \sum_0^{\infty} A_{2k}(n) t^{2k}$$

nach  $n$  ergibt

$$\frac{t^2}{4} \sum_0^{\infty} A_{2k}(n) t^{2k} = \sum_0^{\infty} A_{2k}''(n) t^{2k}.$$

Die Koeffizientenvergleichung liefert folgende Relation

$$A_{2k}''(n) = \frac{1}{4} A_{2k-2}(n).$$

Zweimalige Integration von  $A_{2k}(n)$  nach  $n$  liefert ein Polynom, in dem die beiden Glieder  $pn + q$  noch unbestimmte Koeffizienten haben.  $A_{2k}(0)$  führt auf  $q = 0$  und  $A_{2k+2}(1) = 0$  gestattet,  $p$  zu bestimmen.

Die ersten Koeffizienten lauten

$$A_0 = n$$

$$A_2 = \frac{n^3 - n}{6}$$

$$A_4 = \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{3 \cdot 5!}$$

$$A_6 = \frac{3n^7 - 21n^5 + 49n^3 - 31n}{3 \cdot 7!}.$$

Die Polynome  $A_{2k+2}(n)$  besitzen die Nullstellen  $-1, 0, +1$  und lassen sich auf folgende Form bringen

$$A_{2k+2}(n) = \binom{n+1}{3} f_k(n^2),$$

wobei  $f_k(n^2)$  ein Polynom von  $n^2$  vom  $k$ . Grad bezeichnet. Z. B.

$$A_2 = \binom{n+1}{3}$$

$$A_4 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^2 - 7}{60}$$

$$A_6 = \binom{n+1}{3} \frac{6n^4 - 36n^2 + 62}{7!}.$$

Die Potenzsummen  $Z_{2k}$  lassen sich demnach wie folgt darstellen:

$$Z_{2k} = (2k)! \binom{n+1}{3} f_{k-1}(n^2), \quad k > 0.$$

Z. B.

$$Z_2 = \frac{1}{2} \binom{n+1}{3}$$

$$Z_4 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^2 - 7}{40}$$

$$Z_6 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^4 - 18n^2 + 31}{224}.$$

Die Normen  $N_s$  erhalten für  $s > 0$  dieselbe Form wie die Summen  $Z_2, Z_4, \dots$ , so dass geschrieben werden kann

$$N_s = \binom{n+1}{3} g_{s-1}(n^2), \quad s > 0. \quad (5)$$

Wählt man  $Q_s(z) = Q_n(z) R_p(z)$ , wobei  $R_p(z)$  irgendein Polynom vom Grad  $p$  bedeutet, so genügt diese besondere Funktion  $Q_s(z)$  den Orthogonalbedingungen (1), verschwindet aber für alle Werte  $z_i$ , über welche summiert wird, so dass auch  $N_s$  verschwindet.



Betrachtet man in der Gleichung (5)  $s$  als feste und  $n$  als veränderliche Zahl, so verschwindet  $N_s$  für  $n = 1, 2, \dots, s$ , so dass die rechte Seite der Gleichung (5) die Form haben muss:

$$N_s = C_s n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \dots (n^2 - s^2)$$

oder kürzer

$$N_s = C_s \binom{n+s}{2s+1}.$$

Für  $n+s = 2s+1$ , also  $n = s+1$ , ist die Konstante  $C_s = N_s$ . Die Glieder des entwickelten Binoms  $(1-1)^s$  liefern bis auf einen konstanten Faktor  $A$  einen solchen Spezialfall. Die  $s+1$ -Werte

$$P_s(i) = A(-1)^{i-1} \binom{s}{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, s+1$$

genügen den Orthogonalbedingungen (1); denn

$$\sum_1^{s+1} P_s(i) i^k = A \sum_1^{s+1} (-1)^{i-1} \binom{s}{i-1} i^k = A \Delta^s (i^k).$$

Diese Differenz der  $s$ . Ordnung der Funktion vom  $k$ . Grad  $i^k$  verschwindet aber, falls  $k = 0, 1, \dots, (s-1)$  ist.

Der konstante Faktor  $A$  wird erhalten, indem  $N_s$  auf zwei verschiedene Arten ausgewertet wird. Es ist

$$1. \quad N_s = \sum_1^{s+1} P_s^2(i) = A^2 \sum_1^{s+1} \binom{s}{i-1}.$$

Die Summe auf der rechten Seite stimmt überein mit dem Koeffizienten von  $t^s$  in der Entwicklung von  $(1+1)^{2s}$ , also

$$N_s = A^2 \binom{2s}{s}.$$

$$2. \quad N_s = \sum_1^{s+1} i^s P_s(i) = A \sum_1^{s+1} (-1)^{i-1} \binom{s}{i-1} = A(-1)^s s!,$$

wie man durch  $s$ -malige Differentiation des Produktes

$$(1 - e^t)^s e^t = (-1)^s t^s + A_{s+1} t^{s+1} + \dots,$$

für  $t = 0$  erkennt.

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für  $N_s$  ergibt

$$A = (-1)^s s! : \binom{2s}{s},$$

und hieraus folgt die behauptete Formel

$$N_s = \frac{s! s!}{\binom{2s}{s}} \binom{n+s}{2s+1},$$

die auch für  $s = 0$  gilt, wenn, wie üblich, unter dem Symbol  $0!$  die Zahl 1 verstanden wird, nämlich  $N_0 = n$ .

*Pareto* [1] hat eine Zusammenstellung der Polynome  $Q_s(z)$  und  $P_s(x) = Q_s\left(x - \frac{n+1}{2}\right)$  für  $s = 1$  bis 8 publiziert und ausserdem die Auswertungen derselben für die positiven Werte der Argumente  $z$  für die Gliederzahlen  $n = 4$  bis  $n = 25$  tabelliert.

Die ersten Orthogonalpolynome heissen:

$$Q_0(z) = 1$$

$$Q_1(z) = z$$

$$Q_2(z) = z^2 - \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$Q_3(z) = z^3 - \frac{3n^2 - 7}{20} z$$

$$Q_4(z) = z^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} z^2 + \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$$

$$Q_5(z) = z^5 - \frac{5n^2 - 35}{18} z^3 + \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008} z.$$

Gegeben sei eine auszugleichende Folge von Beobachtungswerten  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Mit Hilfe der Orthogonalpolynome  $P_s(x)$  lässt sich die Zahlenreihe analytisch folgendermassen genau darstellen

$$u_x = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + \dots + A_{n-1} P_{n-1}(x), \quad (6)$$

oder, wenn die Momente der Funktion  $u_x$  eingeführt werden,

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum x u_x P_0(x) = A_0 N_0 \\ M_1 &= \sum x u_x P_1(x) = A_1 N_1 \\ &\dots \dots \dots \\ M_{n-1} &= \sum x u_x P_{n-1}(x) = A_{n-1} N_{n-1} \end{aligned}$$

$$u_x = \frac{M_0}{N_0} P_0(x) + \frac{M_1}{N_1} P_1(x) + \dots + \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} P_{n-1}(x).$$

Beschränkt man sich auf die  $k$  ersten Glieder der Entwicklung (6), so ist der begangene Fehler gleich der Summe der vernachlässigten Glieder

$$A_k P_k(x) + \dots + A_{n-1} P_{n-1}(x),$$

so dass die Summe der Fehlerquadrate beträgt

$$A_k^2 N_k + \dots + A_{n-1}^2 N_{n-1} \equiv F_k.$$

Irgendeine Ersatzfunktion ebenfalls  $(n - 1)$ . Grades für  $u_x$ , etwa

$$A_0^* P_0(x) + \dots + A_{k-1}^* P_{k-1}(x)$$

bedingt folgende Abweichung von  $u_x$ :

$$(A_0 - A_0^*) P_0 + \dots + (A_{k-1} - A_{k-1}^*) P_{k-1} + A_k P_k + \dots + A_{n-1} P_{n-1}.$$

Die Summe  $F_k^*$  der Fehlerquadrate setzt sich aus  $F_k$  und den folgenden Ausdrücken zusammen:

$$(A_0 - A_0^*)^2 N_0 + \dots + (A_{k-1} - A_{k-1}^*)^2 N_{k-1},$$

und da mindestens eine der Klammern nicht verschwindet, ist die Summe  $F_k^*$  kleiner als  $F_k$ .

Unter allen Ersatzfunktionen  $(k - 1)$ . Grades für  $u_x$ , bedingt das aus den Momenten  $M_0, M_1, \dots, M_{k-1}$  gebildete Polynom

$$\frac{M_0}{N_0} P_0(x) + \dots + \frac{M_{k-1}}{N_{k-1}} P_{k-1}(x)$$

die kleinste Summe der Fehlerquadrate.

