

# Zur maschinellen Auflösung des Zinsfussproblems

Autor(en): **Amsler, M.H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **56 (1956)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966838>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zur maschinellen Auflösung des Zinsfussproblems

Von *M. H. Amsler*, Zürich

Nachdem den Versicherungsgesellschaften die Anschaffung von programmgesteuerten Rechenmaschinen für allgemeine Verwaltungsarbeiten möglich gemacht worden ist, ist dem Versicherungsmathematiker die Aufgabe zuteil geworden, die Zweckmässigkeit des Einsetzens solcher Rechengerate für mathematische Berechnungen zu untersuchen und gegebenenfalls Berechnungsmethoden auszudenken, die den Erfordernissen der zur Verfügung stehenden Rechenmaschine angepasst sind. Unter programmgesteuerter Rechenmaschine wird allgemein eine Maschine verstanden, die ausser der Ausführung fundamentaler arithmetischer Operationen (Addition, Multiplikation usw.) auch die Zusammensetzung dieser Grundoperationen nach einem im voraus festgesetzten Rechenplan (Programm) besorgt, wobei die Reihenfolge der verschiedenen rechnerischen und logischen Operationen von den errechneten Resultaten abhängig gemacht werden können.

Das Zinsfussproblem ist eine der versicherungsmathematischen Aufgaben, die heutzutage sowohl dem Theoretiker wie auch dem Praktiker manche Schwierigkeiten bereiten, was aus der Mannigfaltigkeit der diesem Thema gewidmeten Veröffentlichungen hervorgeht.

Beim Zinsfussproblem handelt es sich darum, bei Vorliegen zeitlich gestaffelter Leistungen die Abhängigkeit zwischen dem *Diskontsatz* und dem diesem Diskontsatz entsprechenden *Barwert* der betreffenden Leistungen abzugrenzen.

Die bei diesem Problem am häufigsten entwickelten Auflösungsverfahren bestehen darin, die Abhängigkeit zwischen Diskontsatz und Barwert durch Näherungsfunktionen folgender Form zu approximieren

$$B = f(d), \quad (1)$$

wo  $B$  bzw.  $d$  den Barwert bzw. den Diskontsatz bedeuten (Polynome, Potenzreihen oder Lösungen gewisser Differentialgleichungen wie bei der Poukkaschen Theorie). Solche Methoden liefern fertige Näherungsfunktionen, die in der Praxis wertvolle Dienste leisten. Diese klassischen Methoden sind indessen mit allerlei Nachteilen behaftet, erstens einmal lösen sie das Problem nur näherungsweise, und ausserdem erteilen sie über den gemachten Fehler oft keine hinreichenden Auskünfte. Ferner, wenn Ausdrücke vom Typus (1) für die Berechnung von Barwerten aus dem Diskontsatz (direkte Aufgabe des Zinsfussproblems) leicht auffindbar sind, so ist die Umkehrung

$$d = f^{-1}(B) \tag{2}$$

solcher Formeln für die Berechnung des Diskontsatzes bei vorgegebenem Barwert  $B$  (Umkehraufgabe des Zinsfussproblems) oft umständlich, sogar exakt nicht durchführbar. Schliesslich wurde bis heute eine so grosse Anzahl derartiger Formeln abgeleitet, dass es manchmal schwierig ist, für eine konkrete Berechnung die «richtige» Formel zu finden.

Bei dem unten entwickelten Verfahren handelt es sich im Gegensatz zu den obenerwähnten klassischen Methoden nicht um die Ableitung und Auswertung von formelmässigen Näherungsfunktionen, sondern um die Entwicklung eines rein numerischen Algorithmus, welcher vom Diskontsatz zum Barwert und umgekehrt führt. Sein Anreiz besteht darin, dass er bei den in der Praxis am häufigsten auftretenden Fällen (Leibrentenbarwerte oder mathematische Kurse fest verzinslicher Effekten) die exakte Lösung des Problems liefert – sofern in der numerischen Mathematik von einer exakten Lösung die Rede sein kann.

Methodisch beruht das vorgeschlagene Verfahren auf äusserst elementaren mathematischen Hilfsmitteln; es kann etwa wie folgt umschrieben werden: aus einem ersten, sonst beliebigen Näherungswert wird auf Grund logischer, eindeutig festgesetzter Vorschriften ein zweiter, besserer Näherungswert ermittelt, welcher selbst weiter verbesserungsfähig ist (Iteration). Diese Vorschriften sind ferner so gestaltet, dass nach endlich vielen Iterationsschritten Werte in beliebiger Nähe der exakten Lösung erreicht werden d. h., dass das Verbesserungsverfahren konvergiert. Bei solchen iterativen Methoden stellt der Beweis der Konvergenz den springenden Punkt der ganzen Betrachtung dar.

## § 1. Die Methode

### *Zur direkten Aufgabe*

(Berechnung des Barwertes bei vorgegebenem Diskontsatz)

Die Berechnung von Barwerten nach der üblichen Formel

$$B_n(v) = \sum_{t=0}^n c_t v^t, \quad (\text{I})$$

wobei  $c_t$  die  $t$  Jahre nach dem Berechnungszeitpunkt fällig werdenden Leistungen und  $v$  den Abzinsungsfaktor bedeuten, setzt voraus, dass Tabellen mit den verschiedenen Potenzen  $v^t$  des Diskontierungsfaktors zur Verfügung stehen bzw. vorgerechnet werden. Um solche Vorberechnungen zu umgehen, wird der Formel (I) folgender Ausdruck vorgezogen

$$B_n(v) = \{[(c_n v + c_{n-1}) v + c_{n-2}] v + \dots + c_1\} v + c_0,$$

bei welchem der Abzinsungsfaktor  $v$  formal ausschliesslich in der ersten Potenz erscheint. Nach letzterer Gleichung lässt sich der Barwert  $B_n(v)$  als  $n$ -tes Glied folgender Rekursion ausdrücken:

$$\left. \begin{array}{l} B_{k+1} = B_k v + c_{n-(k+1)} \\ B_0 = c_n \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{II})$$

Wie leicht ersichtlich ist, stellen die Zwischenwerte  $B_k$  die Barwerte zur Zeit  $n-k$  der auf die  $k$  letzten Jahre entfallenden Leistungen dar.

Als Vorbereitung für die Behandlung der Umkehraufgabe geben wir die durch Ableitung der Rekursion (II) nach  $v$  sich ergebende

Rekursionsformel für den Differentialquotienten  $\frac{dB_n}{dv} = B'_n$  bekannt

$$\left. \begin{array}{l} B'_{k+1} = B'_k v + B_k \\ B'_0 = 0 \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{III})$$

Das Berechnungsverfahren nach Formeln (II) und (III) entspricht dem im Horner'schen Schema enthaltenen Algorithmus für die Auswertung von Polynomen samt ihren Ableitungen; es ist als Rekursionsverfahren für Berechnungen mit programmgesteuerten Rechenmaschinen besonders geeignet.

*Zur Umkehraufgabe*

(Berechnung des Diskontsatzes bei vorgegebenem Barwert)

Wird umgekehrt bei vorgegebenem Leistungsplan  $c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_n$  nach dem Diskontsatz gesucht, welcher einem bestimmten Barwert  $B$  entspricht, so wird die Aufgabe auf die Auflösung folgender algebraischer Gleichung für  $v$  zurückgeführt

$$\sum_{t=0}^n c_t v^t = B, \quad (\text{IV})$$

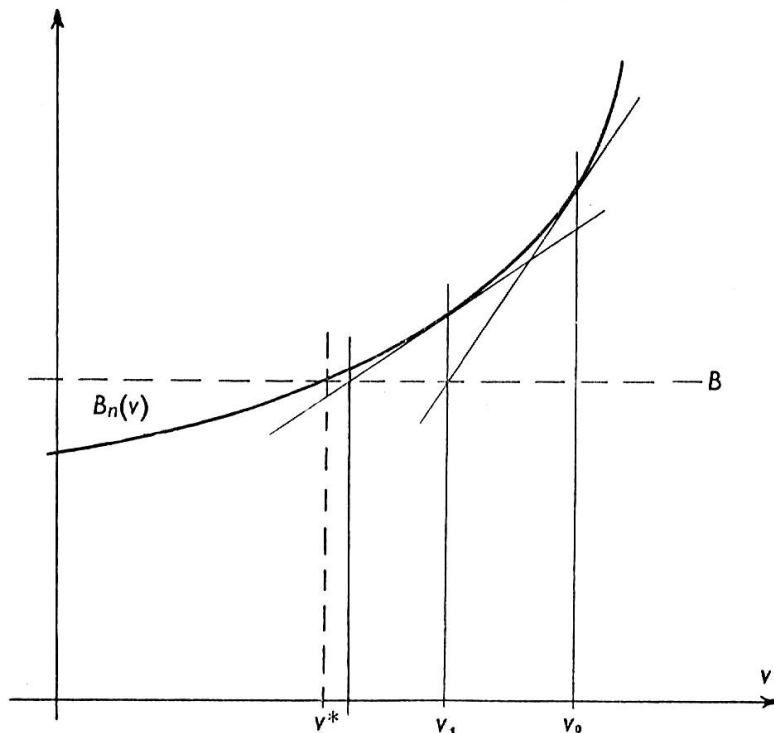
wobei die  $c_t$  und  $B$  als bekannt zu betrachten sind.

Besonders geeignet für die Auflösung der Gleichung (IV) durch automatische Rechengenäte ist das folgende altbekannte Newtonsche Iterationsverfahren: Es sei  $v_0$  ein erster Näherungswert der gesuchten Lösung  $v^*$  obiger Gleichung (IV) (siehe Abbildung), ferner seien  $B_n(v_0)$  und  $B'_n(v_0)$  die Werte des Polynoms

$$B_n(v) = \sum_{t=0}^n c_t v^t$$

und seiner ersten Ableitung nach  $v$  im Punkte  $v_0$ .  $B_n(v_0)$  und  $B'_n(v_0)$  ergeben sich aus  $v_0$  durch Anwendung der Rekursionsformeln (II) und (III).

*Das Newtonsche Iterationsverfahren*



Man bestimme dann den Schnittpunkt

$$v_1 = v_0 - \frac{B_n(v_0) - B}{B'_n(v_0)}$$

der Kurventangente im Punkte  $v_0$  mit der Horizontalen auf der Höhe  $B$ , ferner die entsprechenden Funktionswerte  $B_n(v_1)$  und  $B'_n(v_1)$  im Punkte  $v_1$ , im allgemeinen den Punkt

$$v_{i+1} = v_i - \frac{B_n(v_i) - B}{B'_n(v_i)} \quad (\text{V})$$

aus den Funktionswerten  $B_n(v_i)$  und  $B'_n(v_i)$  im vorhergehenden Punkt  $v_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Von der somit erklärten Punktfolge  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_i, \dots$  wird gewünscht, dass sie gegen die gesuchte Lösung  $v^*$  der Gleichung (IV) konvergiert.

Bei einem beliebigen Polynom zweiten oder höheren Grades konvergiert die oben definierte Folge  $v_0, v_1, v_2, \dots$  nicht zwangsläufig, da es z. B. nicht von vornherein sicher ist, ob die behandelte Gleichung überhaupt Lösungen  $v^*$  besitzt. Da ferner Gleichungen  $n$ -ten Grades bis zu  $n$  reellen Lösungen besitzen können, muss noch nachträglich abgeklärt werden, ob eine auf diese Art errechnete Lösung eine für die gestellte Aufgabe annehmbare Lösung darstellt.

Bei den Gleichungen und Lösungen, die aus unserem Problemkreis entstehen, sind glücklicherweise Schwierigkeiten dieser Art nicht zu befürchten. Es gilt nämlich folgender

*Hilfssatz:*

Es sei  $f(x)$  eine reelle eindeutige, auf dem Intervall  $a \leq x < \infty$  2mal stetig differenzierbare Funktion der reellen Variablen  $x$ .

*Voraussetzung:*

$$\left. \begin{array}{l} \frac{df}{dx} > 0 \\ \frac{d^2f}{dx^2} > 0 \end{array} \right\} \text{ auf } a \leq x < \infty.$$

*Behauptung:*

1. Die Gleichung  $f(x) = g$  bei vorgegebenem  $g \geq f(a)$  (VI) besitzt genau eine Lösung  $x^* \geq a$ . Die aus einem ersten Näherungswert  $x_0 > a$  durch das Newtonsche Iterationsverfahren definierte Folge

$x_0, x_1, x_2, \dots$  konvergiert gegen die Lösung  $x^*$ . Die Folge  $x_1, x_2, \dots$  (d.h. ohne Anfangspunkt  $x_0$ ) ist monoton abnehmend.

2. Falls  $g < f(a)$ , besitzt die Gleichung (VI) keine Lösung grösser als  $a$ . Die Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  divergiert aus dem Definitionsintervall von  $f(x)$ : nach endlich vielen Schritten wird ein Wert  $x_i < a$  ausserhalb des betreffenden Intervalles erreicht.

Aus diesem elementaren Hilfssatz (Beweis siehe unten) können folgende Eigenschaften des Newtonschen Iterationsverfahrens als Auflösungsverfahren für das Zinsfussproblem entnommen werden:

Bei den aus Zinsfussproblemen entstandenen Gleichungen (IV) handelt es sich ja stets um algebraische Gleichungen mit lauter positiven, genauer mit lauter nicht negativen Koeffizienten ( $c_t \geq 0$ ), wobei zwei Grenzfälle von vornherein aus unseren Betrachtungen ausgeschaltet werden dürfen, nämlich der triviale Fall  $c_t \equiv 0$  für alle  $t$  und der uninteressante Fall  $n = 1$ . Gesucht sind positive Lösungen  $v$ , wobei der Wert  $v = 0$  (d.h.  $j = \infty$ ) ebenfalls naturgemäss ausgeschlossen werden darf. Die Funktion

$$f(v) = \sum_{t=0}^n c_t v^t \quad (n \geq 2)$$

erfüllt demnach auf dem Intervall  $a \leq v < \infty$  bei beliebigen positiven  $a$  die Voraussetzung des Hilfssatzes:

$$\frac{df}{dv} = \sum_{t=1}^n t c_t v^{t-1} > 0,$$

$$\frac{d^2f}{dv^2} = \sum_{t=2}^n t(t-1) c_t v^{t-2} > 0.$$

Auf diesem Intervall gelten somit Behauptungen 1 und 2:

Ist der gegebene Barwert  $B$  in Gleichung (IV) grösser als  $f(a)$  bei beliebig kleinem  $a > 0$  d.h. ist  $B$  leicht grösser als die erste Leistung  $c_0$ , so besitzt die Umkehraufgabe genau eine Lösung. Die durch das Newtonsche Iterationsverfahren definierte Folge  $v_1, v_2, \dots$  konvergiert gegen diese Lösung, und zwar gleichgültig wie der erste Näherungswert  $v_0 (> 0)$  gewählt worden ist. Für die Beurteilung, ob ein Näherungswert  $v_i$  genau genug ist oder nicht, kann z. B. die im Rechenvorgang (Gleichung (V)) auftretende Differenz

$$B_n(v_i) - B$$

herangezogen werden: fällt diese Zahl unter eine zum voraus festgesetzte Schranke  $\varepsilon$  (z. B. eine Einheit in der letzten Stelle von  $B$ ), so darf das Verfahren unterbrochen werden. Ist diese Bedingung z. B. beim  $m$ -ten Schritt erfüllt, so kann der zuletzt errechnete Wert  $v_m$  bzw.  $j_m = \frac{1}{v_m} - 1$  als Lösung der Umkehraufgabe bei der Toleranzmarge  $\varepsilon$  angesehen werden.

Die Genauigkeit der Näherungslösung  $j_m$  hängt ausser von  $\varepsilon$  bekanntlich in erster Linie vom Wert  $B'_n$  im Punkte  $v_m$  ab. Je grösser  $B'_n(v_m)$  ist, desto genauer ist die Lösung  $v_m$ ; in den meisten Fällen ist  $B'_n$  grösser als 1, d. h. ist die Genauigkeit von  $v_m$  mindestens so gross wie die Genauigkeit  $\varepsilon$  von  $B_n(v_m)$ . Schliesslich liegt die genaue Lösung  $j^*$  oberhalb der Näherungslösung  $j_m$ , weil die Folge  $v_1, v_2, \dots$  ab- bzw. die entsprechende Folge  $j_1, j_2, \dots$  zunimmt.

Fällt dagegen der gegebene Barwert  $B$  unter den kleinsten zulässigen Wert  $c_0$  – dieser Fall kommt praktisch nie vor –, so liefert das Verfahren nach einer gewissen Anzahl Schritten einen Wert  $v_i < a$ . Das Vorzeichen des Ausdruckes  $v_i - a$  kann somit als Kriterium für die Entscheidung dienen, ob das Verfahren fortgesetzt oder abgebrochen werden muss.

Die wesentlichen Merkmale der oben geschilderten Methode zur Auflösung der Umkehraufgabe seien schliesslich noch kurz hervorgehoben; sie sind vom Standpunkt einer weitgehenden Automatisierung des Rechenvorganges aus zu beurteilen:

- a) Der Algorithmus beginnt und wird aufrechterhalten unter alleiniger Angabe der Beträge der zeitlich gestaffelten Leistungen  $c_t$ . Weitere Hinweise z. B. über die Natur der Leistungen  $c_t$  – ob es sich um Versicherungsleistungen, Annuitäten, Zinszahlungen mit allen möglichen Varianten handelt – sind nicht erforderlich.
- b) Der Algorithmus bricht von selbst ab auf Grund logisch-mathematischer Kriterien.
- c) Die Lösung – falls eine solche existiert – kann mit beliebiger Genauigkeit geliefert werden. Probleme ohne Lösung schliessen sich automatisch aus.



*Bemerkungen:*

1. Es wurde vorausgesetzt, dass die gestaffelten Leistungen  $c_t$  vom Zinsfuss unabhängig sind. Diese Annahme trifft aber z. B. nicht zu bei den anwartschaftlichen Witwen- oder Überlebenszeitrenten, wo beim Tode des Versicherten eine Rente zu laufen beginnt. Auf Fälle letzterer Art kann aber das Newtonsche Verfahren ohne grosse Änderungen ausgedehnt werden, da die zugehörigen Barwerte sich als lineare Kombinationen zweier oder mehrerer Barwerte mit festen  $c_t$  ausdrücken lassen. Für jede Komponente werden parallel die Teil-Barwerte  $B_n(v_i)$  und  $B'_n(v_i)$  ermittelt, linear kombiniert und dann in die Formel (V) für die Bestimmung des nächsten Näherungswertes eingesetzt. Das Verfahren bleibt also im wesentlichen bestehen.

2. Es gibt selbstverständlich für die Auflösung der Umkehr- aufgabe auch andere iterative Methoden als die hier behandelte Newtonsche, so z. B. das Verfahren der eingeschachtelten Intervalle: es wird von zwei ersten Näherungswerten ausgegangen; für den ersten  $v_0$  sei der Barwert kleiner, für den zweiten  $v_1$  dagegen grösser als der gegebene Barwert  $B$ . Da die Lösung sich irgendwo auf dem Intervall  $v_0$  bis  $v_1$  befindet, wird das betreffende Intervall in zwei gleiche Teile geteilt. Ist der Barwert im Mittelpunkt  $v_2 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$  grösser als  $B$ , so liegt die Lösung auf dem linken Halbintervall  $v_0$  bis  $v_2$ , welcher nochmals halbiert wird usw. Ist der Barwert im Mittelpunkt  $v_2$  kleiner, so ist das rechte Halbintervall weiter zu unterteilen. Die somit erklärten ineinander eingeschachtelten Intervalle ziehen sich bekanntlich auf einen einzigen Punkt – die gesuchte Lösung – zusammen. Bei diesem trivialen Verfahren erübrigt sich die Berechnung der ersten Ableitung  $B'$  sowie jegliche Konvergenzbetrachtung; dagegen ist die Konvergenz des Verfahrens sehr schlecht.

*Beweis des Hilfssatzes*

Aus  $\frac{df}{dx} > 0$  und  $\frac{df}{dx} > \frac{df}{dx} \Big|_{x=a}$  wegen  $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$  folgt, dass  $f(x)$  mit  $x$  monoton bis ins Unendliche wächst, d. h. dass die durch die Funktion  $f(x)$  definierte Zuordnung zwischen den Intervallen  $a \leq x < \infty$  und  $f(a) \leq f(x) < \infty$  ein-eindeutig ist, womit der erste Teil der Behauptung 1 sowie der 1. Satz der Behauptung 2 bestätigt werden: für  $g \geq f(a)$  gibt es genau eine Lösung, für  $g < f(a)$  überhaupt keine.

Aus  $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$  folgt eine wichtige geometrische Eigenschaft der Kurve  $f(x)$  in der  $(x, f(x))$ -Ebene nämlich, dass jede Tangente Stützgerade der Kurve  $f(x)$  ist, d. h. dass die Tangente im Intervall  $a \leq x < \infty$  ausser dem Berührungspunkt keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemeinsam hat.

Dies gilt offenbar lokal: die Kurve ist positiv gekrümmt, d. h. liegt in der Nähe des Berührungspunktes oberhalb der Tangente. Würde nun die betreffende Tangente z. B. rechts vom Berührungspunkt die Kurve treffen, so müsste die Tangente im ersten Treffpunkt aus nahe-  
liegenden geometrischen Gründen eine kleinere Neigung  $\frac{df}{dx} = f'$  als die betrachtete erste Tangente haben, entgegen unserer Voraussetzung  $f'' > 0$  d. h.  $f'(x) > f'(\bar{x})$  für  $x > \bar{x}$ . Links vom Berührungspunkt führt eine ähnliche Betrachtung zum selben Schluss.

Die Konvergenz bzw. Divergenz der Punktfolge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  ist eine Folgerung letzterer Eigenschaft:

*Behauptung 1:* Weil die Tangente  $t(x_0)$  im 1. Näherungspunkt  $x_0$  nicht horizontal ist ( $f'(x) > 0$ ), schneidet  $t(x_0)$  die Horizontale mit der Ordinate  $g$ , und zwar – wegen der Eigenschaft der Tangente, Stützgerade zu sein – in einem rechts vom Schnittpunkt der Horizontalen mit der Kurve, d. h. rechts von der genauen Lösung  $x^*$  gelegenen Punkt  $x_1$ .

Wegen der Monotonität der Funktion  $f(x)$  gilt aus  $x_1 > x^*$

$$f(x_1) > f(x^*) = g,$$

das heisst

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) - g}{f'(x_1)} < x_1.$$

Aus der Eigenschaft der Tangente, Stützgerade zu sein, ergibt sich ferner, dass  $x_2$  rechts von  $x^*$  liegt:

$$x^* < x_2 < x_1.$$

Gelten letztere Ungleichungen für den  $i$ -ten Punkt  $x_i$  d. h. gelten

$$x^* < x_i < x_{i-1},$$

dann folgt

$$f(x^*) < f(x_i),$$

das heisst:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) - g}{f'(x_i)} < x_i,$$

und wiederum aus der Eigenschaft der Tangente im Punkte  $x_i$

$$x_{i+1} > x^*.$$

Die Folge  $x_1, x_2, \dots$  ist also monoton abnehmend ( $x_i < x_{i-1}$ ) und beschränkt ( $x_i > x^*$ ): sie ist also konvergent. Es sei  $x^{**}$  der Grenzwert der Folge; bei beliebig kleinem  $\varepsilon$  gibt es demnach ein  $N(\varepsilon)$ , für welches

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon,$$

das heisst

$$|x_{i+1} - x_i| = \frac{f(x_i) - g}{f'(x_i)} < \varepsilon \quad \text{sobald } i > N(\varepsilon).$$

Da nach Voraussetzung  $f'(x_i) \neq 0$  auf  $a \leq x < \infty$ , konvergiert nach letzterer Gleichung die Folge  $f(x_1), f(x_2), \dots$  gegen den Wert  $g$ , d. h. – nach der ein-eindeutigen Zuordnung zwischen den Intervallen  $a \leq x < \infty$  und  $f(a) \leq f(x) < \infty$  – die Folge der  $x_i$  selbst gegen das Urbild  $x^*$  von  $g$ . Behauptung 1 ist somit vollständig bewiesen.

*Behauptung 2:* Im Falle  $g < f(a)$  gilt wie oben

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_i.$$

Hier kann keine untere Schranke im Intervall  $a \leq x < \infty$  für die Folge  $x_i$  angegeben werden: nach Voraussetzung gilt solange  $x_i > a$

$$\begin{aligned} f(a) &\leq f(x_i) \leq f(x_1), \\ f'(a) &\leq f'(x_i) \leq f'(x_1), \end{aligned}$$

das heisst aus  $g < f(a)$

$$|x_{i+1} - x_i| = \left| \frac{f(x_i) - g}{f'(x_i)} \right| > \frac{f(a) - g}{f'(x_1)} = \delta \neq 0.$$

Bei jedem Iterationsschritt reduziert sich demnach die Abszisse  $x_i$  mindestens um die positive Grösse  $\delta$ . Nach endlich vielen Schritten wird also ein links von  $a$  gelegener Punkt erreicht, w. z. b. w.

## § 2. Der Rechenplan

Der in der Versicherungsmathematik häufig verwendeten modellartigen Darstellung entsprechend, wollen wir die Leistungen  $c_t$  als Vergütung zugunsten einer fiktiven Basisgesamtheit von gleichberechtigten Individuen definieren. Um ferner einen möglichst allgemeinen Rechenplan zu erzielen, zerlegen wir die zur Zeit  $t$  auf die Basisgesamtheit entfallende Gesamtleistung in zwei Komponenten: eine Rechts-Komponente  $a_t$  fällig zur Zeit  $t$  am Anfang der neuen Verzinsungsperiode und eine Links-Komponente  $b_t$  fällig am Ende der zur Zeit  $t$  abgelaufenen Periode. Es sei  $\lambda_t$  die Anzahl der im Zeitpunkt  $t$  in der Basisgesamtheit vorhandenen Individuen, und zwar genau nach Auszahlung der Leistung  $b_t$  und unmittelbar vor Fälligkeit der Leistung  $a_t$ . Den Barwert (zugunsten eines einzelnen Individuums der Basisgesamtheit) der innert einer Zeitspanne von  $n$  Verzinsungsperioden fällig werdenden Leistungen definieren wir als Quotienten

$$B_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\lambda_x},$$

wobei

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} a_{x+t} v^t + \sum_{t=1}^n b_{x+t} v^t.$$

Wird zwecks Vereinfachung der Schreibweise auf ein besonderes Merkmal für den Anfangszeitpunkt  $x$  verzichtet und wird für die restliche Dauer das Symbol  $k = n - t$  eingeführt, so haben wir

$$B_n = \frac{A_n}{\lambda} \quad (\text{VII})$$

mit

$$A_n = \sum_{t=0}^{n-1} a_t v^t + \sum_{t=1}^n b_t v^t, \quad (\text{VIII})$$

wobei offenbar als Rekursionsformel für den Ausdruck

$$A_k = \{[(b_n v + a_{n-1}) + b_{n-1}] v + \dots + b_{n-k-1}\} v + a_{n-k}$$

entsprechend Formel (II), § 1, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} A_{k+1} = [A_k + b_{n-k}] v + a_{n-k-1} \\ A_0 = 0 \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{IX})$$

mit

Für die Ableitung  $B'_n$  von  $B_n$  nach der Veränderlichen  $v$  erhalten wir aus (VII) und (IX) ( $\lambda, a_t, b_t$  sind Konstante)

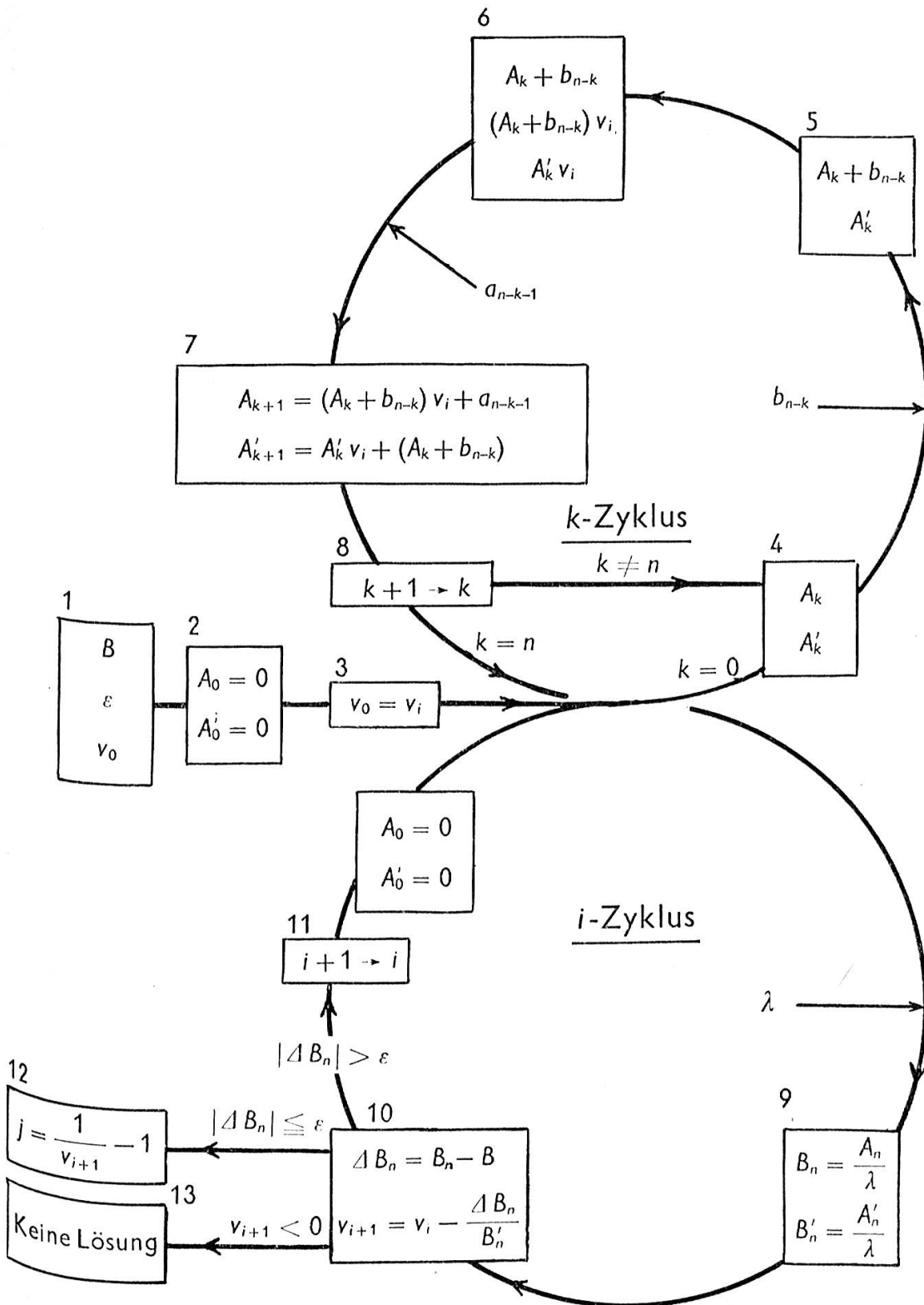
$$B'_n = \frac{A'_n}{\lambda}; \quad (\text{X})$$

mit 
$$\left. \begin{aligned} A'_{k+1} &= A'_k v + (A_k + b_{n-k}) \\ A'_0 &= 0 \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{XI})$$

Nach dem in § 1 beschriebenen Verfahren für die Auflösung der Umkehraufgabe erhalten wir den folgenden zweifach zyklischen Rechenplan (siehe Abbildung).

1. Festlegung der Konstanten:  
 $B$  = gegebener Barwert,  
 $\varepsilon$  = Toleranzmarge für  $B$ ,  
 $v_0$  = erster Näherungswert der gesuchten Lösung.
2. Angabe der Anfangswerte  $A_0 = 0$  und  $A'_0 = 0$  gemäss (IX) und (XI).
3.  $v_0 = v_i = i$ -ter Näherungswert.
4.  $A_0 = A_k$  und  $A'_0 = A'_k$  stellen die  $k$ -ten Werte der Rekursionen (IX) und (XI) dar.
- 5.-7. Berechnung der nächsten Werte  $A_{k+1}$  und  $A'_{k+1}$  gemäss (IX) und (XI).
8. Die neu errechneten Werte  $A_{k+1}$  bzw.  $A'_{k+1}$  werden als Anfangswerte  $A_k$  bzw.  $A'_k$  für eine weitere Umdrehung um den  $k$ -Zyklus (4-8) angenommen. Nach  $n$  Umläufen ( $k = n$ ) Übergang zum  $i$ -Zyklus.
9.  $B_n$  und  $B'_n$  gemäss (VII) und (X) errechnen.
10. Fehler  $\Delta B_n$  sowie neuen Näherungswert  $v_{i+1}$  ermitteln.
11. Falls der Fehler grösser als die Toleranzmarge  $\varepsilon$  ist,  $v_{i+1}$ , in  $v_i$  umnennen, zwecks nochmaliger Verbesserung der Approximation, und bei Programmschritt 4 neu anfangen ( $A_k = A'_k = 0$  für  $k = 0$ ).
12. Ist  $|\Delta B_n| \leq \varepsilon$ , d.h. ist die gewünschte Genauigkeit bei der Lösung erreicht, dann Zinsfuss  $j$  aus  $v_{i+1}$  ermitteln.
13. Ist  $v_{i+1} < 0$ , besitzt die gestellte Aufgabe keine Lösung.

Für die Auflösung der direkten Aufgabe umfasst der obige Rechenplan die Programmschritte 1-9, wobei in diesem Fall als  $v_0$  der gegebene Diskontierungsfaktor zu wählen ist. Der Plan ist dann einfach zyklisch; die Mitberechnung der Ableitungen  $A'_k$  und  $B'_k$  ist überflüssig.



Der Rechenplan

### § 3. Beispiele

#### 1. Aus der Lebensversicherung

Der Leibrentenbarwert  $\ddot{a}_{40:\overline{25}|}$  beträgt nach den Grundlagen SM 21/30  $2\frac{1}{2}\%$ :  $B = 16.692$ . Gesucht ist der technische Zins, welcher bei der Sterbetafel SM 48/53 zum selben Barwert führt (Toleranzmarge für  $B$ :  $\varepsilon = 0,001$ ).

Die  $c_t$  sind die  $l_x$  nach SM 48/53 (genauer  $a_{x+t} = l_{x+t}$ ,  $b_{x+t} = 0$ ) und man findet aus dem ersten Näherungswert  $j_0 = 2\frac{1}{2}\%$ :

Dis- kontierungs- faktor	$\ddot{a}_{40:\overline{25} }$	$\frac{d\ddot{a}}{dv}$	Verbesserter Diskontierungsfaktor
0,97561 ( $i = 2\frac{1}{2}\%$ )	17,500	183,22	$0,97561 - \frac{17,500 - 16,692}{183,22} = 0,97120$
0,97120	16,717	172,00	$0,97120 - \frac{16,717 - 16,692}{172,00} = 0,97105$
0,97105	16,692		

Aus  $v = 0,97105$  ergibt sich der technische Zins  $j = 2,981\%$ , wobei der Fehler höchstens eine Einheit in der dritten Dezimalstelle ausmacht.

#### 2. Aus der Renditentheorie fest verzinslicher Wertpapiere

Bei der  $3\frac{1}{2}\%$ igen holländischen Staatsanleihe 1951 sind die Zinsen halbjährlich zahlbar. Die Schuld wird nach einem fest umschriebenen Amortisationsplan getilgt ( $2\%$  bis  $6\%$  jährlich), wobei die Obligationen zu  $100\%$  zurückbezahlt werden. Wie gross ist die Rendite bei einem Ankaukurs von  $96\%$  (Toleranzmarge  $\varepsilon = 0,001\%$ ), wenn der Schuldner von der vorzeitigen Rückzahlungsmöglichkeit keinen Gebrauch macht?

Leistungen  $c_t$  werden alle 6 Monate nachschüssig fällig:  $a_{x+t} \equiv 0$ ,  $b_{x+t} =$  Zinsen und Rückzahlungen. Die Verzinsungsperiode beträgt ein halbes Jahr.

Aus dem ersten Näherungswert  $j_0 = 3\frac{3}{4}\%$  ergibt sich:

Dis- kontierungs- faktor $v^{\frac{1}{2}}$	$B_n$	$B'_n$	Verbesserter Diskontierungsfaktor
0,98176 ( $i = 3\frac{3}{4}\%$ )	0,97581	22,857	$0,98176 - \frac{0,97581 - 0,96}{22,857} = 0,98107$
0,98107	0,96022	22,369	$0,98107 - \frac{0,96022 - 0,96}{22,369} = 0,98106$
0,98106	0,95999		

das heisst  $j = \frac{1}{0,98106^2} - 1 = 3,898\%$ .



