

Summation interpolierter Zahlenreihen

Autor(en): **Kreis, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **54 (1954)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555070>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Summation interpolierter Zahlenreihen

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die *Lagrangesche* Interpolationsformel liefert die ganze Funktion n -ten Grades, welche die vorgeschriebenen Werte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ annimmt, in der Gestalt

$$\sum_0^n P_k(x) f(x_k),$$

wobei die Polynome n -ten Grades $P_k(x)$ nur von den Argumenten x_i und nicht von der Funktion $f(x)$ abhängig sind.

Eine Summe von der Form

$$s = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(b)$$

kann demnach folgendermassen geschrieben werden:

$$s = \sum_0^n A_k f(x_k).$$

Der allgemeine Koeffizient

$$A_k = \sum_a^b P_k(x)$$

ist ebenfalls von der Funktion $f(x)$ unabhängig. Wie in der folgenden Auswahl von Beispielen gezeigt werden soll, können bei bestimmten Summationen durch passende Spezialisierung der Funktion $f(x)$ die unbekanntenen Koeffizienten A_k direkt ermittelt werden.

1. Beispiel: Gegeben die äquidistanten Werte $f(0), f(10), f(20)$ und $f(30)$ einer ganzen Funktion vom 3. Grade; gesucht die Summe

$$s = \sum_0^{30} f(x).$$

Wir haben die Koeffizienten des Ausdruckes

$$s = A f(0) + B f(10) + C f(20) + D f(30)$$

zu bestimmen.

Wir wählen für $f(x)$ folgende Spezialwerte:

$$1. \quad f(x) = (x - 15)^3, \\ s = 0.$$

$$2. \quad f(x) = (x - 15)^2, \\ s = 2 \sum_0^{15} t^2 = 2480.$$

$$3. \quad f(x) = (x - 15)^1, \\ s = 0.$$

$$4. \quad f(x) = (x - 15)^0 = 1, \\ s = 31.$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 1. & -3375 A - 125 B + 125 C + 3375 D & = 0 \\ 2. & 225 A + 25 B + 25 C + 225 D & = 1480 \\ 3. & -15 A - 5 B + 5 C + 15 D & = 0 \\ 4. & A + B + C + D & = 31 \end{array}$$

$$A = D = \frac{341}{80}; \quad B = C = \frac{899}{80}.$$

$$s = \sum_0^{30} f(x) = \frac{341}{80} [f(0) + f(30)] + \frac{899}{80} [f(10) + f(20)]. \quad (1)$$

Analog findet man im Falle einer quadratischen Interpolationsfunktion

a) bei gegebenen Funktionswerten $f(0)$, $f(10)$ und $f(20)$:

$$s = \sum_0^{20} f(x) = \frac{77}{20} [f(0) + f(20)] + \frac{133}{10} f(10); \quad (2)$$

b) bei gegebenen Funktionswerten $f(0)$, $f(5)$ und $f(10)$:

$$s = \sum_0^{10} f(x) = \frac{11}{5} [f(0) + f(10)] + \frac{33}{5} f(5). \quad (3)$$

2. *Beispiel:* Gegeben die äquidistanten Werte $f(0)$, $f(5)$, $f(10)$ und $f(15)$ einer ganzen Funktion des dritten Grades; gesucht die Summe

$$s = \sum_0^{15} f(x).$$

Zur Berechnung der Koeffizienten des Ausdruckes

$$s = A f(0) + B f(5) + C f(10) + D f(15)$$

wählen wir

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= (x-7)^3, \\ s &= 8^3 = 512. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(x) &= (x-7)^2, \\ s &= 8^2 + 2 \sum_1^7 t^2 = 344. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad f(x) &= (x-7)^1, \\ s &= 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad f(x) &= (x-7)^0 = 1, \\ s &= 16. \end{aligned}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{r} 1. \quad -343 A - 8 B + 27 C + 512 D = 512 \\ 2. \quad 49 A + 4 B + 9 C + 64 D = 344 \\ 3. \quad -7 A - 2 B + 3 C + 8 D = 8 \\ 4. \quad A + B + C + D = 16 \end{array}$$

$$A = D = \frac{12}{5}; \quad B = C = \frac{28}{5}.$$

$$s = \sum_0^{15} f(x) = \frac{12}{5} [f(0) + f(15)] + \frac{28}{5} [f(5) + f(10)]. \quad (4)$$

3. *Beispiel:* Gegeben die äquidistanten Werte einer ganzen Funktion vom 4. Grade $f(0)$, $f(5)$, $f(10)$, $f(15)$ und $f(20)$; gesucht die Summe

$$s = \sum_0^{20} f(x).$$

Wir setzen

$$s = A f(0) + B f(5) + C f(10) + D f(15) + E f(20)$$

und nehmen für $f(x)$ folgende Spezialfälle an:

$$1. f(x) = (x - 10)^4,$$

$$s = 2 \sum_1^{10} t^4 = 50666.$$

$$2. f(x) = (x - 10)^3,$$

$$s = 0.$$

$$3. f(x) = (x - 10)^2,$$

$$s = 2 \sum_1^{10} t^2 = 770.$$

$$4. f(x) = (x - 10)^1,$$

$$s = 0.$$

$$5. f(x) = (x - 10)^0 = 1,$$

$$s = 21.$$

Bestimmungsgleichungen:

$$1. \quad 10000 A + 625 B + 0 C + 625 D + 10000 E = 50666$$

$$2. \quad -1000 A - 125 B + 0 C + 125 D + 1000 E = 0$$

$$3. \quad 100 A + 25 B + 0 C + 25 D + 100 E = 770$$

$$4. \quad -10 A - 5 B + 0 C + 5 D + 10 E = 0$$

$$5. \quad A + B + C + D + E = 21$$

$$A = E = \frac{1309}{625}; \quad B = D = \frac{4389}{625}; \quad C = \frac{1729}{625}.$$

$$s = \sum_0^{20} f(x) = \frac{1309}{625} [f(0) + f(20)] + \frac{4389}{625} [f(5) + f(15)] + \frac{1729}{625} f(10). \quad (5)$$

Die Formeln (2) und (3) liefern genaue Resultate bei ganzen Funktionen $f(x)$ bis zum zweiten Grade; bei den Formeln (1) und (4) sind die Summen genau für ganze Funktionen $f(x)$ bis zum dritten Grade,

während sich bei der Formel (5) eine genaue Summe ergibt für Funktionen $f(x)$ bis zum vierten Grade. Andernfalls liefern die Summen der interpolierten Funktionswerte mehr oder weniger exakte *Näherungswerte* der ursprünglichen Zahlenreihe.

Zur Beurteilung der Tragweite der aufgestellten Summationsformeln habe ich in den folgenden numerischen Beispielen die Kommutationswerte D_x der SM-Tafel 1939/44, 3%, die sich wegen der Kontroll- und Vergleichsmöglichkeit besonders gut eignen, verwendet.

Formel (2): Quadratische Interpolation.

$$\begin{aligned} f(0) &= D_{35} = 31150 \\ f(10) &= D_{45} = 22178 \\ f(20) &= D_{55} = 14966 \end{aligned}$$

$$\sum_{35}^{55} D_x = \frac{77}{20} \cdot 46116 + \frac{133}{10} \cdot 22178 = \underline{472514}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{56} = 665530 - 193125 = \underline{472405}.$$

Formel (3): Quadratische Interpolation.

$$\begin{aligned} f(0) &= D_{35} = 31150 \\ f(5) &= D_{40} = 26383 \\ f(10) &= D_{45} = 22178 \end{aligned}$$

$$\sum_{35}^{45} D_x = \frac{11}{5} \cdot 53328 + \frac{33}{5} \cdot 26383 = \underline{291449}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{46} = 665530 - 374085 = \underline{291445}.$$

Formel (1): Kubische Interpolation.

$$\begin{aligned} f(0) &= D_{35} = 31150 \\ f(10) &= D_{45} = 22178 \\ f(20) &= D_{55} = 14966 \\ f(30) &= D_{65} = 8820 \end{aligned}$$

$$\sum_{35}^{65} D_x = \frac{341}{80} \cdot 39970 + \frac{899}{80} \cdot 37144 = \underline{587778}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{66} = 665530 - 77986 = \underline{587544}.$$

Formel (4): Kubische Interpolation.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(5) = D_{40} = 26383$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$f(15) = D_{50} = 18398$$

$$\sum_{35}^{50} D_x = \frac{12}{5} \cdot 49548 + \frac{28}{5} \cdot 48561 = \underline{390857}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{51} = 665530 - 274698 = \underline{390832}.$$

Formel (5): Interpolation vierten Grades.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(5) = D_{40} = 26383$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$f(15) = D_{50} = 18398$$

$$f(20) = D_{55} = 14966$$

$$\sum_{35}^{55} D_x = \frac{1309}{625} \cdot 46116 + \frac{4389}{625} \cdot 44781 + \frac{1729}{625} \cdot 22178 = \underline{472409}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{56} = 665530 - 193125 = \underline{472405}.$$

Literatur

L. Schrutka: Leitfaden der Interpolation. Springer-Verlag, Wien 1945.

D. Seliwanoff: Lehrbuch der Differenzenrechnung. B. G. Teubner, Leipzig 1904.