

# Ein Sequenz-Test zur Kontrolle von Ausscheidehäufigkeiten

Autor(en): **Wünsche, Günther**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **56 (1956)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966834>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ein Sequenz-Test zur Kontrolle von Ausscheidhäufigkeiten

Von Günther Wünsche, Berlin

Aus der Erkenntnis, dass alle Versicherungsvorgänge letzten Endes statistisches Geschehen widerspiegeln und somit bezüglich ihres zeitlichen Ablaufes ihre Fundierung in der Theorie der stochastischen Prozesse haben, wird im folgenden ein Verfahren entwickelt, das auf der Grundlage neuester mathematisch-statistischer Testmethodik die in der Praxis versicherungstechnisch und betriebswirtschaftlich durchaus bedeutungsvolle Aufgabe einer laufenden Überwachung der in die Kalkulation einbezogenen statistischen Rechnungsgrundlagen zweckentsprechend löst. Es handelt sich dabei um eine Methode, die auf der von A. Wald (vgl. z.B. [1]<sup>1</sup>), [2]) begründeten Sequential Analysis fusst und damit einen sogenannten Sequenz-Test darstellt, bei dem an die Stelle der stufenweisen Entnahmen aus einer Gesamtheit, wie sie etwa im Rahmen einer statistischen Qualitätskontrolle von Massenfabrikaten erfolgen, die sich ereignenden Ausscheidfälle (Schadensfälle) treten. Um die nachstehenden Entwicklungen von vornherein möglichst allgemein zu halten, wird zunächst bewusst davon abgesehen, eine spezielle Art von Fällen des Ausscheidens aus einer Gesamtheit, etwa Sterbefälle, Invalidisierungsfälle, Brandschadensfälle oder dergleichen ins Auge zu fassen. Nach Durchführung der allgemeinen Betrachtungen wird es sich von selbst ergeben, dass die praktische Anwendung noch an einem Beispiel zu zeigen ist. Zu diesem Zweck wird ein Bestand gleichaltriger bzw. in einer Altersgruppe zusammengefasster Rentner betrachtet, deren Sterblichkeit laufend überwacht werden soll.

---

<sup>1</sup>) Die Ziffern in eckigen Klammern [ ] beziehen sich auf die Literaturhinweise am Schluss der Arbeit.

Nehmen wir für das Folgende an, ein Versicherungsvorgang spiele sich so ab, dass innerhalb einer Gesamtheit versicherter Personen bzw. Objekte in einem Zeitintervall der festen Länge  $t$  genau  $n$  Ausscheidefälle eintreten, und bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit hierfür mit  $w(n,t)$ , so ist zunächst  $w(0,t)$  bzw.  $1 - w(0,t)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich im Zeitabschnitt der Länge  $t$  kein bzw. mindestens ein derartiger Fall ereignet. Wird weiter angenommen, dass der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - w(0,t)}{t} = \mu \quad (1)$$

existiert, wobei wir  $\mu$  die *Ausscheideintensität* nennen wollen, so gilt für ein hinreichend kleines Zeitintervall  $\tau$  die Beziehung

$$1 - w(0,\tau) = \mu\tau + \omega(\tau). \quad (2)$$

Die Grösse  $\omega(\tau)$  ist dabei von kleinerer Grössenordnung als  $\tau$ . (Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf der Zeitstrecke  $\tau$  mehr als ein Schadenereignis eintritt, wollen wir in der Grenze vernachlässigen.)

Nunmehr überlegt man sich aber leicht, dass dann die Relation

$$w(n,t + \tau) = w(n,t)(1 - \mu\tau) + w(n-1,t)\mu\tau + \omega(\tau) \quad (3 a)$$

bestehen muss, die durch Grenzübergang für  $\tau \rightarrow 0$  in

$$w'(n,t) = -\mu w(n,t) + \mu w(n-1,t) \quad (3 b)$$

übergeht, woraus schliesslich

$$w(n,t) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \quad (4)$$

folgt.

Damit ist aber festgestellt, dass wir es hier mit einem der einfachsten stochastischen Prozesse, nämlich dem sogenannten *Poisson-Prozess*, zu tun haben (vgl. auch J.L.Doob [3], W.Feller [4]), was letztlich nichts anderes bedeutet, als dass die stochastische Variable  $x(t)$  den Wert  $n$  gerade mit der durch (4) gegebenen Wahrscheinlichkeit annimmt. Unter  $x(t)$  ist dabei im vorliegenden Falle die Anzahl der sich im Zeitintervall  $t$  ereignenden Ausscheidefälle zu verstehen, wozu noch bemerkt sei, dass die in getrennt liegenden Zeitabschnitten der Länge  $t$  eintretenden Schadenereignisse als stochastisch unabhängig betrachtet werden. Dies wird im allgemeinen zutreffend sein, sofern man von anormalen Zeiten besonders epidemisch auftretender Aus-

scheidefälle absieht. Aber auch im Falle sogenannter Wahrscheinlichkeitsansteckung werden die Vorgänge approximativ durch Poisson-Prozesse ersetzt werden können.

Für die «SchadenvARIABLE»  $x(t)$  haben wir mithin die durch die Frequenzfunktion (4) bestimmte Verteilung gewonnen, und es erhebt sich nun die praktische Frage nach der Möglichkeit einer laufenden Überwachung dieses Poisson-Prozesses. Mit anderen Worten: Es soll ein Verfahren gefunden werden, das in zweckmässiger Weise eine Kontrolle darüber gestattet, ob der tatsächliche Verlauf der Schadenereignisse, den wir uns durch einen Wert  $\bar{\mu}$  für die Ausscheideintensität gekennzeichnet vorstellen können, als mit einem durch den vorgegebenen Wert  $\mu$  bestimmten vereinbar angesehen werden kann. Sobald dies nicht mehr hinreichend zutrifft, sollen dabei zu gegebener Zeit entsprechende «Warnsignale» erteilt werden.

In Verfolg der von A. Wald entwickelten Gedankengänge <sup>1)</sup> gehen wir dazu so vor, dass wir uns die Hypothese  $H_0$ , es sei  $\mu = \mu_0$ , sowie die Gegenhypothese  $H_1$ , es sei  $\mu = \mu_1$ , bilden und in bestimmter Weise die Folge der laufend eintretenden Schadenereignisse (Ausscheidefälle) registrieren. Nach Ablauf einer gewissen Zeitdauer, die von vornherein nicht festliegt, wird es dann möglich sein, eine Entscheidung zu treffen, ob die Hypothese  $H_0(\mu = \mu_0)$  oder die Hypothese  $H_1(\mu = \mu_1)$  als «wahr» angenommen wird. Die bis zur Entscheidung notwendige Anzahl von Beobachtungen bzw. die bis dahin erforderliche Zeitdauer ist, wie man erkennt, dabei selbst eine stochastische Veränderliche.

Mit  $\mu = \mu_0$  bzw.  $\mu = \mu_1$  ist nun

$$w_0[x(t), t] = e^{-\mu_0 t} \frac{(\mu_0 t)^{x(t)}}{x(t)!} \quad (5 a)$$

bzw.

$$w_1[x(t), t] = e^{-\mu_1 t} \frac{(\mu_1 t)^{x(t)}}{(x)t!} \quad (5 b)$$

und es folgt

$$Q = \frac{w_1[x(t), t]}{w_0[x(t), t]} = \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{x(t)} e^{-(\mu_1 - \mu_0)t}. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Wir gewinnen hier übrigens eine interessante Variation des Waldschen Prinzips insofern, als für die «Ziehungen» sozusagen die Zeit als «Urne» zu betrachten ist.

Den Wert dieses Wahrscheinlichkeits-Verhältnisses denken wir uns für zunehmendes  $t$ , beginnend bei  $t = 0$ , fortlaufend bestimmt. Dabei zeigt es sich, dass in einem gewissen Zeitpunkt

$$Q \leq A_0 \quad (7 \text{ a})$$

oder aber auch

$$Q \geq A_1 \quad (7 \text{ b})$$

sein wird, was die Beendigung der aufeinanderfolgenden Beobachtungen anzeigt.

$A_0$  und  $A_1$  sind dabei die beiden aus den Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  gebildeten Grössen

$$A_0 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} \quad (8 \text{ a})$$

und

$$A_1 = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}. \quad (8 \text{ b})$$

Unter  $\alpha_0$  bzw.  $\alpha_1$  wird die Wahrscheinlichkeit verstanden, die Hypothese  $H_0$  zu verwerfen, obwohl sie wahr ist, und folglich die Gegenhypothese  $H_1$  anzunehmen bzw. die wahre Hypothese  $H_1$  zu verwerfen und sich irrtümlich für die Gegenhypothese  $H_0$  zu entscheiden (Fehler 1. und 2. Art).

Solange jedoch noch

$$A_0 \leq Q \leq A_1 \quad (9)$$

gilt, was anfangs stets der Fall ist, kann eine Entscheidung noch nicht getroffen werden, und die Beobachtungen sind fortzusetzen.

Praktisch verfährt man nun so, dass aus (6) zunächst einmal gewonnen wird

$$\ln Q = -(\mu_1 - \mu_0)t + x(t) \ln \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad (10)$$

womit sich ergibt:

Die Hypothese  $H_0$  ist anzunehmen ( $H_1$  wird abgelehnt), wenn

$$x(t) \ln \frac{\mu_1}{\mu_0} - (\mu_1 - \mu_0)t \leq \ln \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}$$

oder

$$x(t) \leq kt - h_0 \quad (11 \text{ a})$$

$$\text{mit } k = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0}, \quad h_0 = \frac{\ln \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_1}}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0};$$

die Hypothese  $H_1$  ist anzunehmen ( $H_0$  wird abgelehnt), wenn

$$x(t) \ln \frac{\mu_1}{\mu_0} - (\mu_1 - \mu_0)t \geq \ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}$$

oder

$$x(t) \geq kt + h_1 \quad (11b)$$

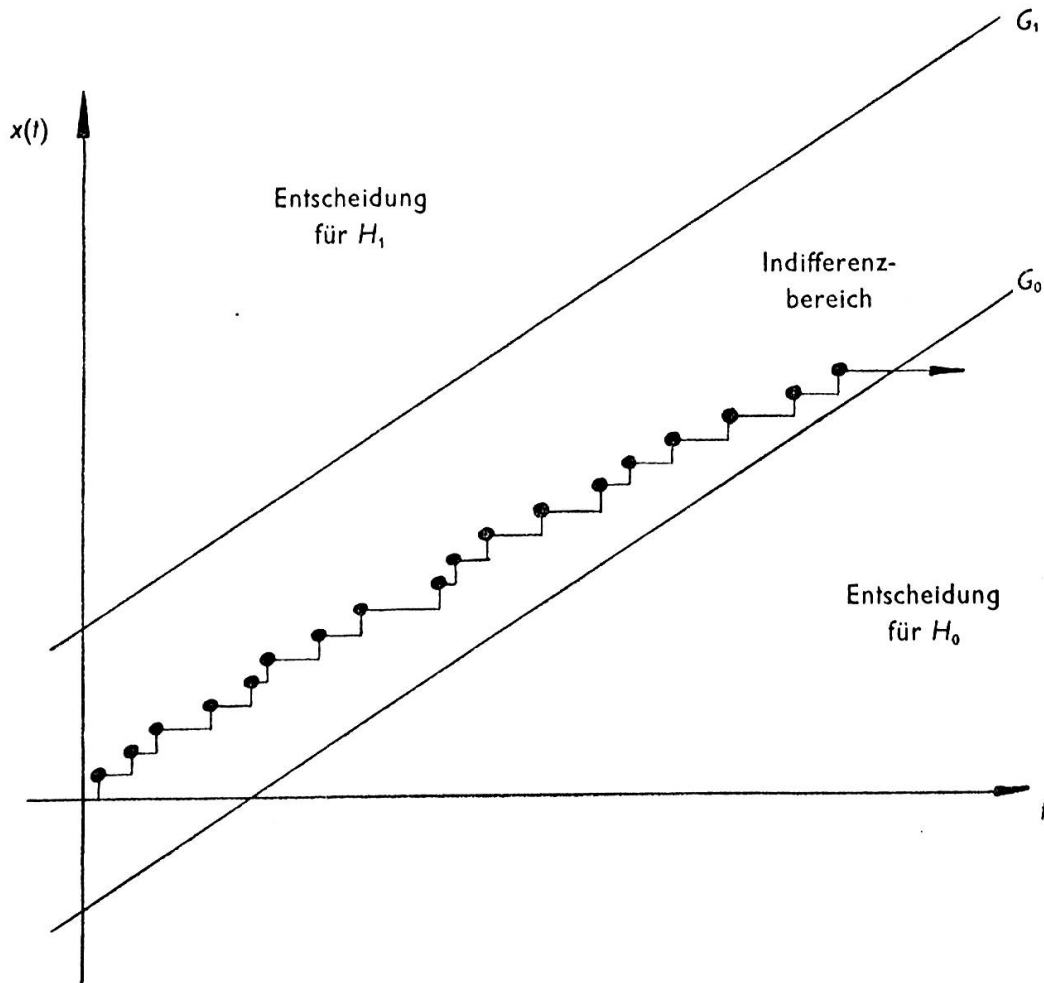
$$\text{mit } k = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0}, \quad h_1 = \frac{\ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0}.$$

Geometrisch bedeutet dies aber, dass wir in einer Koordinatenebene mit nach der Zeit  $t$  geteilter Abszissenachse und nach der Zahl der Ausscheidefälle  $x(t)$  bezifferter Ordinatenachse die beiden durch  $x(t) = kt - h_0$  und  $x(t) = kt + h_1$  gegebenen parallelen «Entscheidungsgeraden»  $G_0$  und  $G_1$  festzulegen haben. Und zwar sieht man, dass diese beiden Geraden  $G_0$  und  $G_1$  durch  $\mu_0$  und  $\mu_1$  sowie  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  eindeutig bestimmt sind. Das Wertequadrupel  $(\mu_0, \mu_1; \alpha_0, \alpha_1)$  nennt man daher auch den sogenannten *Testplan*.

Trägt man, wie dies Abb.1 veranschaulichen soll, in das Koordinatensystem, das die beiden zuvor bestimmten Entscheidungsgeraden  $G_0$  und  $G_1$  enthält, die Stufenkurve der Ausscheidefälle ein – jedesmal, wenn sich ein Schadenfall (Ausscheidefall) ereignet, steigt die Stufenkurve um eine Einheit –, so wird nach Ablauf einer gewissen Beobachtungszeit der Kurvenzug entweder durch  $G_0$  oder  $G_1$  hindurchtreten. In diesem Moment fällt dann die Entscheidung, entweder zugunsten der Hypothese  $H_0$  oder zugunsten der Hypothese  $H_1$ . Das zwischen den beiden Geraden  $G_0$  und  $G_1$  gelegene Gebiet, innerhalb dessen eine Entscheidung noch nicht getroffen werden kann, bezeichnet man als den *Indifferenzbereich*.

Man erkennt jedenfalls bereits aus den vorangehenden Entwicklungen, dass der Testplan, d.h. die vorgegebenen Werte  $\mu_0$  und  $\mu_1$  sowie die Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$ , dafür bestimmend ist, mit welcher «Schärfe» und nach Ablauf welcher Zeit, d. h. mit welcher «Reaktionsgeschwindigkeit», die eine oder andere Entscheidung getroffen wird. Wir wollen diese Tatsache, die gerade für die praktische Anwendung des Verfahrens von nicht geringer Bedeutung ist, besonders hervorheben.

Abb. 1. Geometrische Darstellung des Testvorganges



Ergänzend zu den vorstehenden Ausführungen sei des weiteren an dieser Stelle vermerkt, dass als Einheit für den Zeitmaßstab auf der Abszissenachse zweckdienlich sogleich das sogenannte «Risiko-jahr» zu wählen ist, wodurch, wie man leicht einsieht, der Umfang des Versicherungsbestandes, an dem die Beobachtungen vorgenommen werden, zwangsläufig entsprechende Berücksichtigung findet. Unter einem Risikojahr soll dabei  $1/N$  des normalen Kalenderjahres verstanden werden, wenn der der Beobachtung unterworfenen Bestand  $N$  versicherte Personen bzw. Objekte umfasst. Dass der so gewählte Zeitmaßstab bei erheblicheren Bestandsveränderungen im Laufe der Durchführung der Beobachtungen gegebenenfalls entsprechende Änderungen erfahren muss, werde nur der Vollständigkeit halber noch besonders erwähnt.

Ohne hier im einzelnen in eine Diskussion aller Möglichkeiten einzutreten, die sich im praktischen Falle für die Wahl eines bestimmten Testplanes  $(\mu_0, \mu_1; \alpha_0, \alpha_1)$  darbieten, wollen wir festhalten, dass die Steigung  $k$  der Entscheidungsgeraden allein durch  $\mu_0$  und  $\mu_1$  festgelegt wird, während sowohl ihre Abschnitte  $-h_0$  und  $h_1$  auf der  $x(t)$ -Achse als auch die Breite des Indifferenzstreifens erst eindeutig gegeben sind, wenn auch noch über die Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  entsprechend verfügt ist. Man erkennt übrigens ferner, dass speziell für  $\alpha_0 = \alpha_1$  auch  $h_0 = h_1$  ist, die Abschnitte der Entscheidungsgeraden auf der  $x(t)$ -Achse mithin, absolut genommen, gleich gross werden.

Von ausschlaggebender Bedeutung für die Wahl eines geeigneten Testplanes wird neben der Forderung einer gewissen Schärfe, mit der zu gegebener Zeit die Entscheidung getroffen werden soll und wofür uns die sogenannten Operations-Charakteristiken (OC-Funktionen) wertvolle Anhaltspunkte liefern, nun aber sein, dass man über den Arbeits-, Zeit- und damit Kostenaufwand für die Durchführung des Verfahrens die notwendige Klarheit gewinnt. Dazu wird man die Schar der weiteren, dem Testprozess eigentümlichen «Kennlinien» heranziehen, die den Erwartungswert der bis zur Entscheidung benötigten Zeit in Abhängigkeit vom wahren Wert des Parameters  $\mu$  und von den als Hypothesen  $H_0$  und  $H_1$  zugrunde gelegten Parameterwerten  $\mu_0$  und  $\mu_1$  sowie den Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  liefern. Insbesondere wird es wichtig sein, das Maximum dieses Erwartungswertes als Funktion von  $\mu_0, \mu_1, \alpha_0$  und  $\alpha_1$  zu kennen, um so von vornherein hinreichend darüber Aufschluss zu erhalten, mit welcher längsten Zeitdauer bis zur Beendigung des Testprozesses bei vorgegebenem Testplan im Mittel zu rechnen sein wird. Wir beschränken uns im Rahmen vorliegender Ausführungen deshalb auch auf die Betrachtung dieses Maximalwertes in seiner Abhängigkeit vom Testplan  $(\mu_0, \mu_1; \alpha_0, \alpha_1)$ , ohne eine hier zu weit führende Herleitung und Diskussion der vollständigen «Prüfzeit»-Funktion, wie wir sie nennen wollen, zu geben <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Eine besondere Arbeit des Verfassers wird sich ausführlich mit der Ableitung und nomographischen Behandlung der kennzeichnenden Funktionen («Kennlinien») beschäftigen, die den für die Versicherungstechnik wichtigen Sequenz-Testprozessen zugeordnet sind.



Das Maximum  $T$  des Erwartungswertes der Zeitdauer bis zur Entscheidung ergibt sich auf Grund des im Bereich praktischer Anwendungen ausreichend genauen Näherungsausdruckes

$$T \approx \frac{\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_1} \ln \frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}}{(\mu_1-\mu_0) \ln \frac{\mu_1}{\mu_0}}, \quad (12)$$

für den vom Verfasser bei früherer Gelegenheit bereits die Grundlagen für mehrere Möglichkeiten zweckentsprechender nomographischer Vertafelung in Gestalt eines «Doppelzeiger-Nomogramms» entwickelt wurden (vgl. G.Wünsche [5]). Wir können uns deshalb in diesem Zusammenhang auf die Bemerkung beschränken, dass eine derartige nomographische Rechentafel in gebrauchsfertiger Ausgestaltung neben der Ermittlung des angegebenen Näherungswertes für  $T$  vor allem auch einen vollkommenen Überblick über dessen Abhängigkeit von sämtlichen Kombinationsmöglichkeiten der Grössen  $\mu_0, \mu_1, \alpha_0$  und  $\alpha_1$  gestattet, was naturgemäss für die Testplanung von besonderer Bedeutung ist. Für unseren Zweck genügt es, im Augenblick den Verlauf des Maximalwertes  $T$  einmal unter der Annahme fester Werte  $\mu_0$  und  $\mu_1$  und zum anderen für bestimmte Werte der Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  festzuhalten. Die in den Abbildungen 2 und 3 wiedergegebenen graphischen Darstellungen zeigen insbesondere die Verhältnisse für den Fall, dass  $\mu_0 = 0,029$ ;  $\mu_1 = 0,042$  bzw. dass  $\alpha_0 = 2\%$ ;  $\alpha_1 = 5\%$ .

Sowohl der Ausdruck (12) lehrt als auch aus den graphischen Schaubildern ist zu entnehmen, dass bei vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  das Maximum des Erwartungswertes der bis zur Entscheidung benötigten Beobachtungszeit immer grössere Werte annimmt, je geringer der Unterschied zwischen den beiden hypothetischen Grössen  $\mu_0$  und  $\mu_1$  ist. Das heisst, dass umgekehrt bei konstanten Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Fehlers 1. oder 2. Art die Entscheidung im Mittel um so schneller fällt, je weiter die die beiden Hypothesen kennzeichnenden Werte  $\mu_0$  und  $\mu_1$  auseinander liegen. Schliesslich stellen wir fest, dass, was ebenfalls unmittelbar einleuchtet, bei festgehaltenem  $\mu_0$  und  $\mu_1$  die Entscheidung nach um so kürzerer Beobachtungszeit herbeigeführt werden kann, eine je grössere Wahrscheinlichkeit für einen dabei zu begehenden Fehler 1. bzw. 2. Art wir in Kauf zu nehmen gewillt sind.

Abb. 2. Maximalwerte  $T$  für  $\mu_0 = 0,029$ ,  $\mu_1 = 0,042$

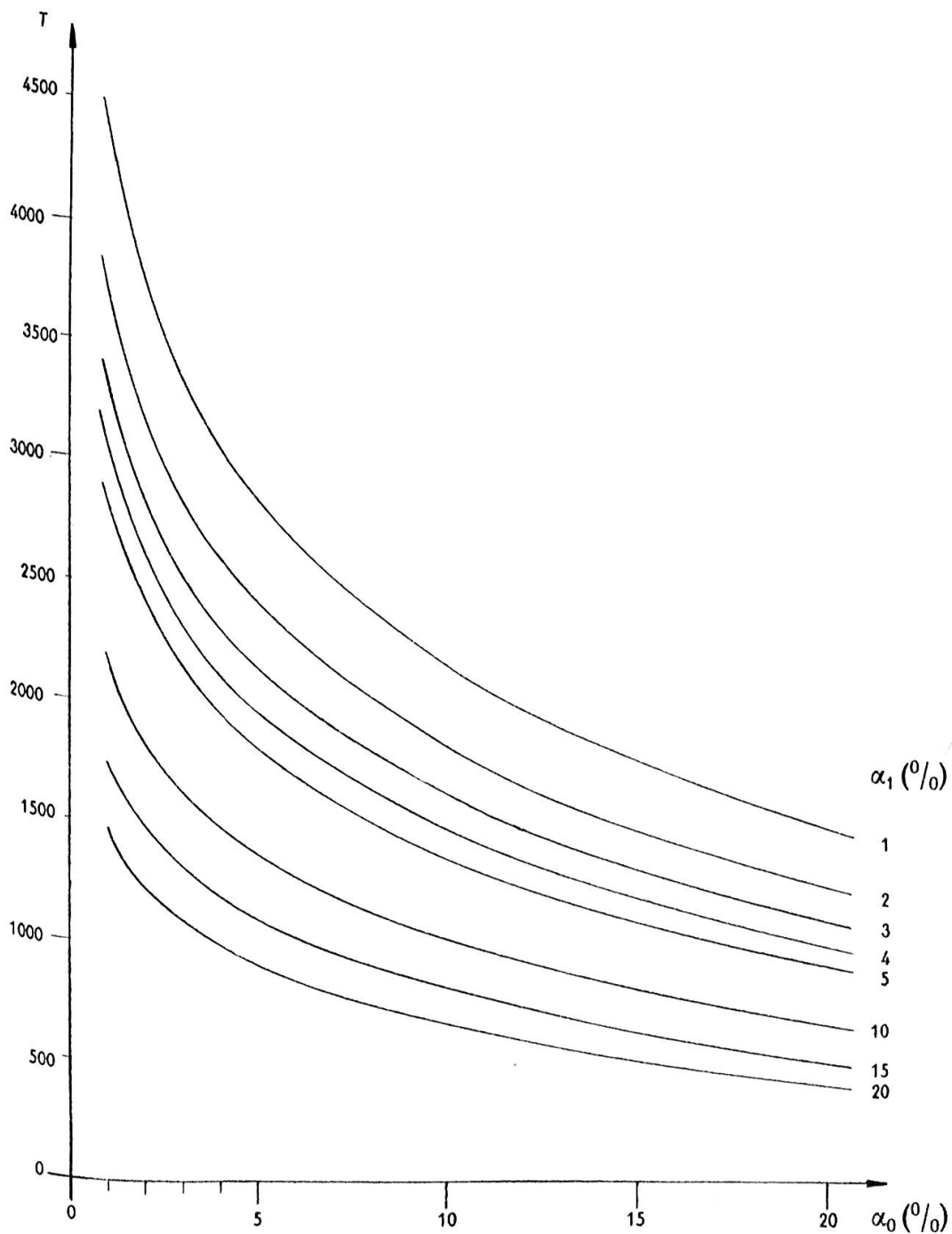
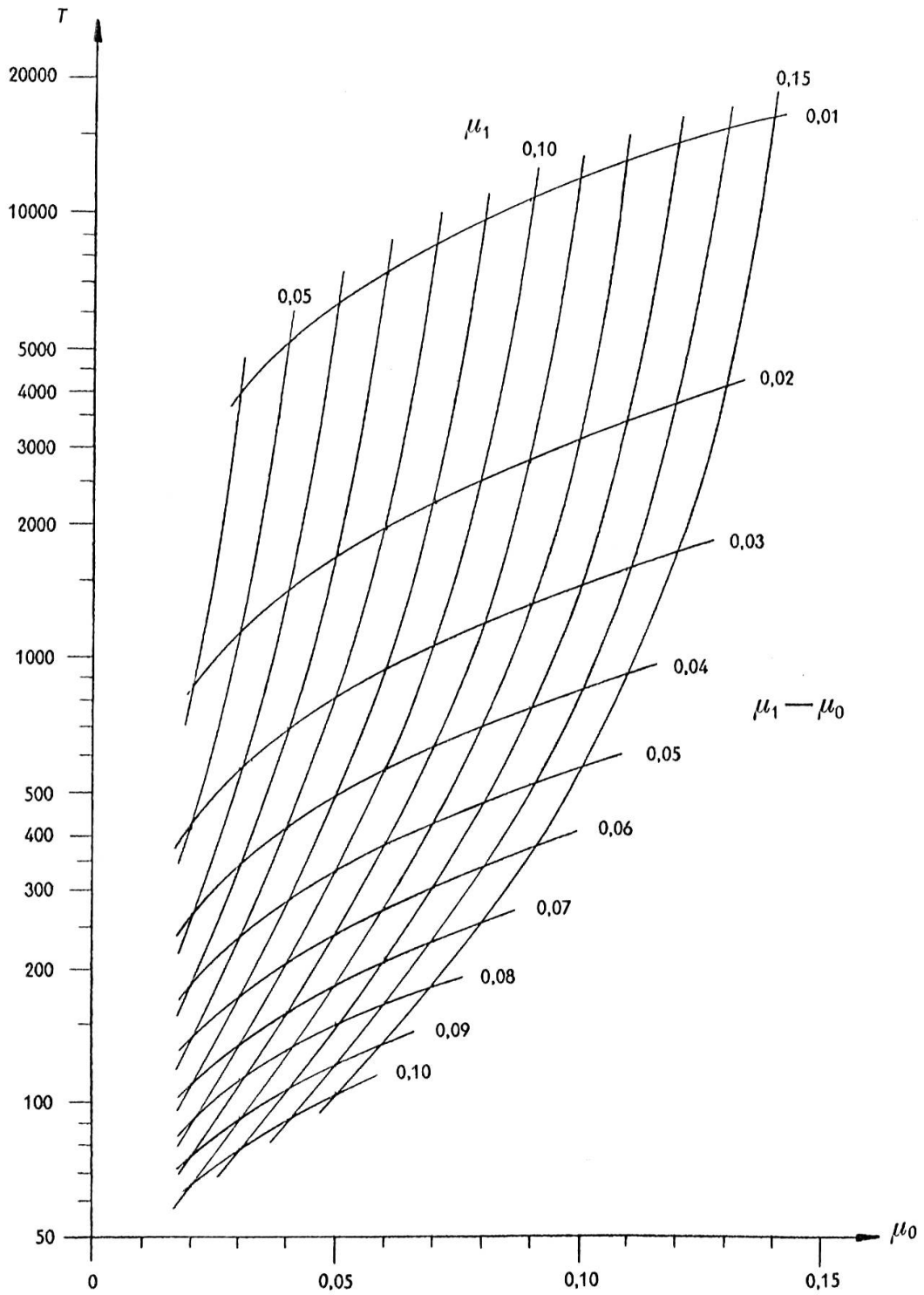


Abb. 3. Maximalwerte  $T$  für  $\alpha_0 = 2\%$ ,  $\alpha_1 = 5\%$



Zum Abschluss unserer Darlegungen soll nun als Beispiel für eine praktische Anwendung des beschriebenen Sequenz-Tests noch gezeigt werden, in welcher Weise es möglich ist, die laufende Kontrolle der Sterblichkeit in einem Versichertenbestand – es sei zu diesem Zwecke ein durch eine bestimmte Altersklasse gekennzeichneteter Rentnerbestand betrachtet – durchzuführen.

Wir nehmen an, es handle sich um einen Rentnerbestand, für den wir bezüglich der Ausscheideintensität (Sterbensintensität) die Hypothesen  $H_0: \mu_0 = 0,029$  und  $H_1: \mu_1 = 0,042$  treffen. Für die Irrtumswahrscheinlichkeiten werde dabei einmal  $\alpha_0 = \alpha_1 = 5\%$  (Fall I) und zum anderen  $\alpha_0 = 2\%$ ,  $\alpha_1 = 5\%$  (Fall II) angesetzt. Da es mit Rücksicht auf die zu ziehenden Folgerungen wesentlich erscheinen mag, das «Fehlerrisiko» für eine Ablehnung der Hypothese  $H_0$ , falls diese wahr ist, kleiner zu halten als für die Ablehnung von  $H_1$ , wird man in der Praxis hier zweckdienlich stets  $\alpha_0 < \alpha_1$  festsetzen. Die angegebenen Prozentwerte der Irrtumswahrscheinlichkeiten entsprechen dabei in etwa den praktischen Erfordernissen. In den beiden vorgenannten Fällen I und II erhalten wir damit für die «Entscheidungsgeraden»  $G_0$  und  $G_1$  die numerischen Ergebnisse:

<i>Fall I</i>	<i>Fall II</i>
$G_0: x(t) = 0,0351 \cdot t - 7,95;$	$x(t) = 0,0351 \cdot t - 8,04;$
$G_1: x(t) = 0,0351 \cdot t + 7,95;$	$x(t) = 0,0351 \cdot t + 10,42.$

Das bedeutet aber, wenn wir im Augenblick einmal davon absehen, den Testvorgang geometrisch zu interpretieren (vgl. Abb. 1), dass sich durch Auswertung der angegebenen Beziehungen für die Fälle I und II die nachstehende Tafel von *Entscheidungszahlen* für die auftretenden Ausscheidefälle ermitteln lässt:

Beobachtungszeit $t$ in «Risiko-jahren»	Fall I		Fall II	
	Annahme von $H_0$	Annahme von $H_1$	Annahme von $H_0$	Annahme von $H_1$
0	—	8	—	11
100	—	12	—	14
200	—	15	—	18
300	2	19	2	21
400	6	22	6	25
500	9	26	9	28
600	13	30	13	32
700	16	33	16	35
800	20	37	20	39
900	23	40	23	43
1000	27	44	27	46
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1500	44	61	44	64
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(1800)	(55)	(72)	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2000	62	79	62	81
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(2386)	...	...	(75)	(95)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2500	79	96	79	99
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3000	97	114	97	116
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Wie man durch leichte Rechnung oder durch einfache Ablesung aus der graphischen Darstellung der Abb. 2 findet, liegt das Maximum des Erwartungswertes der Beobachtungszeit bis zur Entscheidung im Falle I bei 1800 «Risiko-jahren» und im Falle II bei 2386 «Risiko-jahren», was besagt, dass bei einem Beobachtungsbestand von beispielsweise 1200 Rentnern die Entscheidung zugunsten der einen oder anderen Hypothese im Mittel nach Ablauf einer Zeit von höchstens etwa  $1\frac{1}{2}$  bzw. 2 Kalenderjahren zu erwarten ist. Oder mit anderen Worten (vgl. dazu die angegebene Tafel der Entscheidungszahlen): Es bedarf im Falle I durchschnittlich der Beobachtung von höchstens 55 bzw. 72 Ausscheidefällen, um den Testprozess zu beenden und sich

für die Annahme der Hypothese  $H_0$  bzw.  $H_1$  zu entscheiden. Im Falle II, der bezüglich der Entscheidung zugunsten der Hypothese  $H_0$ , falls diese wahr ist, eine kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit vorsieht, stellen sich die entsprechenden Zahlen auf 75 bzw. 95 Ausscheidefälle.

Damit ist aber sowohl theoretisch als auch mit Bezug auf ein praktisches Anwendungsbeispiel erneut dargetan, dass die Sequenz-Testmethodik, die bekanntlich im Bereich der laufenden Qualitätskontrolle industrieller Massenfabrikate eine hervorragende Rolle spielt, auch für versicherungstechnische Prüfverfahren, die entsprechende Grundlage bilden kann. Wir haben insbesondere gesehen, dass eine laufende Überwachung des stochastischen Ausscheideprozesses, wie er uns im Versicherungswesen zum Beispiel bei der Beobachtung des zeitlichen Verlaufs eines bestimmten Schadenanfalls begegnet, auf diesem Wege durchaus möglich ist. Berücksichtigt man dabei noch, dass, wie vom Verfasser ebenfalls bereits an anderer Stelle (vgl. G. Wünsche [6]) ausgeführt wurde, bei Anwendung eines Sequenz-Testverfahrens an Stelle einer herkömmlichen Prüfmethode auf Stichprobenbasis im allgemeinen etwa 50 bis 60% an Beobachtungsaufwand eingespart werden kann, so wird man alle Wirtschaftlichkeitsanforderungen, die zu stellen sind, als hinreichend erfüllt ansehen können. Von wesentlicher und allgemeiner Bedeutung dürfte dazu noch die Bemerkung sein, dass damit eine Möglichkeit aufgezeigt ist, auch den zeitlichen Ablauf *stochastischer Prozesse* einer rationellen Kontrolle zu unterwerfen.

### Literaturhinweise

- [1] A. Wald: Sequential Tests of Statistical Hypotheses, The Ann. of Math. Stat., 1945.
- [2] A. Wald: Sequential Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947.
- [3] J. L. Doob: Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.
- [4] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
- [5] G. Wünsche: Bemerkungen über nomographische Verfahren zur rationellen Sequentialtest-Planung, Mitt.-Bl. f. math. Stat., 4. Jg., Heft 2/3, 1952.
- [6] G. Wünsche: Sequential-Testverfahren in der Versicherungstechnik, Bl. d. Dtsch. Ges. f. Vers.-Math., Bd. 1, Heft 4, 1953.

