# Änderungen in der Grundgesamtheit der Betriebsunfallkosten

Von *H. Bühlmann*, Zürich, und *W. Hartmann*, Winterthur

## 1. Kapitel

Die in gleich langen Zeitintervallen festgestellten Gesamtbetriebsunfallkosten eines bestimmten Betriebes werden immer gewisse Schwankungserscheinungen zeigen. Wann sind diese Schwankungen nur zufälliger Natur, und wann kann man von einer systematischen Abweichung sprechen? Das Bedürfnis nach einem Kriterium zur Entscheidung dieser Alternativfrage gab Anstoss zur vorliegenden Arbeit.

Die Gesamtbetriebsunfallkosten sind eine eindeutige Funktion zweier anderer stochastischer Variablen, der Unfall*kosten* und der Unfall*häufigkeit*. Die grundlegende Annahme, die man in der Unfallversicherung üblicherweise macht, besteht darin, diese beiden Variabeln als stochastisch unabhängig zu betrachten. Man wird dann zweckmässig die Frage nach den Änderungen in der Grundgesamtheit der Gesamtbetriebsunfallkosten in zwei Teilfragen aufspalten:

1. Hat sich die Grundgesamtheit der Unfallkosten (abgekürzt: $F$-Grundgesamtheit) geändert?
2. Hat sich die Grundgesamtheit der Unfallhäufigkeiten (abgekürzt: $p$-Grundgesamtheit) geändert?

Falls wir mindestens auf eine der zwei Fragen mit «ja» antworten müssen, werden wir sagen, die Grundgesamtheit der Gesamtbetriebsunfallkosten habe sich geändert. Man beachte dabei, dass wir auf diese Weise auch rein «strukturelle» Änderungen in der Grundgesamtheit erfassen. Sollten sich z. B. einmal die gleichzeitige Änderung sowohl der $F$-Grundgesamtheit als auch der $p$-Grundgesamtheit gerade kompensieren, so werden wir dennoch von einer Änderung in der Grundgesamtheit der Gesamtbetriebsunfallkosten sprechen.

Die vorliegende Arbeit entwickelt für die erste Alternativfrage:

«Hat sich die $F$-Grundgesamtheit geändert?»

ein Entscheidungskriterium. Bevor wir aber den Leser im Detail durch alle die Rechnungen zu diesem Kriterium führen, möchten wir zunächst eine grobe Skizze unseres Vorgehens geben.

Die $F$-Grundgesamtheit besteht aus der Menge sämtlicher möglicher Unfallkosten. Demgegenüber deuten wir die in einem Zeitintervall effektiv entstandenen Unfallkosten als Stichprobe aus dieser Grundgesamtheit. Diese Stichprobe wird eine gewisse Anzahl von Unfällen enthalten. Unsere Absicht ist nun die, jede Stichprobe durch *eine einzige* Zahl (Stichprobencharakteristik genannt) zu kennzeichnen. An diese Zahl stellen wir folgende Bedingungen:

1. Sie soll uns möglichst viel Information über die einzelnen Unfallkosten in der Stichprobe geben.
2. Sie soll schon für kleine Stichproben normalverteilt sein.

Auf der Suche nach dieser Charakteristik stellen wir zunächst in Kapitel 2 das Zahlenmaterial vor, das uns für die Untersuchungen gedient hat. Es gelingt, die grossen Zahlen des zugrunde gelegten Beobachtungsmaterials durch ein mathematisches Gesetz zu erklären (gestutzte logarithmische Normalverteilung). Dieses mathematische Gesetz nützen wir zweifach aus. Zunächst einmal können wir mittels ihm zeigen, dass unser Zahlenmaterial auch die sehr grossen Unfallkosten berücksichtigt. Andererseits gibt uns aber die gestutzte logarithmische Normalverteilung auch einen sehr deutlichen Hinweis, wie wir die gesuchte Stichprobencharakteristik finden können. In Kapitel 3 bestimmen und definieren wir die erwähnte Zahl. Eine einzige Grösse, welche möglichst viel Information über die einzelnen Unfallkosten in der Stichprobe liefert, wird zweifellos aus einer Mittelbildung hervorgehen müssen. Während man nun üblicherweise fast kein anderes als das *arithmetische* Mittel praktisch benützt, zeigt sich in unserm Zusammenhange, dass das *geometrische* Mittel dem Problem viel eher angepasst ist. Bereits für Stichproben vom sehr geringen Umfang 4 ist nämlich der Logarithmus des geometrischen Mittels normalverteilt. Auf Grund dieser normalverteilten Charakteristik können wir nun testen, ob die Grundgesamtheit konstant geblieben ist. Kapitel 4 zeigt eine Möglichkeit auf, wie man einen solchen Test praktisch durchführen kann.

## 2. Kapitel

### Die Verteilung der Kosten der einzelnen Unfälle: $F(X)$

Das zugrunde gelegte Material umfasst sämtliche Betriebsunfälle eines Grossbetriebes der schweizerischen Maschinenindustrie aus der Fünfjahresperiode 1948/52. In dieser Zeit waren das Lohnniveau, die Arzttarife und die gesetzlichen Bestimmungen für die Entschädigung der Unfälle relativ konstant. Unser Material umfasst 1564 Unfälle, von denen 988 der SUVA als Normalfälle gemeldet wurden. Im gleichen Zeitraum 1948/52 wurden der SUVA insgesamt 1 053 429 Unfälle gemeldet, wovon 627 844 als Normalfälle. Der Quotient zwischen Normal- und Bagatellfällen in unserem Beobachtungsmaterial ist somit für den Gesamtbestand repräsentativ.

Als erstes wurden die 1564 Unfälle nach Kosten gruppiert (Tabelle 1).

*Tabelle 1*

*Betriebsunfälle der Fünfjahresperiode 1948/52 einer schweizerischen Maschinenfabrik, gruppiert nach Kosten*

| Unfallkosten Fr. | Anzahl Fälle | $\frac{f}{h}$ | Unfallkosten Fr. | Anzahl Fälle | $\frac{f}{h}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0–5 | 1 | 0,20 | 201–250 | 85 | 1,70 |
| 6–10 | 26 | 5,20 | 251–300 | 66 | 1,32 |
| 11–15 | 204 | 40,80 | 301–350 | 54 | 1,08 |
| 16–20 | 188 | 37,60 | 351–400 | 40 | 0,80 |
| 21–25 | 97 | 19,40 | 401–450 | 31 | 0,62 |
| 26–30 | 53 | 10,60 | 451–500 | 25 | 0,50 |
| 31–35 | 41 | 8,20 | 501–550 | 22 | 0,44 |
| 36–40 | 36 | 7,20 | 551–600 | 22 | 0,44 |
| 41–45 | 40 | 8,00 | 601–700 | 35 | 0,35 |
| 46–50 | 25 | 5,00 | 701–800 | 10 | 0,10 |
| 51–60 | 38 | 3,80 | 801–900 | 8 | 0,08 |
| 61–70 | 42 | 4,20 | 901–1000 | 13 | 0,13 |
| 71–80 | 31 | 3,10 | 1001–1250 | 12 | 0,048 |
| 81–90 | 22 | 2,20 | 1251–1500 | 16 | 0,064 |
| 91–100 | 29 | 2,90 | 1551–1750 | 6 | 0,024 |
| 101–120 | 45 | 2,25 | 1751–2000 | 1 | 0,004 |
| 121–140 | 56 | 2,80 | 2001–2500 | 5 | 0,010 |
| 141–160 | 53 | 2,65 | 2500–5000 | 4 | 0,0016 |
| 161–180 | 36 | 1,80 | 5000–5550 | 2 | 0,0008 |
| 181–200 | 44 | 2,20 | | 1564 | |

Berücksichtigt sind nur die sogenannten direkten Unfallkosten: Lohnausfallentschädigungen und Heilkosten, nicht aber die Rentenkapitalwerte.

Man erkennt auf den ersten Blick, dass diese Verteilung nicht normal ist, hingegen könnte es sich um eine logarithmisch normale Verteilung handeln. Die 1564 Unfälle wurden deshalb entsprechend ihren Kosten in 18 Gruppen zusammengefasst und die Wahrscheinlichkeitsdichte im logarithmischen Maßstab bestimmt.

*Tabelle 2*

*Betriebsunfälle der Fünfjahresperiode 1948/52 einer schweizerischen Maschinenfabrik gruppiert nach dem Logarithmus der Kosten*

| Unfallkosten Logarithmus | Anzahl Unfälle | Wahrscheinlichkeitsdichte $\frac{f}{h}$ |
|---|---|---|
| 0,00 000–1,00 000 | 27 | 2,70 |
| 1,04 139–1,17 609 | 204 | 151,45 |
| 1,20 412–1,30 103 | 188 | 193,99 |
| 1,32 222–1,47 712 | 150 | 96,84 |
| 1,49 136–1,60 206 | 77 | 69,56 |
| 1,61 278–1,69 897 | 65 | 75,42 |
| 1,70 757–1,84 510 | 80 | 58,17 |
| 1,85 126–2,00 000 | 82 | 55,13 |
| 2,00 432–2,14 613 | 101 | 71,22 |
| 2,14 922–2,30 103 | 133 | 87,61 |
| 2,30 320–2,47 712 | 151 | 86,82 |
| 2,47 857–2,60 206 | 94 | 76,12 |
| 2,60 314–2,69 897 | 56 | 58,44 |
| 2,69 984–2,84 510 | 79 | 54,25 |
| 2,84 572–3,00 000 | 31 | 20,09 |
| 3,00 043–3,17 609 | 28 | 15,94 |
| 3,17 638–3,39 794 | 12 | 5,42 |
| 3,39 811–3,74 429 | 6 | 1,73 |

Die Wahrscheinlichkeitsdichten sind in einem Histogramm (Fig. 1) im logarithmischen Maßstab dargestellt. Wir stellen fest, dass das Bild nicht einer logarithmisch normalen Verteilung entspricht; hingegen scheinen die neun oberen Gruppen des Histogramms aus einer «truncated logarithmic normal distribution» zu stammen.

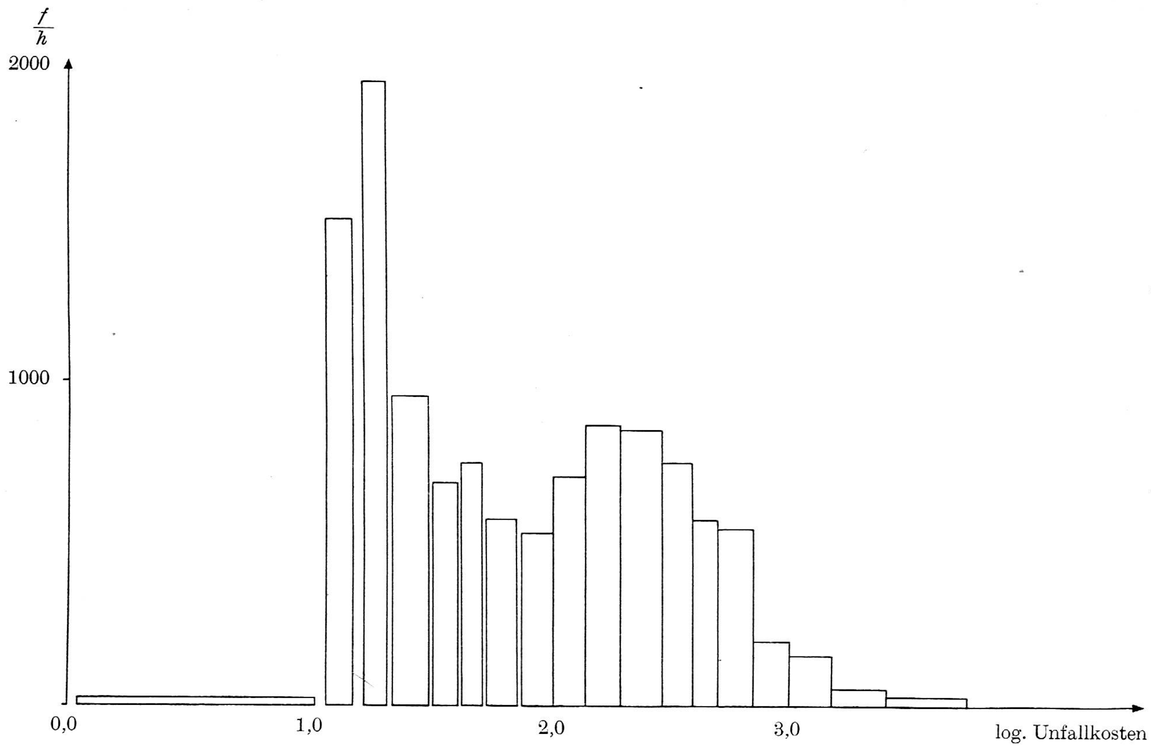


*Fig. 1* *Häufigkeitsverteilung der 1564 Unfälle*
(logarithmischer Maßstab)

Für diese Zweiteilung der Verteilungsfunktion sehen wir folgende Gründe: Nach den gesetzlichen Bestimmungen (Art. 74 KUVG) werden für den Unfalltag und die beiden folgenden Tage keine Lohnentschädigungen durch die SUVA ausgerichtet. Die Kostenfolgen der weniger als vier Tage dauernden Unfälle gehorchen somit einem anderen Verteilungsgesetz als jene der übrigen Unfälle.

Ein weiterer störender Faktor liegt darin, dass nur eine kleine Zahl der Verletzten in der Zeit vom Beginn des Krankengeldanspruches bis zum siebenten Tag nach dem Unfall ihre Arbeitsfähigkeit wieder erlangen [1][1]). Auch die von der SUVA immer wieder beobachtete Tatsache, dass nach einem Unfall die Arbeit viel öfter erst am Montag als gegen Ende der Woche wieder aufgenommen wird, wirkt sich bei den wenige Tage dauernden Unfällen relativ am stärksten aus.

Aus den erwähnten Gründen beschränken wir uns darauf, den rechten Teil des Histogramms durch ein mathematisches Gesetz zu erklären.

Die Schätzung der Parameter der «truncated logarithmic normal distribution» erfolgte nach der von A. C. Cohen [2] angegebenen Methode. Als point of truncation wurde der Wert Fr. 141 gewählt und im logarithmischen Maßstab mit $x'_0 = 2{,}14922$ bezeichnet.

Die Schätzwerte betragen: $m' = 2{,}27469$,

$\sigma' = 0{,}43267$.

In Tabelle 4 sind die Abszissen der Mittelwerte $x'_i$ der in Frage kommenden 9 Felder des Histogramms im logarithmischen Maßstab angegeben.

---

[1]) Literaturverzeichnis:

[1] Schweizerische Unfallversicherungsanstalt.
Ergebnisse der Unfallstatistik der vierten fünfjährigen Beobachtungsperiode 1933–1937. S. 16.

[2] Cohen A. G.
On estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions.
American Statistical Association Journal. December 1949, p. 518–525.

*Tabelle 4*

*Zahlenwerte des Histogramms im logarithmischen Maßstab*

| $x_i'$ | $f$ Anzahl Unfälle | $f$ in % |
|---|---|---|
| 2,22 512 | 133 | 22,54 |
| 2,39 016 | 151 | 25,60 |
| 2,54 031 | 94 | 15,93 |
| 2,65 105 | 56 | 9,49 |
| 2,77 247 | 79 | 13,39 |
| 2,92 286 | 31 | 5,25 |
| 3,08 826 | 28 | 4,75 |
| 3,28 716 | 12 | 2,03 |
| 3,57 120 | 6 | 1,02 |
| | 590 | 100,00 |

Mittels $\chi^2$ testeten wir die Hypothese, dass die in Tabelle 4 auftretenden Häufigkeiten zu einer Stichprobe aus einer gestutzt logarithmisch normalen Grundgesamtheit gehören. Tabelle 5 gibt die numerische Berechnung von $\chi^2$ wieder. Die in dieser Tabelle verwendeten Buchstaben haben folgende Bedeutung:

$\xi_i = \dfrac{x_i' - m'}{\sigma}$ Standardisierte Abszisse des Mittelwertes des $i$-ten Histogrammfeldes,

$f_i$ Anzahl Unfälle im $i$-ten Histogrammfeld,

$\varphi_i$ Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung im Punkte $i$,

$h_i$ Breite der $i$-Felder im logarithmischen Maßstab,

$n = \dfrac{\sum f_i}{\sum \varphi_i h_i}$ Auf den abgeschnittenen Bereich bezogene Anzahl Unfälle.

Wir dürfen also die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit als truncated logarithmic normal annehmen mit point of truncation

$$x_0' = 2{,}14\,922$$

Mittelwert . . . $m' = 2{,}27\,469$

Streuung . . . . $\sigma' = 0{,}43\,267.$

*Tabelle 5*

*Berechnung von $\chi^2$*

| $\xi_i$ | $f_i$ | $\varphi_i h_i$ | $n\varphi_i h_i$ | $f_i - n\varphi_i h_i$ | $(f_i - n\varphi_i h_i)^2$ | $\chi_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1146 | 133 | 0,1390 | 134,75 | 1,75 | 3,0625 | 0,023 |
| 0,2669 | 151 | 0,1547 | 149,97 | 1,03 | 1,0609 | 0,007 |
| 0,6138 | 94 | 0,0943 | 91,41 | 2,59 | 6,7081 | 0,073 |
| 0,8700 | 56 | 0,0605 | 58,65 | 2,65 | 7,0225 | 0,120 |
| 1,1504 | 79 | 0,0691 | 66,99 | 12,01 | 144,2401 | 2,153 |
| 1,4980 | 31 | 0,0463 | 44,88 | 13,88 | 192,6544 | 4,293 |
| 1,8802 | 28 | 0,0276 | 26,76 | 1,24 | 1,5376 | 0,057 |
| 2,3398 | 12 | 0,0132 | 12,80 | 0,80 | 0,6400 | 0,050 |
| 2,9962 | 6 | 0,0039 | 3,78 | 2,22 | 4,9284 | 1,304 |
| $\sum f_i = 590$ | | $\sum \varphi_i h_i = 0,6086$ | | | | $\chi^2 = 8,079$ |

$$\chi^2 = 8,079$$
$$\text{Anzahl Freiheitsgrade} = 6$$
$$\chi^2_{0,05} = 12,592$$

Die Stichprobe umfasst 1564 Unfälle mit Kosten von 0–5550 Franken. Es soll nun geprüft werden, wie gross die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Unfällen mit Kosten über 5550 Franken ist.

Die Fläche des Wahrscheinlichkeitsintegrals der normierten gestutzten logarithmischen Normalverteilung ausserhalb des Punktes $i$ beträgt.

$$A = \frac{1 - \Phi(\xi_i)}{\Phi\left(\dfrac{x_0' - m'}{\sigma'}\right)}.$$

Setzt man $\xi_i = \dfrac{\log 5550 - m'}{\sigma'}$ so findet man $A = 0,00044$.

Die Wahrscheinlichkeit für Kosten über 5550 Franken in der *ganzen* Grundgesamtheit (also derjenigen, wo auch die kleinen Kosten eingeschlossen sind) ist demnach sicher *kleiner* als 0,00044. Dieses Resultat zeigt, dass unser Zahlenmaterial auch die sehr grossen Unfallkosten genügend berücksichtigt.

## 3. Kapitel

## Untersuchungen über die Mittelbildung

In gleich langen Zeitintervallen werden sich im Betriebe selbstverständlich nicht immer gleich viele Unfälle ereignen. Um nun für die Stichprobe jedes Intervalles eine charakteristische Grösse zu haben, welche unabhängig von der Anzahl der eingetretenen Unfälle bereits möglichst viele Informationen liefert, wird man wohl als «characteristic of the sample» irgendeine Mittelbildung wählen. Die Tatsache, dass die Verteilungsfunktion der Kosten eines einzigen Unfalles (abgesehen vom Bereich der ganz niedern Kosten) durch das Gesetz der logarithmischen Normalverteilung beschrieben werden kann, weist nun schon darauf hin, dass das *arithmetische Mittel* eine ungeeignete Charakteristik sein wird. Das arithmetische Mittel der Logarithmen hingegen, oder was auf das selbe herauskommt, der Logarithmus des *geometrischen Mittels*, ist für unsere Zwecke sehr geeignet. Bereits für eine Anzahl von 4 Unfällen ist er nämlich normal verteilt. Dieses Resultat ist um so erstaunlicher, wenn wir uns auf der andern Seite davon überzeugen, dass es für das arithmetische Mittel mehr als 500 Unfälle braucht, bis wir mit einer Normalverteilung rechnen dürfen.

### A. Theoretischer Teil

Auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung wissen wir folgendes: Das arithmetische Mittel von $n$ unabhängigen Beobachtungsgrössen aus der gleichen Grundgesamtheit ist asymptotisch normal verteilt, sofern Erwartungswert und Streuung der letzteren endlich sind. Bei der Anwendung dieses Satzes stellt sich sofort folgende Frage: «Was bedeutet ‚asymptotisch' ?»; anders formuliert: «Wie gross muss $n$ mindestens sein, bis wir in guter Näherung mit der Normalverteilung rechnen dürfen?» Für den Fall, dass es sich um die in Kapitel 2 beschriebene Grundgesamtheit der Unfallkosten handelt, möge dieses Kapitel die Antwort geben.

Für die folgenden Untersuchungen betrachten wir 3 Gesamtheiten:

*a)* Die Grundgesamtheit der Unfallkosten.

*b)* Die in den zwei vorhergehenden Kapiteln beschriebene «grosse Stichprobe» von $N = 1564$ Beobachtungen (kurz $N$-Stichprobe).

*c)* Eine «kleine Stichprobe» von $n$-Beobachtungen (kurz $n$-Stichprobe).

Mit griechischen Buchstaben ($\xi, \eta$, usw.) bezeichnen wir stochastische Variabeln der Grundgesamtheit, mit kleinen lateinischen ($x$, $y$, usw.) solche der $N$-Stichprobe.

$F(X) = W(\xi \leqq X)$ sei die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit,

$$F_N(X) = W_N(x \leqq X) = \frac{1}{N} \sum_{x_i \leq x} (1) = \frac{\text{Anzahl } x_i \leqq X}{N}.$$

Für wachsendes $N$ konvergiert $F_N(X)$ «in probability» gegen $F(X)$. Es liegt daher auf der Hand in Fällen, wo die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit unbekannt ist, $F(X)$ durch $F_N(X)$ zu ersetzen. Wir erlauben uns, in unserem Falle diese Ersetzung zu machen und werden dann nachträglich den bei dieser Operation entstandenen Fehler abschätzen.

Die Verteilungsfunktion des Durchschnitts einer Summe von $n$ unabhängigen stochastischen Variabeln aus der Gesamtheit berechnet sich aus dem Faltungsintegral

$$G(X) = \int F(nX - t_1 - t_2 - \ldots - t_{n-1})\, dF(t_1) \ldots dF(t_{n-1}),$$

symbolische Schreibweise

$$G(X) = [F(nX)]^{*n},$$

$G(X)$ bezeichnet dabei die Verteilungsfunktion des Durchschnittes,

$$n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Im Sinne der Bemerkung von vorhin ersetzen wir $F(X)$ durch $F_N(X)$ und finden:

$$G(X) = [F_N(nX)]^{*n}. \tag{1}$$

Auf Grund dieser Formel haben wir in der vorliegenden Arbeit die Verteilungsfunktion des Durchschnitts einer $n$-Stichprobe berechnet. Dass im vorliegenden Falle die Ersetzung von $F(X)$ durch $F_N(X)$ erlaubt ist, ergibt sich aus der Ungleichung von Tschebyscheff wie folgt:

Es ist nach Definition:

$$G(X) = W(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leqq nX)$$

und

$$[F_N(nX)]^{*n} = \frac{1}{N^n} \sum_{x_1 + \ldots + x_n \leq nN} (1) = \frac{\nu(nX)}{N^n},$$

wobei $\nu(nX)$ diejenige Anzahl Variationen der $N$ möglichen Werte von $x_k$ darstellt, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq nX$ wird. Diese Aussagen können wir noch etwas anders fassen. Sei $X$ ein beliebiger, aber fester Wert. Mit $A$ bezeichnen wir das Ereignis, dass $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leqq nX$ ist. Dann kann man $\nu(nX)$ als Anzahl interpretieren, wie oft sich das Ereignis $A$ in einer Stichprobe von $N^n$ Beobachtungen eingestellt hat. Wir wollen darum statt $\nu(nX)$ von jetzt an $\nu(A)$ schreiben. Anderseits sei $p$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von $A$ in einem einzigen Versuche, $q = 1 - p$ die Gegenwahrscheinlichkeit. Dann können wir die Verteilungsfunktionen folgendermassen umschreiben:

$$G(X) = W(A), \quad [F_N(nX)]^{*n} = \frac{\nu(A)}{N^n}.$$

Nach der Tschebyscheffschen Ungleichung gilt dann:

$$W\{|G(X) - [F_N(nX)]^{*n}| > \varepsilon\} \leqq \frac{\mathrm{Var}\,[\nu(A)]}{N^{2n}\,\varepsilon^2} = \frac{pq}{N^n\,\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4N^n\,\varepsilon^2}, \quad (2)$$

womit wir ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Formel 1 gefunden haben.

## B. Praktischer Teil

Die Verteilungsfunktion des Durchschnitts einer 2-Stichprobe berechnet sich nach der im «Theoretischen Teil» entwickelten Faltungsformel 1 wie folgt:

$$G(Y) = \int F_N(2Y - X)\, dF_N(X).$$

Für die Dichtefunktion $g(Y) = G'(Y)$ lautet die entsprechende Formel:

$$g(Y) = \int f_N(2Y - X)\, f_N(X)\, dX.$$

Die Dichtefunktion der $N$-Stichprobe ist den Tabellen 1 (für den gewöhnlichen Maßstab) respektiv 2 (für den logarithmischen Maßstab) zu entnehmen. Da sie eine stückweise konstante Funktion ist, wird das Faltungsintegral zur Faltungssumme.

$$g(Y_k) = \sum_j f_N(2Y_k - X_j)\, f_N(X_j)\, \Delta j.$$

Die Summation ist hierbei zu erstrecken über alle Intervalle, in welchen sowohl $f_N(2Y_k - X)$ als auch $f_N(X)$ konstant sind. $\Delta j$ bezeichnet die Länge des «Konstanzintervalles» Nummer $j$. Um nicht allzu komplizierte Summen zu erhalten, wählten wir *äquidistante* «Konstanz-Intervalle»

Wählt man zudem noch $Y_k$ als deren *Mittelpunkte*, so lautet die Faltungssumme:

$$g(Y_k) = h \sum_j f_N(2Y_k - X_j)\, f_N(X_j), \qquad (3)$$

$h =$ konstante Intervallbreite.

Das ist die Formel, welche wir für die praktische Durchführung der Rechnung benutzen.

*a)* Das Kapitel «Verteilung der Einzelkosten» legt uns die Vermutung nahe, dass im logarithmischen Maßstabe schon für sehr kleine Stichproben die Durchschnitte normal verteilt sein werden. Die Durchführung der Rechnung bestätigt diese Vermutung. *Bereits für $n = 4$ finden wir eine Dichtefunktion $g(Y)$ die von derjenigen der Normalverteilung nur noch erstaunlich wenig verschieden ist.*

Tabelle 6 gibt in der dritten Kolonne die Dichtefunktion, von der wir ausgingen, in der vierten Kolonne das Faltungsresultat für $n = 4$.

Testet man die Abweichung der 4. Kolonne von einer normalen Dichtefunktion mittels $\chi^2$, findet man:

$$\chi^2 = 10{,}33,$$
$$\text{Freiheitsgrad } r = 19 - 1 - 2 = 16.$$

Demgegenüber hat die 5% Vertrauensgrenze bei einem Freiheitsgrad von 16 den Wert

$$\chi^2_{0,05} = 26{,}296.$$

In Kolonne 4 von Tabelle 6 stellt man fest, dass die Dichtefunktion für einige Gruppen bereits null ist. Diese Erscheinung war zu erwarten, rutschen doch nach dem schwachen Gesetz der grossen Zahlen die beobachteten Durchschnitte mit wachsendem $n$ immer mehr an den Erwartungswert der Grundgesamtheit heran.

*b)* Nachdem der Durchschnitt der Logarithmen schon für $n = 4$ normalverteilt ist, stellt sich natürlich automatisch folgende Frage: Lohnt sich der Umweg über die Logarithmen? Oder ist vielleicht auch schon der Durchschnitt der Numeri für kleine $n$ normal verteilt? Diese Frage untersuchten wir so: Wir falteten zunächst einmal, erhielten dann die Dichtefunktion des Durchschnitts von 2 stochastischen Variabeln, diese falteten wir mit sich selbst und erhielten die Dichtefunktion des Durchschnitts von 4 stochastischen Variabeln usw.

*Tabelle 6*

| Intervall | Mittelpunk | $f_N(y)$ | $g(y)\ n=4$ |
|---|---|---|---|
| 0,05–0,15 | 0,1 | 27 | 0,0 |
| 0,15–0,25 | 0,2 | 27 | 0,0 |
| 0,25–0,35 | 0,3 | 27 | 0,0 |
| 0,35–0,45 | 0,4 | 27 | 0,0 |
| 0,45–0,55 | 0,5 | 27 | 0,1 |
| 0,55–0,65 | 0,6 | 27 | 0,8 |
| 0,65–0,75 | 0,7 | 27 | 4,2 |
| 0,75–0,85 | 0,8 | 27 | 10,4 |
| 0,85–0,95 | 0,9 | 27 | 65,0 |
| 0,95–1,05 | 1,0 | 27 | 207,9 |
| 1,05–1,15 | 1,1 | 1514,5 | 433,9 |
| 1,15–1,25 | 1,2 | 1939,9 | 1833,1 |
| 1,25–1,35 | 1,3 | 1939,9 | 3512,7 |
| 1,35–1,45 | 1,4 | 968,4 | 5239,9 |
| 1,45–1,55 | 1,5 | 695,4 | 8170,2 |
| 1,55–1,65 | 1,6 | 695,4 | 10613,4 |
| 1,65–1,75 | 1,7 | 754,1 | 11747,8 |
| 1,75–1,85 | 1,8 | 581,7 | 12429,5 |
| 1,85–1,95 | 1,9 | 551,3 | 12041,2 |
| 1,95–2,05 | 2,0 | 551,3 | 10339,6 |
| 2,05–2,15 | 2,1 | 712,2 | 8237,5 |
| 2,15–2,25 | 2,2 | 876,1 | 6115,8 |
| 2,25–2,35 | 2,3 | 876,1 | 4078,4 |
| 2,35–2,45 | 2,4 | 868,2 | 2451,7 |
| 2,45–2,55 | 2,5 | 761,2 | 1355,0 |
| 2,55–2,65 | 2,6 | 761,2 | 671,9 |
| 2,65–2,75 | 2,7 | 543,9 | 287,0 |
| 2,75–2,85 | 2,8 | 543,9 | 105,6 |
| 2,85–2,95 | 2,9 | 200,9 | 34,4 |
| 2,95–3,05 | 3,0 | 200,9 | 9,9 |
| 3,05–3,15 | 3,1 | 159,4 | 2,5 |
| 3,15–3,25 | 3,2 | 54,2 | 0,6 |
| 3,25–3,35 | 3,3 | 54,2 | 0,1 |
| 3,35–3,45 | 3,4 | 12,6 | 0,0 |
| 3,45–3,55 | 3,5 | 12,6 | 0,0 |
| 3,55–3,65 | 3,6 | 12,6 | 0,0 |
| 3,65–3,75 | 3,7 | 12,6 | 0,0 |
| 3,75–3,85 | 3,8 | 12,6 | 0,0 |
| 3,85–3,95 | 3,9 | 12,6 | 0,0 |

Auf Grund dieser Verfahren stellten wir fest:

Für $n = 2^9 = 512$ weicht die Dichtefunktion noch signifikant von einer normalen Dichte ab.

Für $n = 2^{10} = 1024$ liegt die Abweichung aber bereits weit innerhalb der 5% Vertrauensgrenze.

Die Werte für $\chi^2$ sind in Tabelle 7 dargestellt:

*Tabelle 7*

*Annäherung an die Normalverteilung im gewöhnlichen Maßstab*

| $n$ | $\chi^2$ | Freiheitsgrad | $\chi^2_{0,05}$ | $\chi^2_{0,001}$ |
|---|---|---|---|---|
| 32 | 417,74 | 4 | 9,488 | 18,467 |
| 64 | 136,54 | 3 | 7,815 | 16,266 |
| 128 | 58,50 | 3 | 7,815 | 16,266 |
| 256 | 15,64 | 2 | 5,991 | 13,815 |
| 512 | 34,93 | 18 | 28,869 | 42,312 |
| 1024 | 5,44 | 12 | 21,026 | 32,909 |

Irgendwo zwischen 512 und 1024 wird also die Vertrauensgrenze durchschnitten.

In Tabelle 7 fällt auf, dass die Zahl der Freiheitsgrade zwischen $n = 256$ und $n = 512$ sprunghaft zunimmt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass von den ursprünglich 100 Gruppen mit der konstanten Intervallbreite 50, durch fortgesetzte Faltung bis auf $n = 256$ die meisten null geworden waren. Die Intervallbreite musste deshalb auf 10 reduziert werden, um bei den weiteren Faltungen noch genügend Gruppen für eine richtige Schätzung der Parameter der Normalverteilung und die Durchführung des $\chi^2$ Tests zu haben.

Das Ergebnis unserer Untersuchung lautet ganz eindeutig dahin, dass der Übergang auf den logarithmischen Maßstab einen grossen Gewinn an Information mit sich bringt und deshalb unbedingt angezeigt ist.

Im Sinne der Formel 2 des «theoretischen Teils» untersuchen wir noch die Anwendbarkeit unserer Berechnungsmethode. Lassen wir eine Abweichung von $\varepsilon$ in der Dichtefunktion zu und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass unser Verfahren Resultate liefert, die diese zulässige Schranke überschreiten.

*a)* Logarithmischer Maßstab:

$\varepsilon = 0{,}001 \qquad n = 4$

$N = 1564$

$W \leqq 4 \cdot 10^{-8} = 0{,}000\,000\,04.$

*b)* Gewöhnlicher Maßstab:

Schon für $n = 32$ wird $W$ praktisch $= 0$.

## 4. Kapitel

## Ein Kriterium zum Entscheid von Änderungen in der *F*-Grundgesamtheit

Will man untersuchen, ob in einem bestimmten Betriebe während einer bestimmten Zeit $T$ die Grundgesamtheit der Unfallkosten bei eingetretenem Unfalle unverändert geblieben ist, so kann man folgendermassen vorgehen. Man registriert zunächst alle Unfälle mit dem Datum, an welchem sie sich ereignet haben. Dann teilt man die Zeitspanne $T$ in gleichlange Zeitintervalle ein. Dabei muss man aber beachten, dass die Intervalle so gross werden, dass jedes mindestens 4 Unfälle enthält. Für jedes Intervall berechnet man dann den Logarithmus des geometrischen Mittels der entstandenen Unfallkosten. Wir benützen dabei folgende Sprechweise. Die im $i$-ten Intervall registrierten Unfallkosten nennen wir die $i$-te Stichprobe schlechthin. Die Gesamtheit der Logarithmen des geometrischen Mittels bezeichnen wir als die «Geometrisch-Mittel-Stichprobe» (G.-M.-Stichprobe). Das Kriterium, das wir aufstellen wollen, läuft nun darauf hinaus, für folgende Hypothese einen Test anzugeben:

«Alle Stichproben sind aus der gleichen Grundgesamtheit gezogen.»

Unter Annahme dieser Hypothese ist der Logarithmus des geometrischen Mittels der $i$-ten Stichprobe $(\mu, \sigma_i)$-normalverteilt $\left(\sigma_i = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n_i}}\right)$. $\mu, \sigma$ bedeuten dabei Erwartungswert und Streuung der Grundgesamtheitsverteilung.

Das Vorgehen ist nun folgendes. Zunächst erstellt man folgende Tabelle:

*Tabelle 8*

| Intervall | $J_1$ | $J_2$ | $J_i$ | $J_m$ |
|---|---|---|---|---|
| Anzahl Unfälle | $n_1$ | $n_2$ | $n_i$ | $n_m$ |
| Logarithmen des geometr. Mittels | $x_1$ | $x_2$ | $x_i$ | $x_m$ |
| Standardisierte Variable | $u_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}\sqrt{n_1}$ | $u_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}\sqrt{n_2}$ | $u_i = \frac{x_i-\mu}{\sigma}\sqrt{n_i}$ | $u_m = \frac{x_m-\mu}{\sigma}\sqrt{n_m}$ |

In dieser Tabelle sind $\mu$ und $\sigma$ vorläufig noch unbekannte Parameter der Grundgesamtheit. Wir schätzen ihre numerischen Werte aus der G.-M.-Stichprobe, indem wir verlangen, dass die standardisierten Logarithmen des geometrischen Mittels den Erwartungswert «null» und die Streuung «eins» haben.

Wir fordern und finden

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i-\mu}{\sigma}\sqrt{n_i} = 0, \qquad \mu = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i\sqrt{n_i}}{\sum_{i=1}^{m}\sqrt{n_i}};$$

$$\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}n_i = 1, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(x_i-\mu)^2.$$

Unter Benützung dieser 2 Formeln können wir nun Tabelle 8 vollständig ausfüllen. Die Zahlenwerte für die standardisierten Variabeln ($u$-Werte) trägt man dann zweckmässig in einer Kontrollkarte auf (Figur 2). Auf dieser Kontrollkarte sind gewisse Vertrauenslinienpaare markiert. Sie sind numeriert und bei einer Vertrauenswahrscheinlichkeit $p_0$ folgendermassen berechnet. Es soll die Wahrscheinlichkeit, dass $i$ aufeinanderfolgende Punkte auf der gleichen Seite ausserhalb des Paares Nr. 1 zu liegen kommen, kleiner als $p_0$ sein. Die zwei Geraden des Paares liegen symmetrisch zur horizontalen Achse, und ihre Ordinaten berechnen sich wie folgt:

$i \neq 1$ obere Vertrauensgerade: $u = \Phi^{-1}\left(1 - p_0^{\frac{1}{i}}\right)$,

untere Vertrauensgerade: $u = \Phi^{-1}\left(p_0^{\frac{1}{i}}\right)$,

$i = 1$ obere Vertrauensgerade: $u = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p_0}{2}\right)$,

untere Vertrauensgerade: $u = \Phi^{-1}\left(\frac{p_0}{2}\right)$;

$\Phi^{-1}(x)$ bedeutet dabei die inverse Funktion zum Wahrscheinlichkeitsintegral der (0,1) normalen Verteilung. Wird nun irgendeine Vertrauenslinie (z. B. Nr. $k$) öfters als ihre Nummer ($k$) angibt nach derselben Seite überschritten, dann verwerfen wir die Hypothese der konstanten Grundgesamtheit. Mit andern Worten sagen wir dann, die $F$-Grundgesamtheit habe sich geändert.

Das Kontrollkartensystem ist selbstverständlich nicht die einzige Möglichkeit, um nachzuprüfen, ob die $u$-Werte aus einer (0,1)-normalen Grundgesamtheit stammen. Dieses System scheint uns deshalb vorteilhaft, weil es zunächst einmal keinen allzu grossen Rechenaufwand erfordert, dann aber auch als «halbgraphische» Methode eine gewisse Anschaulichkeit besitzt.

*Kontrollkarte* *Fig. 2*