

# Eine Variante zur F-Methode der Reserveberechnung

Autor(en): **Jecklin, H. / Strickler, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **54 (1954)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555046>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Eine Variante zur $F$ -Methode der Reserveberechnung

Von *H. Jecklin* und *P. Strickler*, Zürich

Herrn Prof. P. Finsler zum 60. Geburtstag

Bei der  $F$ -Methode wird die Reservekurve im Einzelfall approximiert durch eine Hyperbelgleichung in der Gestalt

$${}_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1} = \frac{tG}{1 - t\frac{H}{G}}, \quad (1)$$

mit  $F = \frac{(1 - {}_\alpha V)\alpha}{{}_\alpha V(n - \alpha)}$ ,  $0 < \alpha < n$ ; resp.  $G = \frac{1}{Fn}$ ;  $H = \frac{F - 1}{(Fn)^2}$ .

Für die Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflüssener Dauer  $t$  gilt dann die Näherung

$$\sum S_{it}V_i \sim \frac{t \sum S_i G_i}{1 - t \frac{\sum S_i H_i}{\sum S_i G_i}}, \quad (2)$$

wenn wir die einzelne Versicherung durch den Index  $i$  kennzeichnen und  $S$  die Erlebensfallsumme,  ${}_tV$  den Reservesatz nach Ablauf der Zeit  $t$  bedeuten <sup>1)</sup>.

Wie bereits gezeigt wurde [2], liegt die Voraussetzung für gute Resultate der  $F$ -Methode wesentlich in der Bedingung

$$\frac{H_i}{G_i} \sim \frac{\sum S_i H_i}{\sum S_i G_i}. \quad (3)$$

Massgebend für die Güte der Approximation (2) ist demnach die Verteilung der einzelnen Quotienten  $H_i/G_i$  um den Mittelwert  $\frac{\sum S_i H_i}{\sum S_i G_i}$  der Reservegruppe, sodann aber auch die Grösse dieses Mittelwertes selbst. Für die genaue Erfüllung von (2) ist jedoch

<sup>1)</sup> Siehe Angaben am Schluss der Arbeit.

nicht nötig, dass  $H_i$  und  $G_i$  innerhalb einer  $t$ -Gruppe zwei Konstanten darstellen, es genügt hierfür die Konstanz des Quotienten  $H_i/G_i$ .

Es liegt nun der Gedanke nahe, für Versicherungsportefeuilles mit einigermassen stabiler Verteilung der Eintrittsalter, Versicherungsdauern und Versicherungssummen den jährlich für jede  $t$ -Gruppe festzustellenden Mittelwert  $\sum S_i H_i / \sum S_i G_i$  ein für allemal durch einen festen Durchschnittswert  $\Phi$  zu ersetzen. Die Gruppenformel (2) würde dann die einfache Gestalt erhalten

$$\sum S_i {}_t V_i \sim \frac{t}{1-t\Phi} \sum S_i G_i. \quad (4)$$

Es stellt sich hier sofort die Frage nach der Grösse des Wertes  $\Phi$ . Dieser ist ausser von der Mischung einer Gruppe nach Versicherungskombinationen natürlich von Sterbetafel und Zinsfuss abhängig. Es ist

für  $\alpha = \frac{n}{2}$  bekanntlich  $F = \frac{1}{\alpha V} - 1$ ,

also 
$$\frac{H}{G} = \frac{F-1}{Fn} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-2\alpha V}{1-\alpha V}. \quad (5)$$

Für gemischte Versicherungen und solche ähnlichen Charakters ist  ${}_{n/2}V < 0,5$ , und wir haben beispielsweise für  $n = 20$ :

wenn ${}_{n/2}V = 0,45$ ,	dann $H/G = 9,09 \text{ ‰}$ ,
0,40,	16,67 ‰,
0,35,	23,08 ‰.

Je kleiner also bei festem  $n$  der Wert  ${}_{n/2}V$ , um so grösser  $H/G$ . Grosse Durchhang der Reservekurve gegenüber dem linearen Anstieg, und damit höherer Wert  $H/G$  kann aber verursacht sein durch hohen Zinssatz oder hohe Sterblichkeitssätze (d. h. alte Tafel). In der Tat erhalten wir für den Quotienten  $H/G$  bei einer gemischten Versicherung mit  $x = 35$ ,  $n = 20$ ,  $\alpha = 10$ , beispielsweise:

unter Zugrundelegung der Sterbetafel S. M. 1921/30  
 bei Zinsfuss  $2\frac{1}{2} \text{ ‰}$ :  $12,15 \text{ ‰}$ , bei Zinsfuss  $4\frac{1}{2} \text{ ‰}$ :  $18,64 \text{ ‰}$ ;  
 unter Zugrundelegung eines Zinsfusses von  $3 \text{ ‰}$   
 bei Tafel C. S. O.:  $13,93 \text{ ‰}$ , bei Tafel M & W I:  $15,80 \text{ ‰}$ .

Grosso modo ist zu schliessen, dass bei einem zur Hauptsache aus gemischten Versicherungen zusammengesetzten Portefeuille der Wert  $\Phi$  nicht stark von  $15 \text{ ‰}$  differieren wird, welche Aussage durch unsere

praktischen Erfahrungen mit der  $F$ -Methode bestätigt wird. Die Eintrittsalter und Versicherungsdauern spielen dabei keine sehr wesentliche Rolle. Denn der Reserveverlauf gemischter Versicherungen gleicher Dauer ist bekanntlich nicht stark vom Eintrittsalter abhängig. Doch ist  ${}_{n/2}V$  allerdings um so grösser, je kleiner  $n$ ; die Korrektur für  $H/G$  ergibt sich aber in (5) bis zu gewissem Grade automatisch. Immerhin entspricht kleinerer durchschnittlicher Dauer ein grösseres  $\Phi$ .

Die nun folgenden Darlegungen setzen an sich weder die Theorie der  $F$ -Methode, noch die praktischen Erfahrungen mit derselben voraus, obwohl – wie sich zeigen wird – ein charakteristischer Zusammenhang besteht. Wir stellen den Reserveverlauf einer Versicherung dar als Differenz der  ${}_0V$  mit  ${}_nV$  verbindenden Geraden und dem in Fig. 1 schraffierten Segment.

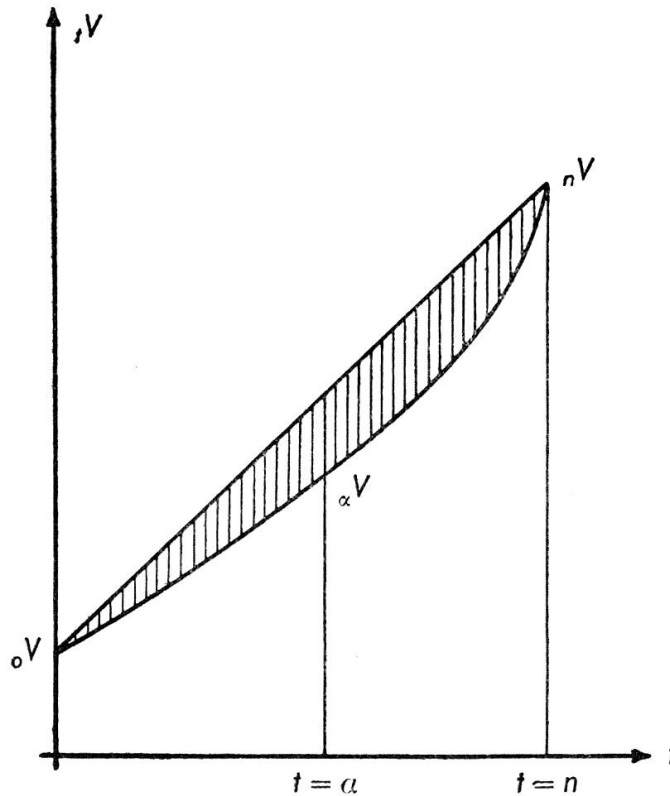


Fig. 1

Zur näherungsweisen Darstellung des Segmentes machen wir den Ansatz

$$Y(t) = \left( \frac{t}{n} - \frac{At}{1 - \varphi t} \right) \overset{\circ}{C},$$

wobei  $n$  die Versicherungsdauer,  
 $t$  die abgelaufene Zeit seit Versicherungsbeginn,  
 $\varphi$  eine geeignet gewählte Konstante bedeuten.

$A$  und  $C$  bestimmt man folgendermassen:

a) Es muss gelten  $Y(n) = 0$ , weshalb aus  $1 = \frac{An}{1 - \varphi n}$  sofort folgt

$$A = \frac{1}{n} - \varphi. \quad (6)$$

b)  $C$  legen wir so fest, dass für ein bestimmtes  $t = \alpha$  der Wert  $Y(\alpha)$  übereinstimmt mit der Differenz zwischen der Geraden und dem genauen Reservewert  ${}_{\alpha}V$ , also

$$C \left( \frac{\alpha}{n} - \frac{A\alpha}{1 - \varphi\alpha} \right) = {}_0V + \alpha \frac{{}_nV - {}_0V}{n} - {}_{\alpha}V,$$

woraus sich ergibt

$$C = \frac{1 - \varphi\alpha}{\varphi\alpha(n - \alpha)} (\alpha {}_nV - n {}_{\alpha}V + (n - \alpha) {}_0V). \quad (7)$$

Für praktische Zwecke kann der Faktor  $\frac{1 - \varphi\alpha}{\varphi\alpha(n - \alpha)}$  bei festem  $\varphi$  für jede Dauer  $n$  und einen mittleren Wert von  $\alpha$  tabelliert werden. Es bestimmt sich dann  $C$  aus den drei Reservepunkten  ${}_0V$ ,  ${}_{\alpha}V$  und  ${}_nV$  durch eine einfache Rechenoperation.

Die Reserve  ${}_tV$  stellt sich nun approximativ dar durch

$${}_tV = {}_0V + \frac{{}_nV - {}_0V}{n} t - Y(t),$$

was wir auch schreiben können

$${}_tV = {}_0V + \left( \frac{{}_nV - {}_0V - C}{n} \right) t + C \left( \frac{1}{n} - \varphi \right) \frac{t}{1 - \varphi t}. \quad (8)$$

Die drei Grössen  ${}_0V$ ,  $\frac{{}_nV - {}_0V - C}{n}$  und  $C \left( \frac{1}{n} - \varphi \right)$  sind von  $t$  unabhängig, d. h. während der ganzen Dauer  $n$  konstant und können somit die Rolle von Hilfszahlen zur Reserveberechnung übernehmen. Im Normalfall, d. h. bei prämienzahlender gemischter Versicherung und Versicherungsarten mit ähnlichem Reserveverlauf ist  ${}_0V = 0$ ,  ${}_nV = 1$ , und (8) reduziert sich auf

$${}_tV = \frac{1-C}{n}t + C\left(\frac{1}{n} - \varphi\right)\frac{t}{1-\varphi t}, \quad (9)$$

mit

$$C = \frac{1-\varphi\alpha}{\varphi\alpha(n-\alpha)}(\alpha - n {}_\alpha V). \quad (10)$$

Der Zusammenhang mit der  $F$ -Methode besteht nun allgemein darin, dass wenn im Einzelfall  $\varphi = H/G$  ist, die beiden Reserveformeln identisch werden, was sich im vorliegenden Normalfall besonders leicht zeigen lässt. Ist nämlich  $\varphi = \frac{H}{G} = \frac{F-1}{Fn}$ , wobei  $F = \frac{\alpha(1-{}_\alpha V)}{(n-\alpha){}_\alpha V}$ ,

so wird

$$F-1 = \frac{\alpha - n {}_\alpha V}{(n-\alpha){}_\alpha V}$$

und anderseits, wegen (10)

$$C = \frac{1-\varphi\alpha}{\varphi\alpha} {}_\alpha V(F-1) = \frac{Fn-\alpha(F-1)}{\alpha(F-1)} {}_\alpha V(F-1) = \frac{n(1-{}_\alpha V) - (\alpha - n {}_\alpha V)}{n-\alpha} = 1.$$

Somit erhält (9) die Gestalt

$${}_tV = \left(\frac{1}{n} - \frac{F-1}{Fn}\right) \frac{t}{1 - \frac{F-1}{Fn}t} = \frac{tG}{1 - t\frac{H}{G}},$$

wenn  $\frac{1}{Fn} = G$  und  $\frac{F-1}{(Fn)^2} = H$ . Damit ist (9) in (1) übergeführt.

Diese Überführung ist aber nur bei der gemachten speziellen Annahme  $\varphi = H/G$  möglich, denn  $F$  ist eine charakteristische Konstante der Einzelversicherung,  $\varphi$  dagegen hat für alle Versicherungen den gleichen Wert.

Aus letzterem Grunde kann man von (8) ausgehend ohne weiteres eine Formel für die globale Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflrossener Dauer  $t$  angeben. Wir führen für die drei bezüglich der einzelnen Versicherung konstanten Hilfszahlen folgende Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned} k &= {}_0V, \\ g &= ({}_nV - {}_0V - C)/n, \\ h &= (1/n - \varphi)C. \end{aligned}$$

Dann lautet die Gruppenformel offenbar, wenn der Index  $i$  die einzelne Versicherung kennzeichnen soll und  $S$  die Versicherungssumme bedeutet:

$$\sum S_{i,t} V_i = \sum S_i k_i + t \sum S_i g_i + \frac{t}{1 - \varphi t} \sum S_i h_i. \quad (11)$$

Das  $t$  braucht, wie bei der  $F$ -Methode, nicht ganzzahlig zu sein, die Reserve kann somit für einen beliebigen Zeitpunkt direkt ermittelt werden. Handelt es sich insbesondere um die Berechnung von Bilanzreserven, so kann der eventuelle Prämienübertrag einfach der konstanten Grösse  $S_i k_i$  beigelegt werden.

Die Zoneneinteilung, wie sie bei der  $F$ -Methode mit Vorteil zur Verbesserung der Approximation verwendet wird [2], lässt sich unmittelbar auch auf die vorliegende Methode – nennen wir sie  $\varphi$ -Methode – übertragen, wobei die in (7) auftretenden Koeffizienten  $\frac{1 - \varphi \alpha}{\varphi \alpha (n - \alpha)}$  die Form haben  $\frac{1 - \varphi \alpha}{\varphi (t_2 - \alpha) (\alpha - t_1)}$ , mit  $t_1$  und  $t_2$  als Zonengrenzen, und allgemein für jede Dauer und Zoneneinteilung tabelliert werden könnten.

Die Formel (8) für die Einzelreserve können wir unter Benutzung der eingeführten Konstantenbezeichnung auch schreiben

$${}_t V_i = k_i + t g_i + \frac{t}{1 - \varphi t} h_i. \quad (12)$$

Durch diese Superposition einer konstanten Grösse, einer Geraden und einer Hyperbel können nun konkav, linear oder konvex verlaufende Reservekurven erfasst werden, wobei die Konstanten  $k, g, h$  je nachdem positive oder negative Grössen, in gewissen Fällen einzeln auch null, sind. Nachdem insbesondere keineswegs nötig ist, dass die darzustellende Reservekurve monoton verläuft, kann auch die Reserve der temporären Todesfallversicherung direkt erfasst werden. Bei der globalen Reserveberechnung nach (11) können die (mit der Versicherungssumme multiplizierten) Konstanten unter Beobachtung ihres Vorzeichens einfach addiert werden; es sind also nicht nach dem Vorzeichen der Konstanten getrennte Gruppen zu bilden, wie es bei der  $F$ -Methode angezeigt erscheint [1].

Über die Güte der Methode können schlussendlich wohl nur empirische Vergleichsrechnungen Aufschluss geben. Wichtig ist natürlich die geeignete Wahl des  $\varphi$  im Hinblick auf die Rechnungsgrundlagen

und die Zusammensetzung des Portefeuilles nach Versicherungskombinationen. Die Art und Weise, wie sich  ${}_tV$  mit  $\varphi$  ändert, lässt sich theoretisch überblicken. Formel (8) kann dargestellt werden in der Form

$${}_tV = K - (\alpha_n V - n_\alpha V + (n - \alpha) {}_0V) \frac{t(n-t)}{n\alpha(n-\alpha)} \cdot \frac{1-\varphi\alpha}{1-\varphi t},$$

wobei  $K$  nicht von  $\varphi$  abhängt. Daraus folgt

$$\frac{\partial {}_tV}{\partial \varphi} = \frac{\alpha_n V - n_\alpha V + (n - \alpha) {}_0V}{n\alpha(n-\alpha)} \cdot \frac{t(n-t)(\alpha-t)}{(1-\varphi t)^2}. \quad (13)$$

Für  $\frac{\partial {}_tV}{\partial \varphi}$  haben wir die Nullstellen  $t = 0$ ,  $t = \alpha$  und  $t = n$ . Für  $\alpha_n V - n_\alpha V + (n - \alpha) {}_0V > 0$  ergibt sich somit für  $\frac{\partial {}_tV}{\partial \varphi}$  der in Fig. 2 angedeutete Verlauf.

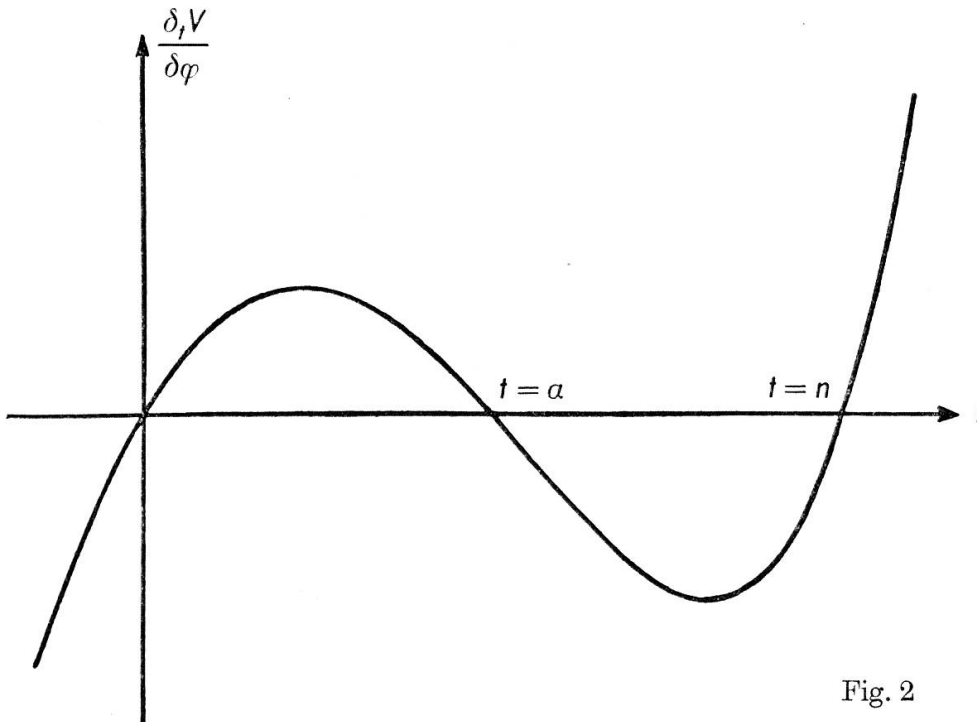


Fig. 2

Für eine weitere Beurteilung ist es nützlich, sich den grundlegenden Unterschied zwischen  $\varphi$ - und  $F$ -Methode vor Augen zu führen. Bei der  $F$ -Methode wird die Einzelreserve durch einen Hyperbelzug approximiert und sodann bei der globalen Reserveberechnung gemäss (2) eine Art Mittelbildung vorgenommen. Die in letzterer Operation liegende Fehlermöglichkeit ist nicht leicht abzuschätzen. Bei der  $\varphi$ -Methode



wird die Mittelbildung durch die Wahl des Wertes  $\varphi$  gewissermassen schon für die Einzelreserve vorweggenommen, und die Globalreserve gemäss (11) ergibt sich als exakte Addition der approximierten Einzelreserven. Notwendigerweise wird also im Einzelfall die Reserve nach dieser Methode teils besser, teils schlechter angenähert als nach der  $F$ -Methode. Bei der globalen Reserveberechnung – genügender Portefeuille – resp. Gruppenumfang vorausgesetzt – muss aber weitgehend eine Kompensation der positiven und negativen Abweichungen stattfinden, und es kann a priori kaum ausgesagt werden, nach welcher der beiden Methoden sich eine bessere Approximation ergibt.

Wie bereits erwähnt, ist  $\varphi$  eine Funktion der Portefeuillezusammensetzung, der verwendeten Sterbetafel und des Zinsfusses. Empirische Rechnungen haben gezeigt, dass bei einem zur Hauptsache aus gemischten Versicherungen bestehenden Portefeuille und bei Basierung auf einer modernen Sterbetafel für  $\varphi$  mit Vorteil angesetzt wird

$$\varphi = 0,002 + 0,4i, \quad (14)$$

so dass z. B. bei  $i = 3\%$  ein  $\varphi = 14\%$  zu verwenden wäre. Auf diese Weise können streng genommen allerdings nicht wie bei der  $F$ -Methode in der gleichen  $t$ -Gruppe verschiedene Zinsfüsse Verwendung finden, was aber praktisch kaum einen grossen Nachteil darstellt; es sei denn, dass man  $\varphi$  auf den durchschnittlichen technischen Zinsfuss bezieht.

Es sind im Anschluss an unsere Ausführungen einige rechnerische Beispiele zusammengestellt, um die Güte der Approximation darzulegen, vorerst einige Einzelreserven nach verschiedenen Tafeln und Zinsfüssen und sodann die Globalreserve für eine Gruppe von 135 Versicherungen. Bei letzterer handelt es sich um die gleiche Gruppe, welche als Illustrationsbeispiel am Schluss der ersten Publikation über die  $F$ -Methode [3] Verwendung fand, und wozu die rechnerischen Arbeiten von Herrn H. Zimmermann durchgeführt wurden. Es besteht kein Zweifel, dass durch eine Zoneneinteilung analog der  $F$ -Methode die Resultate noch erheblich verbessert werden können.

Die Ziffernhinweise im Text beziehen sich auf folgende Arbeiten von H. Jecklin und H. Zimmermann:

- [1] Ergänzende Bemerkungen zur Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation ( $F$ -Methode). Mitteilungen 51, 1.
- [2] Weitere Ergänzungen zur  $F$ -Methode der Reserveberechnung. Mitteilungen 51, 2.
- [3] Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation. Mitteilungen 50, 2.

Beispiele für den Reserveverlauf einzelner gemischter Versicherungen:

Es bedeuten jeweils: I = genauer Reservesatz in Promille,  
 II = Reservesatz nach  $\varphi$ -Methode,  
 III = Reservesatz nach  $F$ -Methode.

1.  $x = 35, n = 15, \alpha = 8$

Schweizerische Sterbetafel S. M. 1939/44 à  $2\frac{1}{2}\text{‰}$ ,  $\varphi = 12\text{‰}$

$t$	I	II	III	$t$	I	II	III
2	111.32	111.31	111.37	10	619.30	619.70	619.66
4	228.59	228.46	228.53	12	764.51	765.24	765.17
6	352.10	351.90	351.94	14	918.93	919.42	919.38

2.  $x = 40, n = 20, \alpha = 10$

Amerikanische Sterbetafel C. S. O. à  $3\text{‰}$ ,  $\varphi = 14\text{‰}$

$t$	I	II	III	$t$	I	II	III
2	74.70	73.66	73.71	12	516.48	517.96	517.91
4	153.41	151.79	151.86	14	622.69	625.71	625.63
6	236.44	234.79	234.86	16	737.31	741.36	741.26
8	324.22	323.13	323.17	18	862.21	865.78	865.70

3.  $x = 35, n = 25, \alpha = 13$

Allgemeine deutsche Sterbetafel 1932/34 à  $3\frac{1}{2}\text{‰}$ ,  $\varphi = 16\text{‰}$

$t$	I	II	III	$t$	I	II	III
2	52.22	53.30	52.69	14	448.70	448.50	448.78
4	108.01	109.58	108.61	16	531.79	531.25	532.10
6	167.58	169.15	168.06	18	620.90	620.57	621.91
8	231.18	232.37	231.38	20	717.28	717.37	719.00
10	298.95	299.67	298.96	22	822.29	822.77	824.29
12	371.29	371.52	371.26	24	937.69	938.11	938.85

4.  $x = 30$ ,  $n = 30$ ,  $\alpha = 15$

Englische Sterbetafel A 24–29 ult. à 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub>,  $\varphi = 10$ <sup>0</sup>/<sub>00</sub>

$t$	I	II	III	$t$	I	II	III
2	49.84	50.10	49.81	16	455.90	456.02	456.15
4	101.70	101.93	101.45	18	523.21	523.63	524.00
6	155.55	155.59	155.03	20	593.24	594.19	594.77
8	211.33	211.21	210.65	22	666.36	667.92	668.67
10	269.14	268.91	268.44	24	742.93	745.07	745.91
12	329.03	328.84	328.52	26	823.57	825.92	826.70
14	391.27	391.16	391.04	28	909.13	910.78	911.30

Gruppe von 135 Versicherungen:

(Detailangaben siehe Mitteilungen 50,2 S. 189 und 195)

I = Summe der Einzelreserven am Ende des  $t$ . Jahres

II = Reservetotal nach  $\varphi$ -Methode ohne Zoneneinteilung,  $\varphi = 13$ <sup>0</sup>/<sub>00</sub>

III = Reservetotal nach  $F$ -Methode ohne Zoneneinteilung

$t$	I	II	Fehler in <sup>0</sup> / <sub>00</sub> der Reserve	III	Fehler in <sup>0</sup> / <sub>00</sub> der Reserve
3	60 106	59 798	— 5,1	59 356	— 12,5
6	124 531	124 079	— 3,6	123 390	— 9,2
9	193 731	193 436	— 1,5	192 681	— 5,4
12	262 053	262 350	+ 1,1	261 686	— 1,4
15	338 645	339 795	+ 3,4	339 324	+ 2,0
18	412 747	414 560	+ 4,4	414 396	+ 4,0