Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Band: 54 (1954)

Artikel: Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten bei besonderen Annahmen über den Verlauf der Ausscheideintensitäten

Autor: Adrian, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555071

Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen[1]) Ausscheidewahrscheinlichkeiten bei besonderen Annahmen über den Verlauf der Ausscheideintensitäten

Von *Paul Adrian*, Zürich

Im folgenden werden einige Beziehungen zwischen abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten hergeleitet, die sich auf das *Moivre*sche Sterbegesetz und weitere Annahmen stützen. Einige der abgeleiteten Formeln wurden schon von Spangenberg im Heft 10 der Mitteilungen unter zum Teil etwas abweichenden Annahmen gefunden.

Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die auf die Gesamtheit

$$l_x$$

der x-jährigen Personen einwirkenden Ausscheideintensitäten seien bezeichnet mit

$$\overset{1}{\mu}_x, \overset{2}{\mu}_x \dots \overset{n}{\mu}_x;$$

ihre Summierung ergibt die totale Ausscheideintensität

$$\mu_x = \overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x + \dots + \overset{n}{\mu}_x. \tag{1}$$

Die Gesamtheiten in den partiellen Ausscheideordnungen seien mit

$$\overset{1}{\mathfrak{l}}_x, \overset{2}{\mathfrak{l}}_x \dots \overset{n}{\mathfrak{l}}_x,$$

die einjährigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit

$$\overset{1}{q}_x, \overset{2}{q}_x \dots \overset{n}{q}_x \quad \text{(abhängige)}$$

und mit

$$\overset{1}{\mathfrak{q}}_x, \overset{2}{\mathfrak{q}}_x \dots \overset{n}{\mathfrak{q}}_x \quad \text{(unabhängige)}$$

und die totale einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit mit

$$q_x$$

bezeichnet.

---

[1]) Die von Karup eingeführten Bezeichnungen «abhängige» und «unabhängige» Wahrscheinlichkeit würden, wie Herr Prof. Dr. W. Saxer in Band 53 dieser Mitteilungen auf Seite 108/109 vorgeschlagen und begründet hat, besser durch «Wahrscheinlichkeit» schlechthin und «partielle» Wahrscheinlichkeit ersetzt. Da sich indessen die vorliegende Studie eng an den eingangs angeführten Aufsatz von Spangenberg anschliesst, wird darin noch die alte Bezeichnung verwendet.

Es gelten dann die folgenden Beziehungen, in denen allemal

$$\nu = 1, 2 \ldots n \qquad \text{zu setzen ist.}$$

$$l_{x+t} = l_x \, e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} = l_x \, e^{-\int\limits_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau} + \overset{2}{\mu}_{x+\tau} + \cdots + \overset{n}{\mu}_{x+\tau}) d\tau}, \tag{2}$$

$$\overset{\nu}{\mathfrak{l}}_{x+t} = l_x \, e^{-\int\limits_0^t \overset{\nu}{\mu}_{x+\tau} d\tau}, \tag{3}$$

$$\overset{\nu}{q}_x = \int\limits_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t} \, e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} dt = \int\limits_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t} \, e^{-\int\limits_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau} + \overset{2}{\mu}_{x+\tau} + \cdots + \overset{n}{\mu}_{x+\tau}) d\tau} dt, \tag{4}$$

$$\overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x = \int\limits_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t} \, e^{-\int\limits_0^t \overset{\nu}{\mu}_{x+\tau} d\tau} dt = 1 - e^{-\int\limits_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t} dt}, \tag{5}$$

$$q_x = \int\limits_0^1 \mu_{x+t} \, e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} dt = 1 - e^{-\int\limits_0^1 \mu_{x+t} dt}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 1 - q_x &= 1 - \overset{1}{q}_x - \overset{2}{q}_x - \ldots - \overset{n}{q}_x = (1 - \overset{1}{\mathfrak{q}}_x)(1 - \overset{2}{\mathfrak{q}}_x) \ldots (1 - \overset{n}{\mathfrak{q}}_x) \\ &= e^{-\int\limits_0^1 (\overset{1}{\mu}_{x+t} + \overset{2}{\mu}_{x+t} + \cdots + \overset{n}{\mu}_{x+t}) dt}. \end{aligned} \tag{7}$$

Für eine einfache Ausscheideordnung l_x mit der Ausscheideintensität μ_x und der einjährigen Ausscheidewahrscheinlichkeit q_x gelten unter der Annahme, dass die Ausscheideordnung nach der *Moivre*schen Hypothese verlaufe, die folgenden Beziehungen:

$$l_{x+t} = l_x - (l_x - l_{x+1}) \, t,$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{d l_{x+t}}{dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x - (l_x - l_{x+1}) \, t},$$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \mu_x, \tag{8}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\mu_x}{1 - \mu_x t}, \tag{9}$$

$$e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} = \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - \mu_x t. \tag{10}$$

Die Aufgabe, die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten in den abhängigen auszudrücken und umgekehrt, würde erfordern, aus den Gleichungen (4) und (5) die Grössen $\overset{\nu}{\mu}_x$ zu eliminieren. Dies lässt sich in dieser Allgemeinheit nicht ausführen, weil die Wahrscheinlichkeiten nicht von den einzelnen Werten der Intensitäten $\overset{\nu}{\mu}_x$, sondern von deren ganzem Verlauf binnen eines Jahres abhängen. Dagegen lässt sich die Aufgabe lösen für bestimmte Annahmen über den Verlauf der Intensitätsfunktion.

Annahme 1

Die $\overset{\nu}{\mu}_x$ mögen proportional zueinander verlaufen.

Aus Gleichung (1) folgt

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t} = C_\nu \, \mu_{x+t}\,, \tag{11}$$

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 1\,. \tag{12}$$

Unter Berücksichtigung von (6) geht (4) über in

$$\overset{\nu}{q}_x = C_\nu \, q_x \tag{13}$$

und (5) über in

$$1 - \overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x = (1 - q_x)^{C_\nu}. \tag{14}$$

Es ist somit

$$1 - \overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x = (1 - q_x)^{\overset{\nu}{q}_x : q_x} = (1 - \overset{1}{q}_x - \overset{2}{q}_x - \ldots - \overset{n}{q}_x)^{\overset{\nu}{q}_x : (\overset{1}{q}_x + \overset{2}{q}_x + \cdots + \overset{n}{q}_x)} \tag{15}$$

oder

$$q_x \ln (1 - \overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x) = \overset{\nu}{q}_x \ln (1 - q_x) \tag{15a}$$

und unter Berücksichtigung von (7)

$$\overset{\nu}{q}_x = [1 - (1 - \overset{1}{\mathfrak{q}}_x)(1 - \overset{2}{\mathfrak{q}}_x) \ldots (1 - \overset{n}{\mathfrak{q}}_x)] \frac{\ln (1 - \overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x)}{\ln [(1 - \overset{1}{\mathfrak{q}}_x)(1 - \overset{2}{\mathfrak{q}}_x) \ldots (1 - \overset{n}{\mathfrak{q}}_x)]}\,. \tag{16}$$

Wir betrachten noch zwei Spezialfälle zu unserer Annahme 1.

Spezialfall a)

Es sei

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t} = \text{konstant} = \overset{\nu}{\mu}_x\,. \tag{17}$$

Dann ist

$$\overset{\nu}{q}_x = \overset{\nu}{\mu}_x \int_0^1 e^{-t(\overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x + \cdots + \overset{n}{\mu}_x)} \, dt = \frac{\overset{\nu}{\mu}_x}{\overset{1}{\mu}_x + \overset{2}{\mu}_x + \ldots + \overset{n}{\mu}_x} \left(1 - e^{-\overset{1}{\mu}_x - \overset{2}{\mu}_x - \cdots - \overset{n}{\mu}_x}\right) \tag{18}$$

und

$$\overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x = 1 - e^{-\overset{\nu}{\mu}_x}. \tag{19}$$

Spezialfall b)

In der totalen Ausscheideordnung l_x soll für jede Ausscheideursache der Abgang während der betrachteten Zeiteinheit proportional der Zeit erfolgen.

Als Gleichung ausgedrückt: in

$$l_{x+\vartheta} = l_x \left(1 - \sum_1^n \int_0^\vartheta \overset{\nu}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} dt\right)$$

soll der Ausdruck

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} = \text{konstant} = K_\nu \tag{20}$$

sein.

$l_{x+\vartheta}$ verläuft nach der *Moivre*schen Hypothese, und aus (10) folgt

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t} = \frac{K_\nu}{1-\mu_x t}, \tag{21}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}{1-\mu_x t}, \tag{22}$$

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t} = \frac{K_\nu}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n} \mu_{x+t}. \tag{23}$$

Aus (23) ist ersichtlich, dass die obige Voraussetzung, wonach die Abgänge proportional der Zeit erfolgen sollen, wirklich ein Spezialfall unserer Annahme 1 ist.

Aus (9) folgt
$$K_1 + K_2 + \ldots + K_n = \mu_x. \tag{24}$$

Um Übereinstimmung mit (11) bis (14) zu erzielen, setzen wir

$$K_\nu = \mu_x C_\nu \tag{25}$$

und erhalten

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t} = C_\nu \frac{\mu_x}{1-\mu_x t}, \tag{26}$$

$$\overset{\nu}{q}_x = C_\nu \mu_x, \tag{27}$$

$$1 - \overset{\nu}{q}_x = (1-\mu_x)^{C_\nu}. \tag{28}$$

Spangenberg hat aus der Annahme des Spezialfalles *b)* die Formeln (15) und (16) hergeleitet; wir haben hier gezeigt, dass diese Formeln auch unter der allgemeineren Annahme 1 gelten.

Annahme 2

Die partiellen Ausscheideordnungen $\overset{1}{\mathfrak{l}}_x, \overset{2}{\mathfrak{l}}_x \ldots \overset{n}{\mathfrak{l}}_x$ mögen nach der *Moivre*schen Hypothese verlaufen. Es ergibt sich dann

$$\overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x = \overset{\nu}{\mu}_x,$$

$$\overset{\nu}{\mu}_{x+t} = \frac{\overset{\nu}{\mu}_x}{1-\overset{\nu}{\mu}_x t},$$

$$e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} = (1-\overset{1}{\mu}_x t)(1-\overset{2}{\mu}_x t)\ldots(1-\overset{n}{\mu}_x t),$$

$$\overset{\nu}{q}_x = \overset{\nu}{\mu}_x \int\limits_0^1 (1-\overset{1}{\mu}_x t)(1-\overset{2}{\mu}_x t)\ldots(1-\overset{\nu-1}{\mu_x} t)(1-\overset{\nu+1}{\mu_x} t)\ldots(1-\overset{n}{\mu}_x t)\, dt$$

$$= \overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x \int\limits_0^1 (1-\overset{1}{\mathfrak{q}}_x t)(1-\overset{2}{\mathfrak{q}}_x t)\ldots(1-\overset{\nu-1}{\mathfrak{q}_x} t)(1-\overset{\nu+1}{\mathfrak{q}_x} t)\ldots(1-\overset{n}{\mathfrak{q}}_x t)\, dt,$$

$$\overset{\nu}{q}_x = \overset{\nu}{\mathfrak{q}}_x\left(1-\frac{{}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^1}{2}+\frac{{}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^2}{3}-\frac{{}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^3}{4}+-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{{}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^{n-1}}{n}\right),$$

wobei

$${}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^1,\ {}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^2 \ldots {}^{(\nu)}_{n-1}\mathfrak{Q}^{n-1} \tag{29}$$

die symmetrischen Grundfunktionen 1., 2. ... $(n-1)$. Grades der $(n-1)$ Elemente $\overset{1}{\mathfrak{q}}_x, \overset{2}{\mathfrak{q}}_x \ldots \overset{\nu-1}{\mathfrak{q}_x}, \overset{\nu+1}{\mathfrak{q}_x} \ldots \overset{n}{\mathfrak{q}}_x$ bedeuten.

Für $n = 2$ geht das Gleichungssystem (29) über in

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{q}_x &= \overset{1}{\mathfrak{q}}_x\left(1-\frac{\overset{2}{\mathfrak{q}}_x}{2}\right) \\ \overset{2}{q}_x &= \overset{2}{\mathfrak{q}}_x\left(1-\frac{\overset{1}{\mathfrak{q}}_x}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Die Gleichungen (30) finden sich bei Spangenberg. Für $n > 2$ stimmt die Gleichung Spangenbergs – dort Gleichung (11) – mit unserer Gleichung (29) nicht überein. Obschon die Gleichung Spangenbergs etwas einfacher aussieht, ist unserer Gleichung (29) entschieden der Vorzug zu geben; denn die letztere wurde erhalten aus der einfachen und anschaulichen Annahme 2, während Spangenberg bei der Herleitung seiner Gleichung schwer abschätzbare Näherungsformeln verwendet, und unsere Gleichung (29) erfüllt die Beziehung (7), während die Spangenbergsche Gleichung dies für $n > 2$ nicht tut.

Aus der Annahme 1 ergab sich Gleichung (15), aus der Annahme 2 Gleichung (29). Führt nun aber auch umgekehrt die Gleichung (15) notwendig zu der Annahme 1, die Gleichung (29) notwendig zu der Annahme 2? Diese Frage ist zu verneinen; vielmehr führen die Gleichungen (15) und (29) auf Bedingungsgleichungen zwischen den μ, für die die Annahmen 1 und 2 zwar die einfachsten, aber nicht die einzig möglichen Lösungen darstellen.

Aus Gleichung (15a) ergibt sich

$$\int_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} dt \int_0^1 \mu_{x+t}\, dt = \int_0^1 \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau} dt \int_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t}\, dt$$

$$= \left(1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt}\right) \int_0^1 \overset{\nu}{\mu}_{x+t}\, dt. \tag{31}$$

Die entsprechende, aus Gleichung (29) hergeleitete Beziehung zwischen den μ würde eine komplizierte Gestalt annehmen.

Um zu beweisen, dass die Annahmen 1 und 2 nicht die einzigen Bedingungen sind, die auf die Gleichungen (15) bzw. (29) führen, genügt es, ein einfaches Beispiel zu konstruieren, bei dem diese Gleichungen durch eine von den Annahmen 1 und 2 abweichende Voraussetzung erfüllt sind.

Für $n = 2$ lauten die Gleichungen (31):

$$\int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau} + \overset{2}{\mu}_{x+\tau}) d\tau} dt \int_0^1 (\overset{1}{\mu}_{x+t} + \overset{2}{\mu}_{x+t})\, dt$$

$$= \int_0^1 (\overset{1}{\mu}_{x+t} + \overset{2}{\mu}_{x+t})\, e^{-\int_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau} + \overset{2}{\mu}_{x+\tau}) d\tau} dt \int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\, dt$$

oder

$$\int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau} + \overset{2}{\mu}_{x+\tau}) d\tau} dt \int_0^1 \overset{2}{\mu}_{x+t}\, dt = \int_0^1 \overset{2}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau} + \overset{2}{\mu}_{x+\tau}) d\tau} dt \int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\, dt. \tag{32}$$

Die Gleichung (32) gilt sowohl für $\nu = 1$ wie für $\nu = 2$.

Die Gleichungen (30), in μ ausgedrückt, lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau}+\overset{2}{\mu}_{x+\tau})\,d\tau}\, dt &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-\int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\,dt}\right)\left(1+e^{-\int_0^1 \overset{2}{\mu}_{x+t}\,dt}\right)\\
\int_0^1 \overset{2}{\mu}_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\overset{1}{\mu}_{x+\tau}+\overset{2}{\mu}_{x+\tau})\,d\tau}\, dt &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-\int_0^1 \overset{2}{\mu}_{x+t}\,dt}\right)\left(1+e^{-\int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\,dt}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (33) ergibt sich eine Identität; d. h. die zweite Gleichung ist eine Folge der ersten und umgekehrt.

Die folgende Überlegung gilt sowohl für die Gleichung (32) als auch für eine der Gleichungen (33).

Wir nehmen beispielsweise an, $\overset{1}{\mu}_{x+t}$ sei eine Konstante $\overset{1}{\mu}_x$ von zunächst noch unbekannter Grösse. Für $\overset{2}{\mu}_{x+t}$ nehmen wir irgendeine bestimmte, einigermassen plausible Funktion von t an, die keine Konstante sein darf. Unsere Gleichung gestattet uns nun, die Konstante $\overset{1}{\mu}_x$ zu bestimmen. $\overset{1}{\mu}_{x+t}$ und $\overset{2}{\mu}_{x+t}$ erfüllen die Annahme 1 oder 2 nicht, und unsere Behauptung ist damit bewiesen.