Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 56 (1956)

Artikel: Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Autor: Kreis, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966832

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die vorliegende Untersuchung stellt einen Versuch dar, das Renditenproblem festverzinslicher Titel rein-algebraisch mit Hilfe quadratischer Gleichungen, d. h. weder durch Reihenentwicklung noch durch Iteration, zu lösen.

Unter Verwendung folgender Bezeichnungen

K = Kurswert des Titels in Prozenten;
p_0 = Nominalzinsfuss pro Jahr in Prozenten;
n = Laufzeit in Jahren und
p = gesuchte Rendite in Prozenten,

besteht folgende *Näherungsformel*

$$\left(p-\frac{100\,(100+p_0-K)}{K}\right)^2=\frac{100\,(n-1)^2}{K}\,(p-p_0)\left(p-\frac{100\,p_0}{K}\right). \quad (1)$$

Diese Gleichung liefert für $n = 1$, 2 und ∞ *exakte Werte* für p. Für $n = 1$ ergibt sich unmittelbar

$$p=\frac{100\,(100+p_0-K)}{K}.$$

Für $n = 2$ lautet die Gleichung

$$\left(p-\frac{100\,(100+p_0-K)}{K}\right)^2=\frac{100}{K}\,(p-p_0)\left(p-\frac{100\,p_0}{K}\right)$$

oder, wenn zur Abkürzung $1+\frac{p}{100}=r$ gesetzt und umgeformt wird:

$$\left(r-\frac{100+p_0}{K}\right)^2=\frac{1}{K}\,(100\,r-100-p_0)\left(r-1-\frac{p_0}{K}\right),$$

$$r^2=\frac{p_0\,r}{K}+\frac{100+p_0}{K}.$$

Hieraus folgt die selbstverständliche Grundgleichung für K:

$$K = \frac{p_0}{r} + \frac{p_0}{r^2} + \frac{100}{r^2}.$$

Betrachtet man schliesslich den Grenzfall $n = \infty$, so geht die Beziehung (1) in die Gleichung über

$$(p - p_0)\left(p - \frac{100\,p_0}{K}\right) = 0,$$

deren erste Wurzel $p = p_0$ formeller Natur, die zweite Wurzel $p = \frac{100\,p_0}{K}$ hingegen die bekannte Rendite der ewigen Rente von p_0 % zum Kurswert K ist.

Zur Ableitung der erwähnten Beziehung (1), gehen wir von der Definitionsgleichung aus

$$K = p_0\, a_{\overline{n}|} + 100\, v^n, \tag{2}$$

in der

$a_{\overline{n}|}$ = Barwert der ganzjährigen n-maligen, nachschüssigen Einheitsrente;

$v = \frac{100}{100 + p}$ = Abzinsungsfaktor ist.

Anderseits gilt die identische Gleichung

$$100 = p\, a_{\overline{n}|} + 100\, v^n, \tag{2'}$$

so dass durch Subtraktion folgt

$$100 - K = (p - p_0)\, a_{\overline{n}|}$$

oder

$$\frac{p - p_0}{100 - K} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \tag{3}$$

Die gesuchte Rendite p ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K} \tag{4}$$

mit der Kurve n-ten Grades

$$C_n : y = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \tag{5}$$

Wir bringen die Kurve C_n zum Schnitt mit den Koordinatenachsen und erhalten

1. für die p-Achse $y = 0 : r^n = 0$, also $p = -100$.

   Bei Werten $n \geqq 2$ ist somit die p-Achse eine Tangente der Kurve C_n.

2. Für die y-Achse $p = 0 : y = \frac{1}{n}$.

Schreibt man ferner die Gleichung (5) in der Form

$$y = r - 1 + \frac{1}{\sum\limits_0^{n-1} r^\nu},$$

so erkennt man, dass wenn $p \to \infty$, also auch $r \to \infty$ wird, die Gerade

$$y = r - 1 = \frac{p}{100}, \tag{6}$$

eine Asymptote der Kurve C_n ist.

Diese Asymptote, die Tangente im Punkte $P_1 \equiv P_2$ $(-100; 0)$ auf der p-Achse und der Schnittpunkt $S_n\left(0; \frac{1}{n}\right)$ bestimmen eine Hyperbel H_n, die man als Ersatzkurve für die Kurve C_n nehmen kann.

Diese Kurve H_n gehört einem Hyperbelnbüschel an, deren vier Grundpunkte sind

1. P_1 und P_2 auf der p-Achse und
2. U_1 und U_2 im Unendlichen auf der Asymptote $y = \frac{p}{100}$.

Sind allgemein $H = 0$ und $H^* = 0$ die Gleichungen von zwei beliebigen Exemplaren des Hyperbelnbüschels, so lautet die Gleichung desselben:

$$H - \lambda H^* = 0.$$

Als besondere Kegelschnitte wählen wir die beiden Geradenpaare $P_1U_1 \times P_2U_2$ und $P_1P_2 \times U_1U_2$. Da $P_1U_1 \equiv P_2U_2$ die Parallele zur Asymptote durch den Punkt P_1 bzw. P_2 ist, lautet die Gleichung des ersten Linienpaares

$$H \equiv \left(y - \frac{p + 100}{100}\right)^2 = 0.$$

Die zweite Hyperbel $P_1 P_2 \times U_1 U_2$ setzt sich aus der p-Achse und der Asymptote $U_1 U_2$ zusammen, so dass ihre Gleichung folglich lautet

$$H^* \equiv y\left(y - \frac{p}{100}\right) = 0.$$

Die Gleichung des Hyperbelnbüschels ist also von der Form

$$\left(y - \frac{p+100}{100}\right)^2 - \lambda y\left(y - \frac{p}{100}\right) = 0.$$

Die Hyperbel H_n geht durch den Schnittpunkt $S_n\left(0\,;\frac{1}{n}\right)$, so dass sich für den Parameter λ folgende Bestimmungsgleichung ergibt

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2 - \lambda \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 0\right) = 0,$$

also

$$\lambda = (n-1)^2.$$

Die gesuchte Hypergleichung heisst demnach

$$H_n : \left(y - \frac{p+100}{100}\right)^2 - (n-1)^2 y\left(y - \frac{p}{100}\right) = 0. \qquad (7)$$

Durch Differentiation nach p der Gleichung (5) für C_n und (7) für H_n ergeben sich gleiche Richtungskoeffizienten, $\frac{n+1}{200n}$, für die Tangenten im Schnittpunkt S_n der beiden Kurven mit der y-Achse. Nachträglich stellt man also fest, dass die beiden Kurven C_n und H_n in drei Punkten sich berühren.

Indem aus den Gleichungen (4) und (7) die Grösse y eliminiert wird, resultiert die eingangs erwähnte Beziehung

$$\left(\frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p+100}{100}\right)^2 - (n-1)^2 \frac{p-p_0}{100-K}\left(\frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p}{100}\right) = 0$$

oder

$$\left(p - \frac{100(100+p_0-K)}{K}\right)^2 = \frac{100(n-1)^2}{K}(p-p_0)\left(p - \frac{100\,p_0}{K}\right). \qquad (1)$$

Allgemein liefert die aufgestellte Formel (1) zu *grosse Werte von* p *bei* $K < 100$ bzw. *zu kleine Werte bei* $K > 100$. Diese Eigenschaft

folgt aus der Tatsache, dass im allgemeinen die Gleichung (7) für y zu grosse Werte ergibt.

Macht man in (7) die Substitution $y = \frac{1}{t}$, so ergibt sich

$$t^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200 r}{100 r^2} t - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} = 0. \tag{8}$$

Weil definitionsgemäss $y = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ ist, liefert die positive Wurzel der Gleichung (8) einen Näherungswert für den Rentenbarwert $a_{\overline{n}|}$. Für $n = 1$, 2 und ∞ ist dieser Wert exakt; für die übrigen Werte von n ist das Ergebnis stets zu klein. Lassen wir nämlich auf der linken Seite der Gleichung (8) t von 0 bis $a_{\overline{n}|}$ variieren, so wächst die linke Seite von

$$-\frac{(n-1)^2 - 1}{r^2}$$

bis

$$a_{\overline{n}|}^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200 r}{100 r^2} a_{\overline{n}|} - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2}$$

$$\equiv (a_{\overline{n}|} - v)^2 + \frac{(n-1)^2 v^2 p}{100} a_{\overline{n}|} - (n-1)^2 v^2$$

$$\equiv a_{\overline{n-1}|}^2 v^2 + (n-1)^2 v^2 (1 - v^n) - (n-1)^2 v^2$$

$$\equiv (n-1)^2 v^2 \left[\left(\frac{a_{\overline{n-1}|}}{n-1} \right)^2 - v^n \right] \geqq 0,$$

das Gleichheitszeichen gilt für $n = 1$, 2 und ∞, d. h. die positive Wurzel der Gleichung (8) liegt, jene drei Fälle ausgenommen, unter dem wahren Wert von $a_{\overline{n}|}$.

In der Gleichung (3)

$$\frac{p - p_0}{100 - K} \text{ bzw. } \frac{p_0 - p}{K - 100} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

ist der Näherungswert für $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ demzufolge im allgemeinen zu gross, so dass der erhaltene Wert für p zu gross bzw. zu klein, je nachdem K kleiner bzw. grösser als 100 ist.

Zahlenbeispiele für die Formel (8)

p %	n	$a_{\overline{n}\vert}$ nach Formel (8)	Genauer Wert von $a_{\overline{n}\vert}$	Fehler
3	15	11,876	11,938	0,062
4	15	11,026	11,118	0,092
5	15	10,258	10,380	0,122
3	20	14,757	14,877	0,120
5	20	12,246	12,462	0,216

Zahlenbeispiele für die Renditenformel (1)

K	n	p_0 %	Rendite p nach Formel (1) %	Genaue Rendite %	Fehler
109,71	5	3	1,000	1	0,000
127,73	15	3	0,999	1	— 0,001
144,05	25	3	0,997	1	— 0,003
158,82	35	3	0,994	1	— 0,006
104,71	5	3	2,000	2	0,000
112,85	15	3	1,998	2	— 0,002
119,52	25	3	1,994	2	— 0,006
125,00	35	3	1,989	2	— 0,011
95,55	5	3	4,000	4	0,000
88,88	15	3	4,006	4	+ 0,006
84,38	25	3	4,025	4	+ 0,025
81,34	35	3	4,063	4	+ 0,063
91,34	5	3	5,003	5	+ 0,003
79,24	15	3	5,028	5	+ 0,028
71,81	25	3	5,066	5	+ 0,066
67,25	35	3	5,101	5	+ 0,101
87,36	5	3	6,005	6	+ 0,005
70,86	15	3	6,059	6	+ 0,059
61,65	25	3	6,134	6	+ 0,134
56,51	35	3	6,194	6	+ 0,194
83,59	5	3	7,012	7	+ 0,012
63,37	15	3	7,096	7	+ 0,096
53,39	25	3	7,229	7	+ 0,229
48,21	35	3	7,315	7	+ 0,315

Die beigegebene schematische Zeichnung gestattet die Veranschaulichung des entwickelten Verfahrens. In der Gleichung des Strahlenbüschels um den Punkt $\Gamma_0(p_0\,;0)$

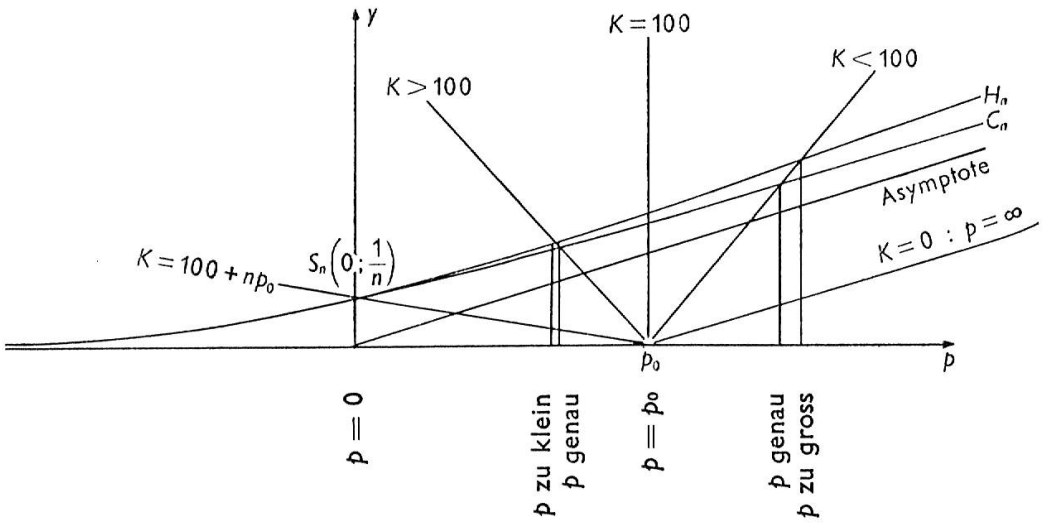
$$y = \frac{p - p_0}{100 - K}, \tag{4}$$

variiert der Parameter K zwischen 0 und $100 + np_0$.

Für $K = 0$ ist der Strahl parallel zur Asymptote $y = \frac{p}{100}$, d.h. p ist unendlich gross;

für $K < 100$, steigt der Strahl: p ist grösser als p_0, aber zu gross;

für $K = 100$, ist der Strahl parallel zur y-Achse: p ist gleich p_0;

für $K > 100$, fällt der Strahl: p ist kleiner als p_0, aber zu klein;

für $K = 100 + np_0$ ist die Rendite p gleich 0.