Ergänzende Note zu «Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind»

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

In der Arbeit «Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind» (52. Band, 1952, S. 153–160) bestimmten wir u. a. die Prämie der gemischten Versicherung auf ein Leben für den besondern Fall, dass die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind. Im folgenden wollen wir die Ansätze auf die gemischte Versicherung für zwei verbundene Leben ausdehnen; es wird sich dabei zeigen, dass die Lösung nicht mehr die frühere geschlossene Form aufweist, vielmehr zu einer, wenn auch sehr guten Näherung führt.

Seien x_1 und x_2 die beiden Abschlussalter; beim ersten Tod, spätestens nach n Jahren, werde die Summe «1» fällig. Die stetig zahlbar angenommene Prämie ist $\overline{P}_{x_1x_2}$. Sei ferner mit ${}_t\overline{V}_{x_1x_2} = \overline{V}(0)$, ${}_{t+1}\overline{V}_{x_1x_2} = \overline{V}(1)$, $x_1 + t = y_1$ und $x_2 + t = y_2$ bezeichnet und t ganzzahlig vorausgesetzt; dann hat die Rekursionsformel des Deckungskapitals für $h \leqslant 1$ die Form

$$\overline{V}(0)\, e^{\delta h} + \overline{P}_{x_1x_2} \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi -$$

$$- \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}\, (\mu_{y_1+\xi} + \mu_{y_2+\xi})}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi - \frac{l_{y_1+h}\, l_{y_2+h}}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, \overline{V}(h) = 0. \quad (1)$$

Im Intervall t bis $t + h$ soll die Sterbewahrscheinlichkeit linear verlaufen; also ist

$$\frac{l_{y+\xi}}{l_y} = 1 - \xi q_y \quad (2)$$

und

$$\mu_{y+\xi} = \frac{q_y}{1-\xi q_y} \tag{3}$$

mit $y = y_1$ und $y = y_2$.

Eingesetzt in (1) folgt mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \bar{s}_{\overline{h}|} &= \bar{a}_{\overline{h}|} e^{\delta h} = \int_0^h e^{\delta(h-\xi)}\, d\xi = \frac{e^{\delta h}-1}{\delta}, \\ k_h &= \int_0^h \xi\, e^{\delta(h-\xi)}\, d\xi = \frac{\bar{s}_{\overline{h}|}-h}{\delta}, \\ g_h &= \int_0^h \xi^2 e^{\delta(h-\xi)}\, d\xi = \frac{2k_h-h^2}{\delta} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

für

$$\int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi = \bar{s}_{\overline{h}|} - k_h(q_{y_1}+q_{y_2}) + g_h\, q_{y_1} q_{y_2}. \tag{5}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für

$$\int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}\,(\mu_{y_1+\xi}+\mu_{y_2+\xi})}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi = \bar{s}_{\overline{h}|}(q_{y_1}+q_{y_2}) - 2k_h\, q_{y_1} q_{y_2}. \tag{6}$$

Somit wird aus (1) unter Verwendung von (5) und (6)

$$\begin{aligned} &\overline{V}(0)\, e^{\delta h} + \overline{P}_{x_1x_2}\{\bar{a}_{\overline{h}|}\, e^{dh} - k_h(q_{y_1}+q_{y_2}) + g_h\, q_{y_1} q_{y_2}\} - \\ &\quad - \bar{s}_{\overline{h}|}(q_{y_1}+q_{y_2}) + 2k_h\, q_{y_1} q_{y_2} - (1-h\, q_{y_1})\,(1-h\, q_{y_2})\, \overline{V}(h) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Zur Auflösung von (7) setzen wir $h = 1$ und finden nach Hinzufügen von $\pm\, v k_1 \overline{P}_{x_1x_2} q_{y_1} q_{y_2}$ und $\pm\, v \bar{s}_{\overline{1}|} q_{y_1} q_{y_2}$ die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} {}_{t+1}\overline{V}_{x_1x_2} &= \frac{{}_t\overline{V}_{x_1x_2}}{v(1-q_{x_1+t})(1-q_{x_2+t})} + \frac{1}{v(1-q_{x_1+t})\,(1-q_{x_2+t})}\cdot \\ &\cdot \{\overline{P}_{x_1x_2}[\bar{a}_{\overline{1}|} - v k_1(q_{x_1+t}+q_{x_2+t}-q_{x_1+t}\, q_{x_2+t})] + \overline{P}_{x_1x_2} v(g_1-k_1)\, q_{x_1+t}\, q_{x_2+t} - \\ &\quad - v\bar{s}_{\overline{1}|}(q_{x_1+t}+q_{x_2+t}-q_{x_1+t}\, q_{x_2+t}) - v(\bar{s}_{\overline{1}|}-2k_1)\,(q_{x_1+t} q_{x_2+t})\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Aufgelöst nach den Regeln der Differenzenrechnung folgt

$$ {}_t\overline{V}_{x_1x_2} = \frac{D_{x_1x_2}}{D_{x_1+t,\, x_2+t}} \sum_0^{t-1} \frac{D_{x_1+\tau,\, x_2+\tau}}{D_{x_1x_2}} \cdot $$

$$ \cdot\{\overline{P}_{x_1x_2}[\bar{a}_{\overline{1}|} - vk_1(q_{x_1+\tau} + q_{x_2+\tau} - q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau})] + \overline{P}_{x_1x_2}\, v(g_1 - k_1)\, q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau} - $$

$$ - v\bar{s}_{\overline{1}|}(q_{x_1+\tau} + q_{x_2+\tau} - q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau}) - v(\bar{s}_{\overline{1}|} - 2k_1)\, q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau}\} . \qquad (9) $$

Weil aber

$$ C_{x_1+\tau,\, x_2+\tau} = v^{x_1+\tau+1}\, l_{x_1+\tau}\, l_{x_2+\tau}(q_{x_1+\tau} + q_{x_2+\tau} - q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau}) \qquad (10) $$

ist, wird mit $t = n$ und ${}_n\overline{V}_{x_1x_2} = 1$

$$ {}_nE_{x_1x_2} = \overline{P}_{x_1x_2}\, \bar{a}_{\overline{1}|}\, \mathfrak{a}_{x_1x_2:\overline{n}|} - \overline{P}_{x_1x_2}\, k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} + $$

$$ + \overline{P}_{x_1x_2}\, v(g_1 - k_1) \frac{1}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\, x_2+\tau}\, q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau} - $$

$$ - \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} - v(\bar{s}_{\overline{1}|} - 2k_1) \frac{1}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\, x_2+\tau}\, q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau} . \qquad (11) $$

Daraus folgt, wenn

$$ \left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{v(g_1 - k_1)}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\, x_2+\tau}\, q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau} \\ W_2 &= \frac{v(\bar{s}_{\overline{1}|} - 2k_1)}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\, x_2+\tau}\, q_{x_1+\tau}\, q_{x_2+\tau} \end{aligned} \right\} \qquad (12) $$

gesetzt wird, für

$$ \overline{P}_{x_1x_2} = \frac{{}_nE_{x_1x_2} + \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} + W_2}{\bar{a}_{\overline{1}|}\, \mathfrak{a}_{x_1x_2:\overline{n}|} - k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} + W_1} . \qquad (13) $$

Im Ergebnis (13) stören die Grössen W_1 und W_2, da sie nicht tabelliert vorliegen; sonst treten nur die üblichen *diskontinuierlichen* und daher in den Tabellen vorhandenen Grundwerte auf. Es zeigt sich aber, dass die Formel

$$ \overline{P}_{x_1x_2} = \frac{{}_nE_{x_1x_2} + \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2}}{\bar{a}_{\overline{1}|}\, \mathfrak{a}_{x_1x_2:\overline{n}|} - k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2}} \qquad (14) $$

vollkommen ausreicht zur Berechnung von $\overline{P}_{x_1x_2}$, wie das folgende Beispiel zeigt.

Verlauf von $\overline{P}_{x_1 x_2}$

S. M. 1921/30, 2¾ %, $x_1 = x_2$

$x_1 = x_2$	n	$\overline{P}_{x_1 x_2}$ nach (13)	$\overline{P}_{x_1 x_2}$ nach (14)	Abweichung
		‰	‰	‰
20	45	19,86 486	19,86 405	0,041
30	35	27,79 113	27,78 966	0,053
40	25	43,27 058	43,26 733	0,075
50	15	77,32 982	77,32 051	0,120