Ein Verfahren zur Bestimmung der Rendite von festverzinslichen Anleihen

Ein Verfahren zur Bestimmung der Rendite von festverzinslichen Anleihen

Von *E. Zwinggi*, Basel

Die Bewertung der festverzinslichen Anleihen (Wertpapiere) zu «mathematischen Kursen» kann von zwei Voraussetzungen ausgehen. Beim *ersten* Verfahren (Renditemethode) ist der Bewertungszinsfuss vorgeschrieben; aus dem Tilgungsplan, den Zinsterminen und der nominellen Verzinsung sind die jeweiligen mathematischen Werte (Kurse) auf Grund des gegebenen Bewertungszinsfusses ohne jede Schwierigkeit berechenbar. Beim *zweiten* Vorgehen (Anschaffungswertmethode) ist der Anschaffungswert (Kurs) als bekannt anzunehmen. Aus diesem Wert, ferner aus dem Tilgungsplan, den Zinsterminen und der nominellen Verzinsung ist zuerst die Rendite (effektive Verzinsung) zu bestimmen; sobald diese berechnet ist, lassen sich die jeweiligen mathematischen Werte ebenfalls leicht ermitteln. Das Hauptproblem beim zweiten Verfahren besteht somit in der *Berechnung der effektiven Verzinsung*.

Wir wollen im folgenden ein Verfahren entwickeln, das mit verhältnismässig geringem Rechenaufwand die effektive Verzinsung von festverzinslichen Anleihen zu bestimmen erlaubt; dabei wollen wir möglichst allgemeine Annahmen über Tilgungsplan, Zinstermine und Laufzeit treffen. Allerdings scheint es dabei einfacher, einige Typen herauszugreifen und unabhängig für sich durchzurechnen, statt allgemein den umfassendsten Fall anzusetzen. Es ist dann ohne weiteres möglich, die verschiedenen Typen miteinander zu kombinieren.

Die Lösung der gestellten Aufgabe ist sinnvoll, auch wenn die Bewertung auf das erste Verfahren gestellt ist. Der Gläubiger will nicht nur die mathematischen Kurse kennen, zu denen er bilanzieren muss, sondern er möchte auch wissen, wie die Anleihen sich effektiv verzinsen.

1. Typus A

Kennzeichen: Keine vorzeitige Kapitalrückzahlung (Tilgung), künftige Laufzeit ganzzahlig, Zinszahlung unterjährig, nomineller Zinssatz zeitlich konstant.

Wir bezeichnen mit

n: ganzzahlige künftige Laufzeit;

R_n: Rückzahlungswert der Kapitaleinheit;

i_0: nomineller Zinssatz (zeitlich konstant);

i: effektiver Zinssatz (zu bestimmen);

m: Anzahl Raten der Zinszahlung;

K_0: gegebener Anschaffungswert der Kapitaleinheit;

$$v_0 = \frac{1}{1+i_0};$$

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Für die Kapitaleinheit gilt der Ansatz

$$K_0 = R_n v^n + i_0 \, {}^{(m)}a_{\overline{n}|}. \tag{1}$$

Zur Bestimmung von i aus (1) stehen zwei Wege offen:

a) Der Barwert ${}^{(m)}a_{\overline{n}|}$ wird durch eine der bekannten Näherungen ersetzt, z. B. ${}^{(m)}a_{\overline{n}|} \sim a_{\overline{n}|} + \frac{(m-1)(1-v^n)}{2m}$;

b) der Barwert ${}^{(m)}a_{\overline{n}|}$ wird genau ausgewertet.

a) Näherungslösung

Mit ${}^{(m)}a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{(m-1)(1-v^n)}{2m}$ und $a_{\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n+1}|} - 1$ kann (1) geschrieben werden als

$$K_0 = \left(R_n - \frac{(m-1)\,i_0}{2m}\right) v^n + i_0\, \mathrm{a}_{\overline{n+1}|} - \frac{(m+1)\,i_0}{2m}. \tag{2}$$

Aus (2) ist i zu bestimmen. Die Lösung gestaltet sich einfach, wenn wir

$$v = (1 + \varepsilon)\, v_0 \tag{3}$$

setzen und vorerst nach ε auflösen. Wenn noch

$$R = R_n - \frac{(m-1)\, i_0}{2m} \tag{4}$$

bedeutet, erhalten wir aus $R v^n = R(1+\varepsilon)^n v_0^n$ bei Entwicklung von $(1+\varepsilon)^n$ in die Binomialreihe mit

$$\left.\begin{aligned} m_0' &= v_0^n, \\ m_1' &= n\, v_0^n, \\ m_2' &= (n^2 - n)\, v_0^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

die Reihe

$$R v^n = R\left(m_0' + \varepsilon m_1' + \varepsilon^2 \frac{m_2'}{2!} + \ldots\right). \tag{6}$$

Wird weiter (3) in $a_{\overline{n+1|}}$ eingeführt, so folgt für $i_0\, a_{\overline{n+1|}}$ mit

$$\left.\begin{aligned} m_0'' &= a_{\overline{n+1|}}(i_0), \\ m_1'' &= \frac{a_{\overline{n+1|}}(i_0) - (n+1)\, v_0^{n+1}}{1 - v_0}, \\ m_2'' &= \frac{2 m_1''}{i_0} - \frac{n(n+1)\, v_0^{n+1}}{1 - v_0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

die Darstellung [1])

$$i_0\, a_{\overline{n+1|}} = i_0\left(m_0'' + \varepsilon\, m_1'' + \varepsilon^2 \frac{m_2''}{2!} + \ldots\right). \tag{8}$$

---

[1]) Es ist überflüssig, die Ableitung hier zu wiederholen. Man hat in den Formeln (25), (26) und (27) der Abhandlung «Un procedimento per determinare il saggio d'interesse di rendite vitalizie e rendite certe» bloss n durch $n + 1$ zu ersetzen.

Weil $K_0 = (2) = (6) + (8) - \frac{(m+1)\,i_0}{2m}$ ist, folgt mit

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= R\,m_0' + i_0\,m_0'' - \frac{(m+1)\,i_0}{2m}, \\ M_1 &= R\,m_1' + i_0\,m_1'', \\ M_2 &= R\,m_2' + i_0\,m_2'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

die Reihe

$$K_0 = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 \frac{M_2}{2!} + \ldots =$$

$$= M_0 + \varepsilon M_1 \left(1 + \frac{\varepsilon M_2}{2 M_1} + \ldots\right) \sim$$

$$\sim M_0 + \frac{\varepsilon M_1}{1 - \frac{\varepsilon M_2}{2 M_1}}. \tag{10}$$

Sei

$$\varDelta = K_0 - M_0; \tag{11}$$

dann ist aus (10)

$$\varepsilon = \frac{2\varDelta \cdot M_1}{\varDelta \cdot M_2 + 2 M_1^2}, \tag{12}$$

und aus (3)

$$i = \frac{1 + i_0}{1 + \varepsilon} - 1. \tag{13}$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst; die Berechnung der m_0', m_1' und m_2' aus (5), der m_0'', m_1'' und m_2'' aus (7) und schliesslich der M_0, M_1 und M_2 aus (9) ist sehr einfach.

Spezialfall: $R_n = 1$ (Rückzahlung zu pari) und $m = 1$ (jährliche Verzinsung). Man rechnet aus (4), (5), (7), (9) und (11) leicht nach, dass gilt

$$\left.\begin{aligned} R &= 1, \\ M_0 &= 1, \\ M_1 &= a_{\overline{n}|}(i_0), \\ M_2 &= \frac{2}{i_0}\left(M_1 - n\,v_0^{n-1}\right), \\ \varDelta &= K_0 - 1. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

b) Genaue Lösung

Gleichung (1) lässt sich schreiben als

$$K_0 = R_n v^n + i_0 \left({}^{(m)}a_{\overline{n}|} - \frac{1}{m} + \frac{v^n}{m} \right) = \left(R_n + \frac{i_0}{m} \right) v^n + i_0 \, {}^{(m)}a_{\overline{n}|} - \frac{i_0}{m}. \tag{15}$$

Wir setzen

$$\overline{R} = R_n + \frac{i_0}{m}, \tag{16}$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} v &= (1+\varepsilon)\, v_0, \\ (1+\varepsilon)^{1/m} &= 1 + \varepsilon_m, \\ v^{1/m} &= \overline{v} = (1+\varepsilon_m)\, v_0^{1/m} = (1+\varepsilon_m)\, \overline{v}_0, \\ \overline{v}_0 &= \frac{1}{1+\overline{i}_0}, \\ \overline{v} &= \frac{1}{1+\overline{i}}, \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

und erhalten für

$$\overline{R}\, v^n = \overline{R}\, (1+\varepsilon_m)^{nm}\, v_0^n,$$

und nach Entwicklung in die Binomialreihe mit

$$\left. \begin{aligned} \overline{m}'_0 &= v_0^n, \\ \overline{m}'_1 &= n m\, v_0^n, \\ \overline{m}'_2 &= (n^2 m^2 - n m)\, v_0^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

die Beziehung

$$\overline{R}\, v^n = \overline{R} \left(\overline{m}'_0 + \varepsilon\, \overline{m}'_1 + \varepsilon^2 \frac{\overline{m}'_2}{2!} + \ldots \right). \tag{19}$$

Das zweite Glied in (15) formen wir folgendermassen um. Es ist, unter Beifügung des Zinssatzes zu den Symbolen,

$$\begin{aligned} i_0 \, {}^{(m)}a_{\overline{n}|} &= i_0 \, {}^{(m)}a_{\overline{n}|}(i) = \frac{i_0}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} v^{t/m} = \frac{i_0}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} \overline{v}^t = \frac{i_0}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} (1+\varepsilon_m)^t\, \overline{v}_0^t = \\ &= \frac{i_0}{m}\, a_{\overline{nm}|}(\overline{i}) = \frac{i_0}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} \left(1 + \binom{t}{1} \varepsilon_m + \binom{t}{2} \varepsilon_m^2 + \ldots \right) \overline{v}_0^t = \\ &= \frac{i_0}{m} \left(\overline{m}''_0 + \varepsilon_m\, \overline{m}''_1 + \varepsilon_m^2 \frac{\overline{m}''_2}{2!} + \ldots \right), \end{aligned} \tag{20}$$

wobei [entsprechend (7)] gelten

$$\left.\begin{aligned}
\overline{m}''_0 &= a_{\overline{nm}|}(\overline{i}_0) = \frac{1-\overline{v}_0^{nm}}{1-\overline{v}_0}, \\
\overline{m}''_1 &= \frac{a_{\overline{nm}|}(\overline{i}_0) - nm\,\overline{v}_0^{nm}}{1-\overline{v}_0}, \\
\overline{m}''_2 &= \frac{2\,\overline{m}''_1}{\overline{i}_0} - \frac{nm\,(nm-1)\,\overline{v}_0^{nm}}{1-\overline{v}_0}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Es ist aber $K_0 = (15) = (19) + (20) - \frac{i_0}{m}$. Bezeichnen wir mit

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_0 &= \overline{R}\,\overline{m}'_0 + \frac{i_0\,(\overline{m}''_0 - 1)}{m}, \\
\overline{M}_1 &= \overline{R}\,\overline{m}'_1 + \frac{i_0\,\overline{m}''_1}{m}, \\
\overline{M}_2 &= \overline{R}\,\overline{m}'_2 + \frac{i_0\,\overline{m}''_2}{m}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

so wird

$$K_0 = \overline{M}_0 + \varepsilon_m \overline{M}_1 + \varepsilon_m^2 \frac{\overline{M}_2}{2!} + \ldots \sim$$

$$\sim \overline{M}_0 + \frac{\varepsilon_m \overline{M}_1}{1 - \frac{\varepsilon_m \overline{M}_2}{2\,\overline{M}_1}},$$

woraus mit

$$\overline{\Delta} = K_0 - \overline{M}_0 \tag{23}$$

schliesslich

$$\varepsilon_m = \frac{2\,\overline{\Delta}\cdot\overline{M}_1}{\overline{\Delta}\cdot\overline{M}_2 + 2\,\overline{M}_1^2}. \tag{24}$$

Ist ε_m bestimmt, so folgt aus (17) für

$$\varepsilon = (1+\varepsilon_m)^m - 1, \tag{25}$$

und

$$i = \frac{1+i_0}{1+\varepsilon} - 1. \tag{26}$$

Der Spezialfall $R_n = 1$ und $m = 1$ führt auf die frühern Beziehungen (14).

Beispiel zu Typus A für Genauigkeit des Verfahrens

Annahmen: Laufzeit $n = 20$ oder $n = 30$; Rückzahlungskurs $R_n = 1$; nominelle Verzinsung $i_0 = 3\,\%$; Anschaffungswert K_0 so festgesetzt, dass die effektive Verzinsung i genau 2 % oder 2,5 % oder 3,5 % oder 4 %.

a) Jährliche Zinszahlung

i genau %	$n = 20$		$n = 30$	
	K_0	i genähert %	K_0	i genähert %
2,0	1,1635	2,0023	1,2240	2,0044
2,5	1,0779	2,5003	1,1047	2,5005
3,5	0,9289	3,4997	0,9080	3,4995
4,0	0,8641	3,9977	0,8271	3,9958

b) Halbjährliche Zinszahlung

i genau %	$n = 20$			$n = 30$	
	K_0 *)	i genähert nach (a)	i genähert nach (b)	K_0	i genähert nach (a)
2,0	1,1660	2,0023	2,0023	1,2273	2,0044
2,5	1,0809	2,5003	2,5003	1,1086	2,5005
3,5	0,9327	3,4997	3,4997	0,9129	3,4995
4,0	0,8682	3,9978	3,9978	0,8323	3,9958

*) Weil die Genauigkeit der beiden Verfahren zu prüfen ist, müssen je nach dem Vorgehen [Näherung für ${}^{(m)}a_{\overline{n}|}$ oder genaue Auswertung] zwei verschiedene K_0 vorausgesetzt werden. In der angegebenen Stellenzahl unterscheiden sich jedoch die beiden Werte infolge Rundung höchstens um 0,0001.

2. Typus B

Kennzeichen: Keine vorzeitige Kapitalrückzahlung (Tilgung), künftige Laufzeit gebrochene Anzahl Jahre, Zinszahlung jährlich (der Ansatz wäre ohne weiteres auf unterjährige Zinszahlung ausdehnbar), nomineller Zinssatz zeitlich konstant.

Wir bezeichnen mit

$n-h$: künftige Laufzeit, wobei n ganzzahlig, $0 < h < 1$;
R_n: Rückzahlungswert der Kapitaleinheit;
i_0: nomineller Zinssatz (zeitlich konstant);
i: effektiver Zinssatz (zu bestimmen);
K_0: gegebener Anschaffungswert der Kapitaleinheit.

Für die Kapitaleinheit gilt die Beziehung

$$K_0 = R_n v^{n-h} + i_0 v^{-h} a_{\overline{n}|} = R_n v^{n-h} - i_0 v^{-h} + i_0 v^{-h} \mathsf{a}_{\overline{n+1}|}. \tag{27}$$

Die gliedweise Umformung mit den gleichen Ansätzen wie bei Typus A führt auf

$$R_n v^{n-h} = R_n \left(m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 \frac{m_2}{2!} + \dots \right) \tag{28}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= v_0^{n-h}, \\ m_1 &= (n-h)\, v_0^{n-h}, \\ m_2 &= (n-h)(n-h-1)\, v_0^{n-h}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ferner auf

$$i_0 v^{-h} = i_0 \left(m_0' + \varepsilon m_1' + \varepsilon^2 \frac{m_2'}{2!} + \dots \right) \tag{30}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} m_0' &= v_0^{-h}, \\ m_1' &= -h\, v_0^{-h}, \\ m_2' &= (h^2 + h)\, v_0^{-h}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

sodann auf

$$i_0 v^{-h} \mathsf{a}_{\overline{n+1}|} = i_0 \left(m_0' + \varepsilon m_1' + \varepsilon^2 \frac{m_2'}{2!} + \dots \right) \left(m_0'' + \varepsilon m_1'' + \varepsilon^2 \frac{m_2''}{2!} + \dots \right) \tag{32}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} m_0'' &= \mathsf{a}_{\overline{n+1}|}(i_0), \\ m_1'' &= \frac{a_{\overline{n+1}|}(i_0) - (n+1)\, v_0^{n+1}}{1 - v_0}, \\ m_2'' &= \frac{2 m_1''}{i_0} - \frac{n(n+1)\, v_0^{n+1}}{1 - v_0}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

und schliesslich bei Ausmultiplizieren in (32) auf

$$i_0\left(m_0''' + \varepsilon m_1''' + \varepsilon^2 \frac{m_2'''}{2!} + \ldots\right) \tag{34}$$

mit

$$\left.\begin{array}{l} m_0''' = m_0' m_0'', \\ m_1''' = m_0' m_1'' + m_1' m_0'', \\ m_2''' = m_0' m_2'' + 2 m_1' m_1'' + m_2' m_0'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{35}$$

Weil $K_0 = (28) - (30) + (34)$ ist, kann man schreiben

$$K_0 = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 \frac{M_2}{2!} + \ldots \tag{36}$$

mit

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = R_n m_0 - i_0 (m_0' - m_0'''), \\ M_1 = R_n m_1 - i_0 (m_1' - m_1'''), \\ M_2 = R_n m_2 - i_0 (m_2' - m_2'''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{37}$$

Endlich folgt mit

$$\varDelta = K_0 - M_0 \tag{38}$$

wie früher

$$\varepsilon = \frac{2\varDelta \cdot M_1}{\varDelta \cdot M_2 + 2M_1^2}. \tag{39}$$

Beispiel zu Typus B für Genauigkeit des Verfahrens

Annahmen: Laufzeit: $n = 20$, $h = \frac{1}{2}$; Rückzahlungskurs $R_n = 1$; nominelle Verzinsung $i_0 = 3\,\%$; Anschaffungswert K_0, so festgesetzt, dass die effektive Verzinsung i genau $2\,\%$ oder $2{,}5\,\%$ oder $3{,}5\,\%$ oder $4\,\%$.

i genau %	K_0	i genähert %
2,0	1,1751	2,0022
2,5	1,0913	2,5003
3,5	0,9451	3,4997
4,0	0,8812	3,9978

3. Typus C

Kennzeichen: Vorzeitige Kapitalrückzahlungen (Tilgung), künftige Laufzeit ganzzahlig, Zinszahlung jährlich und zeitlich variabel.

Wir benennen mit

n: ganzzahlige künftige Laufzeit;

T_t: Nominalbetrag der jährlichen Kapitalrückzahlung (jährliche, nachschüssige Tilgungsquote);

R_t: Rückzahlungswert der Kapitaleinheit;

i_t: nomineller Zinssatz (i_t bezieht sich auf das Zinsjahr $t-1$ bis t);

i: effektiver Zinssatz (zu bestimmen);

K_0: gegebener Anschaffungswert der Kapitaleinheit.

Die Anfangsschuld sei «1». Dann ist die Restschuld (nach Zahlung der Tilgungsquote) im Zeitpunkt t dargestellt durch

$$U_t = 1 - \sum_{\lambda=1}^{t} T_\lambda . \tag{40}$$

Für die Bestimmung des effektiven Zinssatzes gilt die Relation

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} v^t (R_t T_t + i_t U_{t-1}) . \tag{41}$$

Wir setzen wiederum $v = (1+\varepsilon) v_0$ und erhalten aus (41), wenn noch

$$\alpha(t) = v_0^t (R_t T_t + i_t U_{t-1}) \tag{42}$$

bezeichnet,

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} (1+\varepsilon)^t \alpha(t) = \sum_{t=1}^{n} \alpha(t) + \varepsilon \sum_{t=1}^{n} \binom{t}{1} \alpha(t) + \varepsilon^2 \sum_{t=1}^{n} \binom{t}{2} \alpha(t) + \ldots . \tag{43}$$

Ähnlich den Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden N_x, S_x, $S_x^{(2)}$, ..., gelten, wenn allgemein

$$\Phi_t^{(0)} = \sum_{\lambda=t}^{n} \alpha(\lambda) ,$$

$$\Phi_t^{(1)} = \sum_{\lambda=t}^{n} \Phi_\lambda^{(0)} ,$$

$$\Phi_t^{(2)} = \sum_{\lambda=t}^{n} \Phi_\lambda^{(1)} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

bedeutet, die Darstellung

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} \alpha(t) &= \Phi_1^{(0)},\\
\sum_{t=1}^{n} \binom{t}{1} \alpha(t) &= \sum_{t=1}^{n} \Phi_t^{(0)} = \Phi_1^{(1)},\\
\sum_{t=1}^{n} \binom{t}{2} \alpha(t) &= \Phi_1^{(2)} - \Phi_1^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Damit folgt aus (43), wenn noch

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \Phi_1^{(0)},\\
M_1 &= \Phi_1^{(1)},\\
M_2 &= 2(\Phi_1^{(2)} - \Phi_1^{(1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

für

$$K_0 = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 \frac{M_2}{2!} + \ldots,$$

woraus mit

$$\Delta = K_0 - M_0 \tag{46}$$

gleichlaufend wie bei Typus A

$$\varepsilon = \frac{2\Delta \cdot M_1}{\Delta \cdot M_2 + 2M_1^2} \tag{47}$$

und

$$i = \frac{1 + i_0}{1 + \varepsilon} - 1. \tag{48}$$

Beispiel für das rechnerische Vorgehen bei Typus C

Annahmen: Laufzeit $n = 5$; Tilgungsquote $T_t = 0{,}2$ (jährlich gleichbleibend); Rückzahlungskurse R_t von 1,000 jährlich um 0,005 auf 1,020 steigend; nominelle Verzinsung $i_t = 3\,\%$; Anschaffungswert $K_0 = 1{,}03\,789$ (entspricht genau einer effektiven Verzinsung $i = 2\,\%$).

t	Tilgungsplan					Für Berechnung von i nötig			
	T_t	U_t	$i_t\,U_{t-1}$	R_t	$R_t\,T_t$	$R_t\,T_t + i_t\,U_{t-1}$	$\alpha(t)$	$\Phi_t^{(0)}$	$\Phi_t^{(1)}$
0		1,0							
1	0,2	0,8	0,030	1,000	0,200	0,230	0,22 330	1,00 888	2,92 128
2	0,2	0,6	0,024	1,005	0,201	0,225	0,21 208	0,78 558	1,91 240
3	0,2	0,4	0,018	1,010	0,202	0,220	0,20 133	0,57 350	1,12 682
4	0,2	0,2	0,012	1,015	0,203	0,215	0,19 102	0,37 217	0,55 332
5	0,2	0,0	0,006	1,020	0,204	0,210	0,18 115	0,18 115	0,18 115
								$\Phi_1^{(2)} =$	6,69 497

$K_0 = 1{,}03\,789$ (gegeben), $\quad \Phi_1^{(2)} = 6{,}69\,497,$

$M_0 = \Phi_1^{(0)} = 1{,}00\,888, \quad M_2 = 2(\Phi_1^{(2)} - \Phi_1^{(1)}) = 7{,}54\,738,$

$M_1 = \Phi_1^{(1)} = 2{,}92\,128, \quad \Delta = K_0 - M_0 = 0{,}02\,901,$

$$\varepsilon = \frac{2\Delta \cdot M_1}{\Delta \cdot M_2 + 2M_1^2} = 0{,}009\,805, \qquad i = \frac{1+i_0}{1+\varepsilon} - 1 = \underline{1{,}9999\,\%}$$

$$i \text{ genau} = \underline{2\,\%}.$$

Beispiel zu Typus C für Genauigkeit des Verfahrens

Annahmen: Laufzeit $n = 20$; Tilgungsquote $T_t = 0{,}05$ (jährlich gleichbleibend); Rückzahlungskurse R_t von 1,0000 jährlich um 0,0025 auf 1,0475 steigend; nominelle Verzinsung $i_t = 3\,\%$; Anschaffungswert K_0 so festgesetzt, dass die effektive Verzinsung i genau 2 % oder 2,5 % oder 3,5 % oder 4 %.

i genau %	K_0	i genähert %
2,0	1,1093	2,0008
2,5	1,0610	2,5001
3,5	0,9735	3,4999
4,0	0,9338	3,9992

4. Berechnungen des mathematischen Wertes in einem spätern Zeitpunkt

Aus dem Anschaffungswert K_0 und den Gegebenheiten des Anleihens (Tilgungsplan, nominelle Verzinsung, Laufzeit usw.) sowie aus der nunmehr bestimmten effektiven Verzinsung i ist der mathematische Wert für einen spätern Zeitpunkt ohne Mühe durch Rekursion bestimmbar. Sei K_t der mathematische Wert der Kapitaleinheit im Zeitpunkt t. Dann gilt gemäss Definition z. B. für den Typus C

$$K_t\, U_t = \sum_{\lambda=t+1}^{n} v^{\lambda-t}(R_\lambda\, T_\lambda + i_\lambda\, U_{\lambda-1}). \tag{49}$$

Bilden wir $K_t\, U_t - K_{t+1}\, U_{t+1}$, so ist

$$K_t\, U_t = \frac{K_{t+1}\, U_{t+1} + R_{t+1}\, T_{t+1} + i_{t+1}\, U_t}{1+i}. \tag{50}$$

Weil aber $K_n\, U_n = 0$ ist, folgt aus (50) mit $t = n-1$

$$K_{n-1}\, U_{n-1} = \frac{R_n\, T_n + i_n\, U_{n-1}}{1+i}. \tag{51}$$

Allgemein gilt dann für die Rekursion «von oben herab»

$$K_{n-t-1}\, U_{n-t-1} = \frac{K_{n-t}\, U_{n-t} + R_{n-t}\, T_{n-t} + i_{n-t}\, U_{n-t-1}}{1+i}.$$

Literatur-Verzeichnis

Neuere Abhandlungen über mathematische Bewertung und Bestimmung des Effektivzinsfusses

E. Dasen: Recherches sur la détermination approximative du taux de rendement des emprunts à taux d'intérêt nominal variable. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, *39*, 75–92 (1940).

E. Zwinggi: Zur Darstellung des mathematischen Wertes von Wertpapieren. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, *41*, 75–79 (1941).

E. Dasen: Note sur l'approximation du taux effectif des emprunts par obligations amortissables par le système de l'annuité constante. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, *41*, 201–204 (1941).

E. Barracco: Modificazioni di una formula per il calcolo dei corsi teorici dei titoli a reddito fisso, nel caso in cui si tenga conto delle imposte e tasse. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, *12*, 43–52 (1941).

E. Dasen: Note sur le calcul du cours des emprunts à amortissement partiels différés. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, *43*, 123–126 (1943).

B. Meidell: Der Effektivzins. Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, *6/1*, 34–43 (1944).

P. Gotaas: Eine Bemerkung zu der letzten Meidellschen Zinsformel. Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, *6/1*, 43–45 (1944).

J. F. Steffensen: Further remarks on iteration. Skandinavisk Aktuarietidskrift, *28*, 44–55 (1945).

E. Zwinggi: Versicherungsmathematik, 19 f. (1945).

H. Holme: On some practical working formulae for determining the effective rate of interest of loans. Skandinavisk Aktuarietidskrift, *29*, 57–79 (1946).

E. Michalup: Beitrag zur Amortisationsrechnung. Skandinavisk Aktuarietidskrift, *29*, 80–84 (1946).

E. Kivikoski: Über die Konvergenz des Iterationsverfahrens bei der Berechnung des effektiven Zinsfusses der Anleihen. Skandinavisk Aktuarietidskrift, *31*, 135–156 (1948).

L. Packer: On finding the rate of interest on a annuity-certain by inverse interpolation with a calculating machine. Journal of the Institute of Actuaries, Students' Society, *9*, 193–198 (1950).

E. Zwinggi: A study of the dependence of the premium on the rate of interest. Skandinavisk Aktuarietidskrift, *33*, 88–97 (1950).

P. Mazzoni: Sul tasso di rendimento di un'obbligazione a scadenza fissa. Giornale di Matematica Finanziaria, *10*, 18–28 (1952).

R. Ottaviani: La matematica della previdenza. 39 ff. (1952).

E. Zwinggi: Beiträge zum Zinsfussproblem. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, *1/3*, 105–113 (1952).

— Ein Verfahren zur Bestimmung des Zinsfusses bei Leib- und Zeitrenten. Experientia, *8*, 258 (1952).

— Un procedimento per determinare il saggio d'interesse di rendite vitalizie e rendite certe. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, *15*, 261–268 (1952).

— Zur Bestimmung des Effektivzinsfusses. Experientia, *9*, 413 (1953).