

Bemerkungen zum Zinsfussproblem : oskulierende Umkehrung

Autor(en): **Schöbe, Waldemar**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **55 (1955)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-551150>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bemerkungen zum Zinsfussproblem Oskulierende Umkehrung

Von *Waldemar Schöbe*, Stuttgart

Bei einem Darlehensvertrag wird die Beziehung zwischen dem Kurs K und dem Effektivzins i durch die Relation

$$K = \sum_{t=1}^n A_t v^t, \quad v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} \quad (1)$$

geliefert, in der A_t die Annuitäten sind. Bei der Bestimmung des Effektivzinses handelt es sich um die Auflösung dieser Gleichung nach v . Vorzügliche Näherungsformeln für i sind von den Herren Meidell¹⁾ und Zwinggi²⁾ angegeben worden. Beide geben, von einem Stützwert i_0 ausgehend, als Näherungsausdruck für i eine gebrochen-lineare Funktion von K ; bei Zwinggi ist noch eine Hilfsgrösse ε dazwischengeschaltet. Wir wollen zeigen, dass die beiden genannten Zinsenformeln im wesentlichen miteinander identisch sind, und werden den einfachen mathematischen Kern darlegen, die Untersuchung auf beliebige Funktionen des Zinses übertragen und die Grössenordnung des Fehlers allgemein angeben. Die Kenntnis der zitierten Arbeiten ist dabei nicht unbedingt vorausgesetzt.

Am durchsichtigsten ist bei Zwinggi die Behandlung des Typus C. Hier ist deutlich, dass die hohe Allgemeinheit der Voraussetzungen – wechselnder Nominalzins bezüglich des Restkapitals, Einführung eines variablen Kurses, mit dem die nominellen Tilgungsraten innerhalb der

¹⁾ *B. Meidell*: Der Effektivzins, Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, 6. Band, 1. Heft, S. 34–43 (1944).

²⁾ *E. Zwinggi*: Ein Verfahren zur Bestimmung der Rendite von festverzinslichen Anleihen, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 54. Band, Heft 1, S. 57–70 (1954).

Annuitäten bewertet werden – sich lediglich auf die Zusammensetzung der Annuitäten auswirkt, mit denen dann allein weitergearbeitet wird, während bei den spezielleren Typen A und B auf eine geschlossene Darstellung der Hilfsgrößen Wert gelegt ist. In der Meidellschen Zinsenformel sind dagegen die zu verwendenden Hilfsgrößen auf den Tilgungsbeträgen rechnerisch aufgebaut, wobei ein unveränderlicher Nominalzinsfuß und eine einheitliche Bewertung der Tilgungsraten für Annuität und Schulddeckung angenommen ist. Trotzdem ist die Meidellsche Formel nicht spezieller, wie aus folgender Überlegung zu ersehen ist. Sind bei einem allgemeinen, der Zwinggischen Formel zu unterwerfenden Darlehensvertrag die Annuitäten festgestellt und ist der Stützzins i_0 irgendwie passend gewählt, so liegt es nahe, einen Darlehensvertrag zu fingieren, bei dem i_0 als einheitlicher Nominalzinsfuß auftritt. Anfangskapital und Restkapitalien des fiktiven Vertrages ergeben sich als Barwerte der jeweils ausstehenden Annuitäten, diskontiert mit i_0 , oder auch rekursiv, und als Tilgungen H_t sind die Differenzen aufeinanderfolgender Restkapitalien aufzufassen.

Für den fiktiven Darlehensvertrag liefert dann – das ist unsere Behauptung – die Meidellsche Formel denselben Näherungswert des Effektivzinses, der sich nach der Zwinggischen Formel für den ursprünglichen Vertrag ergibt.

Der hier beschriebene Umweg, der im allgemeinsten Falle zur Anwendung der Meidellschen Formel eingeschlagen wurde, ändert nichts an der Tatsache, dass sich auf Probleme der Bankpraxis die Meidellsche Formel zumeist unmittelbar und sogar besonders einfach anwenden lässt. Ein sachlicher Unterschied gegenüber der Formel vor Zwinggi macht sich jedoch bemerkbar, wenn nicht, wie in (1) stillschweigend vorausgesetzt ist, alle Fälligkeitszeitpunkte von Annuitäten von dem Bewertungszeitpunkt 0 um ganzzahlige Vielfache der Zeiteinheit entfernt sind, sondern inkommensurable Zeitintervalle auftreten. Für die Zwinggische Formel darf t eine beliebige (steigende) Folge positiver reeller Zahlen durchlaufen, ohne dass sich etwas Grundsätzliches ändert – siehe den Zwinggischen Typus B –, während bei Meidell die Tilgungen sämtlich auf Zinstermine fallen müssen und auch der Bewertungszeitpunkt in diese äquidistante Folge hineinpassen muss.

Überdies kann die Zwinggische Formel unmittelbar auch zur Berechnung des Zinsfußes aus versicherungsmathematischen Barwerten dienen und fällt beispielsweise dann, wenn die Annuitäten A_t mit den

Erlebenswahrscheinlichkeiten identifiziert werden, mit der Poukkaschen Formel zusammen. Die Meidellsche Formel ist auf solche Anwendungen nicht zugeschnitten. Schliesslich kommt auch noch in Betracht, dass sich die Zwinggische Formel notfalls leicht mit einem besseren Stützwert i_0 iterieren lässt, während man sich bei der Meidellschen Formel nur auf dem eingangs beschriebenen Umweg von dem Nominalzins lösen kann.

Nun zu dem angekündigten Beweis, für den es nach dem Gesagten anzunehmen genügt, dass der Nominalzins konstant gleich i_0 ist und die Tilgungsraten zum Kurse 1 auf die Annuitäten angerechnet werden. Wir bezeichnen die Tilgungen mit F_t , das Anfangskapital mit U_0 , die Restkapitalien nach Vornahme der Tilgung mit U_t und die Annuitäten mit A_t , wobei t von 1 bis n läuft und $U_n = 0$ ist. Es gelten dann die Relationen

$$F_t = U_{t-1} - U_t, \quad \text{also} \quad U_0 = \sum_{t=1}^n F_t,$$

$$A_t = F_t + U_{t-1} i_0 = U_{t-1} r_0 - U_t, \quad \text{hieraus}$$

$$A_t - A_{t+1} = F_t r_0 - F_{t+1}.$$

Nach Zwinggi werden die Bezeichnungen eingeführt

$$M_0 = \sum_{t=1}^n A_t v_0^t, \quad M_1 = \sum_{t=1}^n t A_t v_0^t, \quad M_2 = \sum_{t=1}^n t(t-1) A_t v_0^t.$$

Nach Meidell ist zu setzen

$$S_0 = \sum_{t=1}^n F_t v_0^t, \quad S_1 = \sum_{t=1}^n t F_t v_0^{t+1}.$$

Wir gehen von der Zwinggischen Formel aus; sämtliche Umformungen stellen lediglich Umordnungen nach Potenzen von v_0 dar.

Es wird

$$M_0 = \sum_{t=1}^n (U_{t-1} v_0^{t-1} - U_t v_0^t) = U_0,$$

$$M_1 = \sum_{t=1}^n t(U_{t-1} v_0^{t-1} - U_t v_0^t) = \sum_{t=0}^{n-1} U_t v_0^t,$$

$$\frac{1}{2} M_2 = \sum_{t=1}^n \binom{t}{2} (U_{t-1} v_0^{t-1} - U_t v_0^t) = \sum_{t=1}^{n-1} t U_t v_0^t.$$

Hieraus

$$M_1(1-v_0) = \sum_{t=0}^{n-1} U_t(v_0^t - v_0^{t+1}) = U_0 - \sum_{t=1}^n (U_{t-1} - U_t) v_0^t = U_0 - S_0,$$

$$\frac{1}{2} M_2(1-v_0) = \sum_{t=0}^{n-1} t U_t(v_0^t - v_0^{t+1}) = \sum_{t=0}^{n-1} ((t+1) U_{t+1} - t U_t) v_0^{t+1}.$$

Aus der letzten Gleichung und der Definition von M_1 folgt

$$M_1 v_0 - \frac{1}{2} M_2(1-v_0) = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) (U_t - U_{t+1}) v_0^{t+1} = \sum_{t=1}^n t F_t v_0^t = r_0 S_1,$$

also nach Division durch M_1

$$v_0 - \frac{M_2}{2 M_1} (1-v_0) = \frac{r_0 S_1}{M_1} = \frac{i_0 S_1}{M_1(1-v_0)}.$$

Nun ist nach Zwinggi (11) bis (13) angenähert

$$i = \frac{1+i_0}{1+\varepsilon} - 1 \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{2 \Delta M_1}{\Delta M_2 + 2 M_1^2}, \quad \text{wo} \quad \Delta = K - M_0 = K - U_0$$

gesetzt ist.

Man findet

$$i = \frac{r_0}{1+\varepsilon} - 1 = r_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \right) - 1 = i_0 - \frac{r_0}{1 + \frac{1}{\varepsilon}} = i_0 \left(1 - \frac{1}{N'} \right),$$

$$\text{wo } N' = (1-v_0) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \text{ und } \frac{1}{\varepsilon} = \frac{M_1}{\Delta} + \frac{M_2}{2 M_1} \text{ ist.}$$

Es wird

$$N' = 1 - v_0 + \frac{1}{\varepsilon} (1-v_0) = \left(1 + \frac{M_1(1-v_0)}{\Delta} \right) - \left(v_0 - \frac{M_2}{2 M_1} (1-v_0) \right)$$

$$= \left(1 + \frac{U_0 - S_0}{K - U_0} \right) - \frac{i_0 S_1}{M_1(1-v_0)},$$

also

$$N = -N' = \frac{K - S_0}{U_0 - K} + \frac{i_0 S_1}{U_0 - S_0} \quad \text{und dann} \quad i = i_0 \left(1 + \frac{1}{N} \right),$$

womit die Meidellsche Formel (24') erreicht ist. Man erkennt übrigens, dass man auch eine nullte Annuität $A_0 = F_0$ vorschalten kann; alle Summen sind dann von $t = 0$ an zu erstrecken, wodurch sich aber K , S_0 , U_0 und M_0 nur sämtlich um A_0 erhöhen.

Bei der obigen Umformung hätte man sich auch der Meidellschen Relation (8)

$$iK - i_0 U_0 = (i - i_0) \sum_{t=1}^n F_t v^t$$

mit Vorteil bedienen können, in der nach ein- oder zweimaliger Differentiation $i = i_0$ einzusetzen ist.

Der Grund für die sehr gute Annäherung, die diese Formeln geben, liegt darin, dass die Näherungsfunktion für i die wahre Funktion oskuliert, so dass bei geometrischer Darstellung die Kurven an der betreffenden Stelle eine Berührung mindestens zweiter Ordnung haben. Durch (1) ist der Kurs K als eine sehr übersichtliche elementare Funktion von v , also auch von i dargestellt, von der nur die zweimalige Differenzierbarkeit benötigt wird. Ist nun i_0 der Stützzins, also ein beliebiger, nicht abwegig gewählter Zinsfuß, der zumeist mit dem Nominalzins übereinstimmen wird, und ist dK/di an der Stelle i_0 von 0 verschieden, so gibt es genau eine nicht konstante gebrochen-lineare Funktion ¹⁾ von i , welche die wahre Funktion $K = K(i)$ an der Stelle i_0 oskuliert. Ersetzt man dann die wahre Funktion $K(i)$ durch diese gebrochen-lineare Funktion, so ist die inverse Funktion wiederum gebrochen-linear, und sie oskuliert ihrerseits die wahre Funktion $i(K)$, wie aus den Beziehungen zwischen den ersten und zweiten Ableitungen inverser Funktionen unmittelbar folgt.

Um eine oskulierende gebrochen-lineare Funktion handelt es sich immer dann, wenn eine Potenzreihenentwicklung

$$c_0 + c_1 J + c_2 J^2 + \dots$$

in die Gestalt

$$c_0 + c_1 J \left(1 + \frac{c_2}{c_1} J \right) + O(J^3) = c_0 + \frac{c_1 J}{1 - \frac{c_2}{c_1} J} + O(J^3)$$

¹⁾ Der Fall der ganz-linearen Funktion soll dabei eingeschlossen sein. Die Ableitung einer nicht konstanten gebrochen-linearen Funktion verschwindet nirgends. Wenn also die erste Ableitung von K an der Stelle i_0 verschwindet, die zweite aber nicht, so ist keine oskulierende gebrochen-lineare Funktion vorhanden. Andererseits existiert dann auch keine beiderseits U_0 definierte stetige Umkehrfunktion $i(K)$ von (1).

gebracht wird – wobei J entweder gleich $i - i_0$ ist oder eine andere gebrochen-lineare, bei $i = i_0$ verschwindende Funktion des Zinses bedeutet – und die kubischen und höheren Glieder vernachlässigt werden. Dieser Sachverhalt ist nicht nur bei der Herleitung der Zwinggischen Zinsenformel gegeben; auch die Poukkasche Formel lässt sich so gewinnen. Sie hat also ebenfalls oskulierenden Charakter. Eine solche Betrachtungsweise erscheint einfacher als die von Lindelöf stammende konvergenzverbessernde Umgestaltung der unendlichen Taylorreihe.

Ebenso wie zu Kurs- oder Barwerten kann zu jeder zweimal differenzierbaren Funktion (des Zinsfusses), deren Ableitung an der Stützstelle von 0 verschieden ist, die oskulierende gebrochen-lineare Funktion gefunden werden, ohne dass es dabei der Aufstellung der Taylorreihe nach Potenzen einer bei $i = i_0$ verschwindenden Hilfsgrösse J bedarf. Sind nämlich $\Phi_0, \Phi'_0, \Phi''_0$ die Werte einer Funktion $\Phi(i)$ und ihrer beiden ersten Ableitungen an der Stelle i_0 , $\Phi'_0 \neq 0$, und wird die oskulierende gebrochen-lineare Funktion $\varphi(i)$ durch die Beziehung

$$\frac{1}{i - i_0} + \frac{\alpha}{\varphi(i) - \Phi_0} = \beta$$

beschrieben, so ist

$$\varphi(i) - \Phi_0 = \frac{\alpha}{\beta - \frac{1}{i - i_0}}, \quad \varphi'(i) = \frac{-\alpha}{(\beta(i - i_0) - 1)^2}, \quad \varphi''(i) = \frac{2\alpha\beta}{(\beta(i - i_0) - 1)^3},$$

so dass $\Phi'_0 = -\alpha$, $\Phi''_0 = -2\alpha\beta$ oder umgekehrt $\alpha = -\Phi'_0$, $\beta = \frac{\Phi''_0}{2\Phi'_0}$ die Bedingungen des Oskulierens angibt. Es folgt daher exakt

$$i - i_0 = \frac{1}{\beta - \frac{\alpha}{\varphi - \Phi_0}},$$

und wenn hier φ durch Φ ersetzt und der so gewonnene Näherungsausdruck mit j statt i bezeichnet wird,

$$j - i_0 = \frac{\Phi - \Phi_0}{\beta(\Phi - \Phi_0) + \Phi'_0} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\Phi''_0}{2\Phi'_0}. \quad (2)$$

Für die Abschätzung des Fehlers $j-i$ setzen wir $\Phi(i)$ als dreimal stetig differenzierbar voraus und gehen sofort zu den inversen Funktionen j und i mit Φ als unabhängiger Veränderlicher über. Die dritte Ableitung nach Φ an der Stelle Φ_0 lautet

für die Näherungsfunktion
$$j_0''' = -\frac{6\beta^2}{\alpha^3} = \frac{3\Phi_0''^2}{2\Phi_0'^5},$$

für die genaue Umkehrfunktion bekanntlich
$$i_0''' = \frac{3\Phi_0''^2 - \Phi_0'\Phi_0'''}{\Phi_0'^5}.$$

Wir wenden den Taylorschen Satz 3. Ordnung auf $j-i$ an und lassen dann $\Phi \rightarrow \Phi_0$ streben. Wegen $j_0 - i_0 = j_0' - i_0' = j_0'' - i_0'' = 0$ strebt

$$\frac{j-i}{(\Phi-\Phi_0)^3} \rightarrow \frac{1}{6}(j_0''' - i_0'''),$$

und wegen

$$\frac{\Phi-\Phi_0}{j-i_0} = \beta(\Phi-\Phi_0) + \Phi_0' \rightarrow \Phi_0'$$

wird schliesslich

$$j-i \approx B(j-i_0)^3 \quad \text{mit } B = \frac{\Phi_0'''}{6\Phi_0'} - \beta^2 \quad (3)$$

in dem Sinne, dass der Quotient beider Seiten von (3) für $\Phi \rightarrow \Phi_0$ dem Werte 1 zustrebt. Damit ist die Grössenordnung des Fehlers festgestellt. Übrigens ist $6B$ der sogenannte Schwarzsche Differentialparameter, dessen identisches Verschwinden für gebrochen-lineare Funktionen charakteristisch ist.

In dem freilich uninteressanten Falle, dass $\Phi(i)$ der Kurs der ewigen Rente ist, liefert die Meidell-Zwinggische Zinsenformel immer den richtigen Effektivzins, wie auch der Stützzins i_0 gewählt sei.

Ist beispielsweise $\Phi(i)$ mit der durch (1) dargestellten Funktion $K(i)$ identisch, so stimmt in der Bezeichnungsweise von Zwinggi

$$\Phi_0 \text{ mit } M_0, \quad \Phi_0' \text{ mit } -v_0 M_1, \quad \Phi_0'' \text{ mit } v_0^2(M_2 + 2M_1)$$

überein; mit der Abkürzung $\Phi - \Phi_0 = K - M_0 = \Delta$ ergibt sich also der oskulierende Näherungsausdruck

$$i - i_0 = r - r_0 \approx \frac{-2\Delta M_1 r_0}{\Delta(M_2 + 2M_1) + 2M_1^2},$$

was leicht in die Zwinggische Formel

$$\frac{r_0}{r} \approx 1 + \frac{2 \Delta M_1}{\Delta M_2 + 2 M_1^2}$$

übergeführt werden kann.

Als weiteres Anwendungsbeispiel der oskulierenden Umkehrung behandeln wir die Ermittlung des Rechnungszinsfusses aus der Nettojahresprämie P einer gemischten Kapitalversicherung, wobei Erwerbskosten berücksichtigt sein mögen. Aus $P(i) = (1 + \alpha) \frac{1}{a} - (1 - v)$ folgt

$$P'(i) = -(1 + \alpha) \frac{a'}{a^2} - v^2,$$

$$P''(i) = (1 + \alpha) \frac{2a'^2 - aa''}{a^3} + 2v^3$$

mit
$$a = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k},$$

$$a' = -\frac{v}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} k D_{x+k},$$

$$a'' = \frac{2v^2}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} D_{x+k},$$

was sich durch die $N_x, S_x, S_x^{(2)}$ geschlossen ausdrücken lässt.

Diese Ausdrücke werden nur für einen Stützwert i_0 des Rechnungszinsfusses benötigt und liefern die Werte P_0, P'_0, P''_0 , die dann in Formel (2) einzusetzen sind. Übrigens ist die notwendige Bedingung $P'_0 \neq 0$ bei sehr grossem i_0 oder α ausserhalb des praktisch vorkommenden Bereichs nicht mehr unbedingt gesichert.

Die zahlenmässige Auswertung wurde für Eintrittsalter $x = 35$, Versicherungsdauer $n = 30$ auf Grund der Allgemeinen deutschen Sterbetafel 1924/26 Männer und eines Erwerbskostensatzes von 35 ‰ durchgeführt, wobei der Zinsfuss von $3\frac{1}{2} \text{ ‰}$ als Stützwert diente. Die Endformel für den Näherungswert lautet dann

$$100j = \frac{368,148 - 9,33562 P}{11,3263 + P}, \quad (2')$$

wenn P auf die Versicherungssumme 1000 bezogen ist.

Die nachstehende Tabelle gibt ein Bild von der erreichten Genauigkeit.

Jahresprämie P	Rechnungszinsfuss		$100(j - i)$	$100 B(j - i_0)^3$ nach (3)
	Wahrer Wert $100 i$	Näherungswert $100 j$ nach (2')		
38,7166	0	0,1340	0,1340	0,1312
30,4374	2	2,0112	0,0112	0,0113
28,7011	2,5	2,5034	0,0034	0,0034
27,0887	3	3,0003	0,0003	0,0004
25,5933	3,5	3,5000	0	0
24,2118	4	3,9990	— 0,0010	— 0,0004
22,9354	4,5	4,4957	— 0,0043	— 0,0034
21,7574	5	4,9882	— 0,0118	— 0,0113
17,9483	7	6,8520	— 0,1480	— 0,1295

In der letzten Spalte ist für B der aus (3) ermittelte Wert $B = -34,394$ verwendet; man erhält so, wie der Vergleich mit der vorletzten Spalte lehrt, ein recht genaues Bild von der Grösse des Fehlers von (2'). (In manchen Zeilen macht es sich als Unregelmässigkeit bemerkbar, dass in den betreffenden Tafeln die Kommutationswerte mit zu wenig Stellen angegeben sind; der wahre Wert $100 i$ weicht dann von dem runden Rechnungszins etwas ab.)

Bei dieser Aufgabe würde die Umkehrung der Poukkaschen Formel zu einem irrationalen, also praktisch unbrauchbaren Ausdruck führen, weil der Zinsfuss in die Formel für P ausserhalb des Leibrentenbarwerts auch noch unmittelbar als Diskont d eingeht. Wohl aber lassen sich versicherungsmathematische Zinsfussprobleme noch in der Weise behandeln, dass man das Versicherungsverhältnis als Darlehensvertrag zwischen Versicherer und Versichertengemeinschaft ansieht. Bei der Leibrente gegen Einmalprämie führt das unmittelbar zur Poukkaschen Formel. Bei obiger Fragestellung bezüglich der Jahresprämie kann man die Formel $0 = A - Pa$ im Sinne von (1) deuten und nach der Zwinggischen Zinsenformel behandeln. Es liegt dann ein zum Kurse 0 gegebenes Darlehen vor, bei dem die Prämie P in den vereinbarten Annuitäten (saldiert aus Leistungen und Gegenleistungen) als

Parameter vorkommt. Da die Hilfsgrössen M von P linear abhängen, erscheint nach Wahl eines Stützzinses i_0 schliesslich der Näherungsausdruck j für i als Quotient zweier quadratischer Polynome in P . Diese Näherung ist bei den oben dargelegten speziellen Daten über die Versicherung und für denselben Stützzins nicht so gut wie nach der linearen Formel (2').