

# Das Zinsfussproblem der Anwartschaften

Autor(en): **Lah, Ivo**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-551234>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Das Zinsfussproblem der Anwartschaften

Von *Ivo Lah*, Ljubljana

In der Pensionsversicherung kommen bekanntlich ausser Leibrenten auch Anwartschaften auf Invaliden-, Witwen-, Waisen-, Aszendenten- und Deszendentenrenten vor. Auf die Leibrenten der Aktiven, Invaliden und der Hinterbliebenen können alle Näherungsformeln des Zinsfussproblem es genau so wie in der Lebensversicherung angewendet werden. Anders steht es mit den Anwartschaften.

Im folgenden wollen wir das Zinsfussproblem auf die Anwartschaften von konstanten Leibrenten erweitern. Dabei werden wir uns nur auf die Herleitung von Näherungsformeln der Anwartschaften der Aktiven auf konstante Invalidenrente beschränken. Unsere Ausführungen gelten selbstverständlich mutatis mutandis auch für alle anderen Anwartschaften auf konstante periodische Leistungen.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, die Invalidenrente wird am Ende des Jahres, in welchem die Invalidität eingetreten ist, flüssig und in vorschüssigen Jahresraten im Betrage 1 gezahlt. Unter dieser Voraussetzung kann der Wert der Anwartschaft eines  $x$ -jährigen Aktiven auf Invalidenrente  $A_x^i$  geschrieben werden, wie folgt:

$$A_x^i = \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} j_{x+t} a_{x+t}^i (1+i)^{-t} = \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} dj_{x+t} a_{x+t}^i. \quad (1)$$

Dabei bedeutet:

$l_x^{aa}$  = die Zahl der  $x$ -jährigen Aktiven,

$D_x^{aa} = l_x^{aa} v^x$  = die diskontierte Zahl der  $x$ -jährigen Aktiven,

$j_{x+t}$  = die Zahl der Invaliden, welche sich aus der Gesamtheit der Aktiven  $l_{x+t-1}^{aa}$  im Laufe eines Jahres rekrutiert und das Alter von  $x+t$  Jahren als Invalide erreicht haben,





Die Formel (6) bedeutet den um ein Jahr diskontierten Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf steigende Invalidenrenten in dem Sinne, dass alle Invaliden ohne Rücksicht, wann die Invalidität eingetreten ist, am Ende einzelner Jahre gleiche Leistungen bekommen. Nach (6) bekommen die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre die steigende Rente 1, 2, 3, 4, . . . , die aus dem zweiten Versicherungsjahre die steigende Rente 2, 3, 4, 5 . . . , die aus dem dritten Versicherungsjahre die steigende Rente 3, 4, 5, 6 . . . , usw. Nach den Bestimmungen der Pensionsversicherungsgesetze wird dagegen die Höhe der Invalidenrente mit Rücksicht auf die bis zum Eintritte der Invalidität verflossene Versicherungszeit bemessen, und zwar im gleichbleibenden Betrage. Die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 1, die aus dem zweiten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 2, die aus dem dritten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 3 usw.

Diejenigen Formeln des Zinsfussproblemcs, welche weder Ableitungen nach dem Zinsfusse noch die steigenden Renten bzw. die zweiten, dritten usw. Summen der diskontierten Zahlen enthalten, können infolge (5) auch auf die Anwartschaften angewendet werden. Einige solche, für die Versicherungspraxis wichtige Formeln, wollen wir nun kurz erwähnen.

Aus drei Barwerten der konstanten, nachschüssigen Leibrente  ${}^0a = a_x(i_0)$ ,  $a = a_x(i)$ ,  ${}^1a = a_x(i_1)$  können wir den Wert der Poukka-schen Funktion

$$k_1 = k_1(x+1, i) = \frac{S_{x+1}^{(2)} N_{x+1}}{S_{x+1}^2}. \quad (7)$$

näherungsweise berechnen <sup>1)</sup>. Zu diesem Zwecke bilden wir aus  ${}^0a$  und  ${}^1a$  das arithmetische Mittel

$$A = \frac{{}^0a(i_1 - i) + {}^1a(i - i_0)}{i_1 - i_0} \quad (8)$$

und das harmonische Mittel

$$H = \frac{{}^0a {}^1a (i_1 - i_0)}{{}^0a(i - i_0) + {}^1a(i_1 - i)}. \quad (9)$$

---

<sup>1)</sup> «Noch einige praktische Interpolationsformeln des Zinsfussproblems von hoher Präzision», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 52. Band, Heft 2, 15. Oktober 1952, Seiten 161–172.

Es ist

$$k_1 \sim \frac{A - a}{A - H}. \quad (10)$$

Sind die Zinsfüsse  $i_0 < i < i_1$  equidistant, dann bekommen wir aus (10)

$$k_1 \sim \frac{({}^0a - a + {}^1a)^2 - a^2}{({}^0a - {}^1a)^2}. \quad (11)$$

Haben wir einmal den Wert von  $k_1$ , dann können wir mittels linearen Kombination

$$a \sim A(1 - k_1) + Hk_1 \quad (12)$$

vorzügliche Näherungswerte von  $a$  interpolieren.

Dieses Verfahren ist auf alle Anwartschaften auf konstante Renten anwendbar. Dazu brauchen wir in den Formeln (8) bis (12) die Rentenbarwerte  ${}^0a, a, {}^1a$  mit den entsprechenden Werten der Anwartschaften  ${}^0A, A, {}^1A$  zu vertauschen. So z. B. bekommen wir vorzügliche Näherungswerte der Poukkaschen Funktion aus der Formel

$$k_1 = \frac{({}^0A - A + {}^1A)^2 - A^2}{({}^0A - {}^1A)^2}, \quad (13)$$

insofern die Anwartschaften auf konstante periodische Leistungen  ${}^0A, A, {}^1A$  den equidistanten Zinsfüssen  $i_0 < i < i_1$  entsprechen usw. Ähnliche einfache Näherungsformeln existieren auch für andere Mittelwerte so z. B. für das geometrische und für das antiharmonische Mittel.

Mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung, welche für die Zinsfüsse  $i = 0\%, 1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%, 6\%$  aufgestellt sind, haben wir nach (13) die Näherungswerte von  $k_1(x, i)$  für  $i = 1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%$ , für  $x = 16, 21, \dots, 56, 61$ , für die Anwartschaften der Aktiven auf Invaliden-, Witwen-, Waisenrenten bis zum vollendeten 18. Lebensjahre und für die Anwartschaften der Invaliden auf Witwen- und Waisenrenten berechnet allerdings mit einer Abweichung. Nach jugoslawischen als auch nach den meisten anderen Pensionsversicherungsgesetzen werden die Renten nicht in Jahres-, sondern in Monatsraten gezahlt, beginnend unmittelbar nach der Feststellung der Invalidität bzw. unmittelbar nach dem Tode des Versicherten, also nicht erst am Ende des Jahres, in welchem das versicherte Ereignis eingetreten ist. Der Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf Invalidenrente wird also in der Praxis nicht nach (1),

sondern nach folgender Formel berechnet:

$$A_x^i = \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{t=0}^{\omega-x} dj_{x+0.5+t} a_{x+0.5+t}^{i(12)} \quad (14)$$

Es ist bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} a_x^{(12)} &= a_x - \delta \\ \delta &= \frac{1+i}{12} \sum_{n=1}^{11} \frac{n}{12+ni} \sim 0.46. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Grösse  $\delta$  ist also auch eine Funktion des Zinsfusses  $i$ . Die Berücksichtigung dieser Tatsache bei Bildung der Ableitungen der Anwartschaften kompliziert aber ungemein die Formeln und die Berechnungen. Nachdem der Unterschied zwischen  $a_x$  und  $a_x^{(12)}$  mit Ausnahme der höchsten Alter relativ nicht gross ist, haben wir einfach die nach (14) und analogen Formeln berechneten Werte der Anwartschaften in (13) eingesetzt. Auf diese Art gefundene Werte von  $k_1(x, i)$  sind in der Tabelle 1 im Anhang gegeben, und zwar nur bis  $x = 61$ . In höheren Altern ist die Differenz  $a_x - a_x^{(12)}$  relativ gross, was grössere Unregelmässigkeiten in der Serie der  $k_1$ -Werte zur Folge hat.

Trotz der Abweichung der Formel (14) von der Formel (1) ist die Variabilität der Grösse  $k_1$  bis  $x = 61$  nicht gross. Infolgedessen können die in der Tabelle 1 gegebenen Werte von  $k_1$  auch auf die Anwartschaften anderer Rechnungsgrundlagen mit Vorteil angewendet werden.

Meistens sind die Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherung nur zu einem einzigen Zinsfusse  $i_0$  berechnet. In solchen Fällen reichen die Grössen  $k_1$  in der Tabelle 1 nicht aus. Die Güttingersche Näherungsformel für Rentenbarwerte lautet bekanntlich <sup>1)</sup>

$$a \sim {}^0a \left[ 1 + (2k_1 - 1) (i - i_0) v_0 \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{\frac{1}{1-2k_1}} \quad (16)$$

In (16) haben wir aber die zweite Summe der diskontierten Zahlen  ${}^0S_{x+1}$ . Wir können diese Grösse mittels

$$k_0 = k_0(x+1, i) = \frac{S_{x+1} D_{x+1}}{N_{x+1}^2} \quad (17)$$

<sup>1)</sup> Güttinger, Paul: «Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 30. Heft, Oktober 1935.

eliminieren und nachher aus  ${}^0a$  und  ${}^1a$  nach der Formel (16) den Wert von  $k_0$  näherungsweise berechnen. Die Variabilität von  $k_0$  ist aber bedeutend grösser als die Variabilität von  $k_1$ . Die Rechnung vereinfacht sich, wenn wir schlechtweg setzen

$$A \sim {}^0A [1 + g(i - i_0)]^{\frac{1}{1-2k_1}}. \quad (18)$$

Aus (18) folgt für  $i = i_1$

$$g \sim \frac{\left(\frac{{}^0A}{{}^1A}\right)^{2k_1-1} - 1}{i_1 - i_0}. \quad (19)$$

Die mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung nach (19) berechneten Werte von  $g$  sind in der Tabelle 2 im Anhang gegeben. Auch die Variabilität von  $g(x, i)$  ist bis  $x = 61$  nicht gross. Daraus schliessen wir, dass die Werte von  $g$  auch auf die Anwartschaften anderer Rechnungsgrundlagen mit Vorteil angewendet werden können, wenigstens bei kleineren Zinsspannungen  $i - i_0$ . Wir bemerken noch, dass bei  $i_0 < i$  die Präzision von (18) grösser ist als bei  $i_0 > i$ .



## Anhang

Tabelle 1

Die Werte von  $k_1(x, i)$ , berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung nach der Formel (13)

$x \backslash i$	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	$i \backslash x$
Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente $A_x^i$						
16	0.58	0.58	0.58	0.59	0.60	16
21	0.58	0.59	0.59	0.60	0.61	21
26	0.59	0.59	0.60	0.60	0.61	26
31	0.59	0.60	0.60	0.61	0.62	31
36	0.60	0.60	0.61	0.62	0.62	36
41	0.61	0.61	0.62	0.63	0.63	41
46	0.63	0.63	0.64	0.64	0.65	46
51	0.64	0.65	0.65	0.66	0.66	51
56	0.67	0.68	0.68	0.69	0.69	56
61	0.71	0.71	0.72	0.72	0.72	61
Anwartschaften der Aktiven auf Witwenrente $A_x^w$						
16	0.58	0.58	0.58	0.59	0.59	16
21	0.58	0.59	0.59	0.59	0.60	21
26	0.59	0.59	0.60	0.60	0.61	26
31	0.59	0.59	0.60	0.60	0.61	31
36	0.59	0.60	0.60	0.61	0.62	36
41	0.60	0.60	0.61	0.61	0.63	41
46	0.60	0.61	0.61	0.62	0.65	46
51	0.61	0.62	0.62	0.63	0.67	51
56	0.63	0.63	0.63	0.64	0.70	56
61	0.64	0.64	0.65	0.65	0.65	61

$\begin{matrix} i \\ x \end{matrix}$	1%	2%	3%	4%	5%	$\begin{matrix} i \\ x \end{matrix}$
Anwartschaften der Aktiven auf Waisenrente ${}^{18}A_x^k$						
16	0.60	0.58	0.58	0.58	0.59	16
21	0.62	0.60	0.60	0.60	0.61	21
26	0.64	0.62	0.62	0.63	0.63	26
31	0.66	0.63	0.64	0.64	0.65	31
36	0.69	0.65	0.66	0.66	0.66	36
41	0.72	0.66	0.67	0.68	0.68	41
46	0.75	0.68	0.68	0.69	0.69	46
51	0.79	0.68	0.69	0.69	0.70	51
56	0.83	0.69	0.70	0.70	0.70	56
61	0.90	0.69	0.68	0.69	0.70	61
Anwartschaften der Invaliden auf Witwenrente $A_x^w$						
16	0.61	0.62	0.63	0.63	0.63	16
21	0.64	0.64	0.65	0.66	0.66	21
26	0.65	0.66	0.67	0.68	0.68	26
31	0.65	0.66	0.67	0.68	0.68	31
36	0.65	0.66	0.67	0.68	0.68	36
41	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	41
46	0.64	0.65	0.66	0.67	0.69	46
51	0.65	0.66	0.67	0.67	0.73	51
56	0.65	0.66	0.67	0.67	0.80	56
61	0.66	0.67	0.67	0.68	0.71	61
Anwartschaften der Invaliden auf Waisenrente ${}^{18}A_x^k$						
16	0.64	0.59	0.59	0.60	0.60	16
21	0.69	0.63	0.63	0.64	0.64	21
26	0.74	0.67	0.67	0.67	0.67	26
31	0.77	0.69	0.69	0.70	0.70	31
36	0.80	0.71	0.71	0.71	0.72	36
41	0.82	0.72	0.73	0.73	0.74	41
46	0.85	0.73	0.74	0.74	0.75	46
51	0.89	0.75	0.76	0.76	0.77	51
56	0.92	0.75	0.76	0.76	0.77	56
61	0.97	0.72	0.73	0.73	0.75	61

Tabelle 2

Die Werte von  $g(x, i)$ , berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung nach der Formel (19)

$x \backslash i$	1%	2%	3%	4%	5%	$i \backslash x$
Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente $A_x^i$						
16	6.6	6.6	6.7	6.8	6.8	16
21	6.2	6.3	6.4	6.6	6.7	21
26	5.9	5.9	6.1	6.2	6.3	26
31	5.5	5.6	5.6	5.7	5.8	31
36	5.2	5.2	5.2	5.3	5.3	36
41	4.9	4.9	4.9	4.9	4.9	41
46	4.7	4.7	4.7	4.7	4.6	46
51	4.5	4.4	4.4	4.4	4.3	51
56	4.4	4.3	4.2	4.2	4.1	56
61	4.2	4.1	4.1	4.0	3.9	61
Anwartschaften der Aktiven auf Witwenrente $A_x^w$						
16	8.3	8.1	7.9	7.7	7.6	16
21	7.8	7.7	7.7	7.6	7.5	21
26	7.3	7.2	7.3	7.3	7.4	26
31	6.7	6.8	6.8	6.8	7.0	31
36	6.3	6.3	6.3	6.3	6.6	36
41	6.0	5.9	5.9	5.9	6.4	41
46	5.7	5.7	5.7	5.7	6.5	46
51	5.4	5.4	5.3	5.3	6.7	51
56	5.3	5.2	5.1	5.0	6.9	56
61	5.1	5.0	4.9	4.8	4.6	61

$\begin{matrix} i \\ \backslash \\ x \end{matrix}$	1%	2%	3%	4%	5%	$\begin{matrix} i \\ / \\ x \end{matrix}$
Anwartschaften der Aktiven auf Waisenrente ${}^{18}A_x^k$						
16	7.3	5.8	5.7	5.4	5.2	16
21	7.5	6.0	5.9	5.7	5.5	21
26	7.8	6.2	6.1	5.8	5.7	26
31	7.9	6.1	6.0	5.8	5.7	31
36	8.0	5.9	5.9	5.7	5.5	36
41	8.2	5.6	5.8	5.5	5.4	41
46	8.3	5.5	5.4	5.3	5.1	46
51	8.7	5.2	5.2	5.0	4.9	51
56	9.1	4.9	4.8	4.7	4.5	56
61	10.1	4.6	4.1	4.1	4.1	61
Anwartschaften der Invaliden auf Witwenrente $A_x^w$						
16	8.9	8.6	8.5	8.1	7.2	16
21	9.2	9.1	9.0	8.8	7.9	21
26	9.1	9.1	9.0	8.9	7.9	26
31	8.6	8.6	8.5	8.4	7.7	31
36	7.9	7.9	7.9	7.8	7.2	36
41	7.3	7.2	7.2	7.1	6.9	41
46	6.7	6.7	6.7	6.6	6.9	46
51	6.3	6.3	6.2	6.2	7.2	51
56	5.9	5.8	5.7	5.6	9.1	56
61	5.5	5.4	5.3	5.2	5.7	61
Anwartschaften der Invaliden auf Waisenrente ${}^{18}A_x^k$						
16	7.1	4.6	4.4	4.3	4.1	16
21	8.0	5.2	5.0	4.8	4.7	21
26	8.3	5.4	5.2	5.0	4.8	26
31	8.3	5.4	5.2	5.0	4.8	31
36	8.3	5.4	5.3	5.0	4.9	36
41	8.3	5.4	5.3	5.0	4.9	41
46	8.6	5.3	5.3	5.0	4.9	46
51	9.1	5.3	5.3	5.0	5.0	51
56	9.6	5.2	5.2	4.9	4.8	56
61	10.5	4.7	4.6	4.5	4.3	61