

Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Autor(en): **Kreis, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **56 (1956)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966832>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die vorliegende Untersuchung stellt einen Versuch dar, das Renditenproblem festverzinslicher Titel rein-algebraisch mit Hilfe quadratischer Gleichungen, d. h. weder durch Reihenentwicklung noch durch Iteration, zu lösen.

Unter Verwendung folgender Bezeichnungen

K = Kurswert des Titels in Prozenten;

p_0 = Nominalzinsfuß pro Jahr in Prozenten;

n = Laufzeit in Jahren und

p = gesuchte Rendite in Prozenten,

besteht folgende *Näherungsformel*

$$\left(p - \frac{100(100 + p_0 - K)}{K}\right)^2 = \frac{100(n-1)^2}{K} (p - p_0) \left(p - \frac{100p_0}{K}\right). \quad (1)$$

Diese Gleichung liefert für $n = 1, 2$ und ∞ *exakte Werte* für p . Für $n = 1$ ergibt sich unmittelbar

$$p = \frac{100(100 + p_0 - K)}{K}.$$

Für $n = 2$ lautet die Gleichung

$$\left(p - \frac{100(100 + p_0 - K)}{K}\right)^2 = \frac{100}{K} (p - p_0) \left(p - \frac{100p_0}{K}\right)$$

oder, wenn zur Abkürzung $1 + \frac{p}{100} = r$ gesetzt und umgeformt wird:

$$\left(r - \frac{100 + p_0}{K}\right)^2 = \frac{1}{K} (100r - 100 - p_0) \left(r - 1 - \frac{p_0}{K}\right),$$

$$r^2 = \frac{p_0 r}{K} + \frac{100 + p_0}{K}.$$

Hieraus folgt die selbstverständliche Grundgleichung für K :

$$K = \frac{p_0}{r} + \frac{p_0}{r^2} + \frac{100}{r^2}.$$

Betrachtet man schliesslich den Grenzfall $n = \infty$, so geht die Beziehung (1) in die Gleichung über

$$(p - p_0) \left(p - \frac{100 p_0}{K} \right) = 0,$$

deren erste Wurzel $p = p_0$ formeller Natur, die zweite Wurzel $p = \frac{100 p_0}{K}$ hingegen die bekannte Rendite der ewigen Rente von p_0 % zum Kurswert K ist.

Zur Ableitung der erwähnten Beziehung (1), gehen wir von der Definitionsgleichung aus

$$K = p_0 a_{\overline{n}|} + 100 v^n, \quad (2)$$

in der

$a_{\overline{n}|}$ = Barwert der ganzjährigen n -maligen, nachschüssigen Einheitsrente;

$v = \frac{100}{100 + p}$ = Abzinsungsfaktor ist.

Anderseits gilt die identische Gleichung

$$100 = p a_{\overline{n}|} + 100 v^n, \quad (2')$$

so dass durch Subtraktion folgt

$$100 - K = (p - p_0) a_{\overline{n}|}$$

oder

$$\frac{p - p_0}{100 - K} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \quad (3)$$

Die gesuchte Rendite p ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K} \quad (4)$$

mit der Kurve n -ten Grades

$$C_n: y = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \quad (5)$$

Wir bringen die Kurve C_n zum Schnitt mit den Koordinatenachsen und erhalten

1. für die p -Achse $y = 0 : r^n = 0$, also $p = -100$.

Bei Werten $n \geq 2$ ist somit die p -Achse eine Tangente der Kurve C_n .

2. Für die y -Achse $p = 0 : y = \frac{1}{n}$.

Schreibt man ferner die Gleichung (5) in der Form

$$y = r - 1 + \frac{1}{\sum_0^{n-1} r^v},$$

so erkennt man, dass wenn $p \rightarrow \infty$, also auch $r \rightarrow \infty$ wird, die Gerade

$$y = r - 1 = \frac{p}{100}, \quad (6)$$

eine Asymptote der Kurve C_n ist.

Diese Asymptote, die Tangente im Punkte $P_1 \equiv P_2 (-100; 0)$ auf der p -Achse und der Schnittpunkt $S_n \left(0; \frac{1}{n}\right)$ bestimmen eine Hyperbel H_n , die man als Ersatzkurve für die Kurve C_n nehmen kann.

Diese Kurve H_n gehört einem Hyperbelnbüschel an, deren vier Grundpunkte sind

1. P_1 und P_2 auf der p -Achse und
2. U_1 und U_2 im Unendlichen auf der Asymptote $y = \frac{p}{100}$.

Sind allgemein $H = 0$ und $H^* = 0$ die Gleichungen von zwei beliebigen Exemplaren des Hyperbelnbüschels, so lautet die Gleichung desselben:

$$H - \lambda H^* = 0.$$

Als besondere Kegelschnitte wählen wir die beiden Geradenpaare $P_1 U_1 \times P_2 U_2$ und $P_1 P_2 \times U_1 U_2$. Da $P_1 U_1 \equiv P_2 U_2$ die Parallele zur Asymptote durch den Punkt P_1 bzw. P_2 ist, lautet die Gleichung des ersten Linienspaars

$$H \equiv \left(y - \frac{p + 100}{100} \right)^2 = 0.$$

Die zweite Hyperbel $P_1P_2 \times U_1U_2$ setzt sich aus der p -Achse und der Asymptote U_1U_2 zusammen, so dass ihre Gleichung folglich lautet

$$H^* \equiv y \left(y - \frac{p}{100} \right) = 0.$$

Die Gleichung des Hyperbelnbüschels ist also von der Form

$$\left(y - \frac{p+100}{100} \right)^2 - \lambda y \left(y - \frac{p}{100} \right) = 0.$$

Die Hyperbel H_n geht durch den Schnittpunkt $S_n \left(0; \frac{1}{n} \right)$, so dass sich für den Parameter λ folgende Bestimmungsgleichung ergibt

$$\left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2 - \lambda \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 0 \right) = 0,$$

also

$$\lambda = (n-1)^2.$$

Die gesuchte Hypergleichung heisst demnach

$$H_n : \left(y - \frac{p+100}{100} \right)^2 - (n-1)^2 y \left(y - \frac{p}{100} \right) = 0. \quad (7)$$

Durch Differentiation nach p der Gleichung (5) für C_n und (7) für H_n ergeben sich gleiche Richtungskoeffizienten, $\frac{n+1}{200n}$, für die Tangenten im Schnittpunkt S_n der beiden Kurven mit der y -Achse. Nachträglich stellt man also fest, dass die beiden Kurven C_n und H_n in drei Punkten sich berühren.

Indem aus den Gleichungen (4) und (7) die Grösse y eliminiert wird, resultiert die eingangs erwähnte Beziehung

$$\left(\frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p+100}{100} \right)^2 - (n-1)^2 \frac{p-p_0}{100-K} \left(\frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p}{100} \right) = 0$$

oder

$$\left(p - \frac{100(100+p_0-K)}{K} \right)^2 = \frac{100(n-1)^2}{K} (p-p_0) \left(p - \frac{100p_0}{K} \right). \quad (1)$$

Allgemein liefert die aufgestellte Formel (1) zu *grosse Werte von p bei $K < 100$ bzw. zu kleine Werte bei $K > 100$* . Diese Eigenschaft

folgt aus der Tatsache, dass im allgemeinen die Gleichung (7) für y zu grosse Werte ergibt.

Macht man in (7) die Substitution $y = \frac{1}{t}$, so ergibt sich

$$t^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200 r}{100 r^2} t - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} = 0. \quad (8)$$

Weil definitionsgemäss $y = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ ist, liefert die positive Wurzel der Gleichung (8) einen Näherungswert für den Rentenbarwert $a_{\overline{n}|}$. Für $n = 1, 2$ und ∞ ist dieser Wert exakt; für die übrigen Werte von n ist das Ergebnis stets zu klein. Lassen wir nämlich auf der linken Seite der Gleichung (8) t von 0 bis $a_{\overline{n}|}$ variieren, so wächst die linke Seite von

$$-\frac{(n-1)^2 - 1}{r^2}$$

bis

$$\begin{aligned} & a_{\overline{n}|}^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200 r}{100 r^2} a_{\overline{n}|} - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} \\ & \equiv (a_{\overline{n}|} - v)^2 + \frac{(n-1)^2 v^2 p}{100} a_{\overline{n}|} - (n-1)^2 v^2 \\ & \equiv a_{\overline{n-1}|}^2 v^2 + (n-1)^2 v^2 (1 - v^n) - (n-1)^2 v^2 \\ & \equiv (n-1)^2 v^2 \left[\left(\frac{a_{\overline{n-1}|}}{n-1} \right)^2 - v^n \right] \geq 0, \end{aligned}$$

das Gleichheitszeichen gilt für $n = 1, 2$ und ∞ , d. h. die positive Wurzel der Gleichung (8) liegt, jene drei Fälle ausgenommen, unter dem wahren Wert von $a_{\overline{n}|}$.

In der Gleichung (3)

$$\frac{p - p_0}{100 - K} \text{ bzw. } \frac{p_0 - p}{K - 100} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

ist der Näherungswert für $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ demzufolge im allgemeinen zu gross, so dass der erhaltene Wert für p zu gross bzw. zu klein, je nachdem K kleiner bzw. grösser als 100 ist.

Zahlenbeispiele für die Formel (8)

| p % | n | $a_{\overline{n} }$ nach Formel (8) | Genauer Wert von $a_{\overline{n} }$ | Fehler |
|----------|-----|--|---|--------|
| 3 | 15 | 11,876 | 11,938 | 0,062 |
| 4 | 15 | 11,026 | 11,118 | 0,092 |
| 5 | 15 | 10,258 | 10,380 | 0,122 |
| 3 | 20 | 14,757 | 14,877 | 0,120 |
| 5 | 20 | 12,246 | 12,462 | 0,216 |

Zahlenbeispiele für die Renditenformel (1)

| K | n | p_0 % | Rendite p nach Formel (1) % | Genauere Rendite % | Fehler |
|--------|-----|------------|-------------------------------------|--------------------------|---------|
| 109,71 | 5 | 3 | 1,000 | 1 | 0,000 |
| 127,73 | 15 | 3 | 0,999 | 1 | — 0,001 |
| 144,05 | 25 | 3 | 0,997 | 1 | — 0,003 |
| 158,82 | 35 | 3 | 0,994 | 1 | — 0,006 |
| 104,71 | 5 | 3 | 2,000 | 2 | 0,000 |
| 112,85 | 15 | 3 | 1,998 | 2 | — 0,002 |
| 119,52 | 25 | 3 | 1,994 | 2 | — 0,006 |
| 125,00 | 35 | 3 | 1,989 | 2 | — 0,011 |
| 95,55 | 5 | 3 | 4,000 | 4 | 0,000 |
| 88,88 | 15 | 3 | 4,006 | 4 | + 0,006 |
| 84,38 | 25 | 3 | 4,025 | 4 | + 0,025 |
| 81,34 | 35 | 3 | 4,063 | 4 | + 0,063 |
| 91,34 | 5 | 3 | 5,003 | 5 | + 0,003 |
| 79,24 | 15 | 3 | 5,028 | 5 | + 0,028 |
| 71,81 | 25 | 3 | 5,066 | 5 | + 0,066 |
| 67,25 | 35 | 3 | 5,101 | 5 | + 0,101 |
| 87,36 | 5 | 3 | 6,005 | 6 | + 0,005 |
| 70,86 | 15 | 3 | 6,059 | 6 | + 0,059 |
| 61,65 | 25 | 3 | 6,134 | 6 | + 0,134 |
| 56,51 | 35 | 3 | 6,194 | 6 | + 0,194 |
| 83,59 | 5 | 3 | 7,012 | 7 | + 0,012 |
| 63,37 | 15 | 3 | 7,096 | 7 | + 0,096 |
| 53,39 | 25 | 3 | 7,229 | 7 | + 0,229 |
| 48,21 | 35 | 3 | 7,315 | 7 | + 0,315 |

Die beigegebene schematische Zeichnung gestattet die Veranschaulichung des entwickelten Verfahrens. In der Gleichung des Strahlenbüschels um den Punkt $F_0(p_0; 0)$

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K}, \quad (4)$$

variiert der Parameter K zwischen 0 und $100 + np_0$.

Für $K = 0$ ist der Strahl parallel zur Asymptote $y = \frac{p}{100}$, d. h. p ist unendlich gross;

für $K < 100$, steigt der Strahl: p ist grösser als p_0 , aber zu gross;

für $K = 100$, ist der Strahl parallel zur y -Achse: p ist gleich p_0 ;

für $K > 100$, fällt der Strahl: p ist kleiner als p_0 , aber zu klein;

für $K = 100 + np_0$ ist die Rendite p gleich 0.

