Sterbegesetze, für welche der Barwert einer Verbindungsrente gewisse Mittelwerteigenschaften erfüllt

Sterbegesetze, für welche der Barwert einer Verbindungsrente gewisse Mittelwerteigenschaften erfüllt

Von *Ernst Rufener*, Zürich

Versicherungswerte auf verbundene Leben werden in der Regel für die Berechnung auf einen oder mehrere Werte gleichaltriger Leben zurückgeführt. Solange Makehams Gesetz einer Sterbetafel zugrunde liegt, ist diese Zurückführung einfach: die verschiedenen Grössen der Altersvariablen werden durch das gemeinsame Zentralalter ersetzt. Für neuere Sterbetafeln, die nicht nach Makeham ausgeglichen sind, gilt diese Zentralaltereigenschaft nicht mehr streng; man hat sich, falls sie trotzdem beansprucht wird, mit einer – allerdings praktisch durchaus brauchbaren – Näherung zu begnügen oder wird auf andere Methoden verwiesen. Wie H. Jecklin in verschiedenen Arbeiten gezeigt hat [1]), eignen sich namentlich die Lidstoneschen Approximationen zur Herleitung geeigneter Formeln für den praktischen Gebrauch. Ein einfaches und naheliegendes Verfahren besteht darin, die Prämie für ein Paar (x, y) aus den Prämien der beiden gleichaltrigen Paare (x, x) und (y, y) durch arithmetische Mittelbildung zu bestimmen:

$$P''_{xy:\overline{n|}} = \tfrac{1}{2}\left\{P''_{xx:\overline{n|}} + P''_{yy:\overline{n|}}\right\}.$$

Für die gemischte Versicherung mit

$$P''_{xy:\overline{n|}} = \frac{A_{xy:\overline{n|}} + \alpha + \gamma\, \ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}{(1-\beta)\, \ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}, \quad A_{xy:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n|}},$$

[1]) H. Jecklin, Elementary Generalizations upon Lidstone's Approximation for two joint Lives, The Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 76, Part 3, No. 344, December 1950; insbesondere wird auf das darin enthaltene Literaturverzeichnis hingewiesen.

entspricht diesem Prämienmittelwert die harmonische Mittelbildung für Rentenbarwerte

$$\frac{1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{a}_{yy:\overline{n}|}}\right\}$$ [1].

Das numerische Überprüfen derartiger Formeln lässt sich unseres Erachtens sinnvoll durch die Frage nach Sterbegesetzen, welche durch diese Mittelwerteigenschaft charakterisiert sind, ergänzen. Arithmetische und geometrische Mittelbildung werden ihr dabei zur Seite gestellt. – Die vorliegende Studie ist der Abklärung dieser Fragen, die in der Literatur nur spärlich gestreift worden sind, gewidmet. Unsere Betrachtungen bleiben dabei auf kontinuierliche Leibrenten beschränkt.

1. Sterbegesetze, für die sich der Barwert $\bar{a}_{xy}$ der Verbindungsrente als harmonisches Mittel zu den Barwerten gleichen Alters $\bar{a}_{xx}$ und $\bar{a}_{yy}$ darstellen lässt

Wir wenden uns im folgenden zunächst analytischen Sterbegesetzen zu, die sich durch die Eigenschaft

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx}} + \frac{1}{\bar{a}_{yy}}\right\} \tag{1}$$

auszeichnen. (1) definiert $\bar{a}_{xy}$ als harmonisches Mittel zu den für gleichaltrige Paare gerechneten Barwerten $\bar{a}_{xx}$ und $\bar{a}_{yy}$, stellt mithin eine additive Zerlegung der reziproken Barwertfunktion in zwei Funktionen dar, von denen jede nur von einer Altersvariablen abhängt:

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy}} = g(x) + g(y)\,. \tag{2}$$

---

[1] $$\frac{1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\ddot{a}_{xx:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{a}_{yy:\overline{n}|}}\right\}$$

ist Folgerung aus der Lidstoneschen Näherung

$$\frac{1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\,.$$

Die beiden versicherten Leben sollen dasselbe Absterbegesetz befolgen, so dass für die kommutierten Zahlen in

$$\bar{a}_{xy} = \frac{\overline{N}_{xy}}{D_{xy}}$$

die Darstellungen

$$\begin{aligned} D_{xy} &= e^{-\frac{\delta}{2}(x+y)} l(x)\, l(y) = f(x)\, f(y)\,, \quad f(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x} l(x)\,, \\ \overline{N}_{xy} &= \int_0^\infty f(x+\xi)\, f(y+\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{3}$$

gelten. Die positive, im Unendlichen verschwindende Funktion $f(x)$ sei hinreichend regulär, so dass die nachfolgend durchgeführten Umformungen richtig sind; insbesondere sei $f(x)$ differenzierbar.

Vermöge (3) stellt nun (2) eine nichtlineare Integralgleichung dar,

$$\int_0^\infty f(x+\xi)\, f(y+\xi)\, d\xi = \frac{f(x)\, f(y)}{g(x)+g(y)}\,, \tag{4}$$

deren Lösung durch Differentiation gefunden wird. Leitet man nämlich (4) nach x und y ab und fasst die entstehenden Ausdrücke

$$\int_0^\infty f'(x+\xi)\, f(y+\xi)\, d\xi = \frac{f(x)\, f(y)}{g(x)+g(y)} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)+g(y)}\right],$$

$$\int_0^\infty f(x+\xi)\, f'(y+\xi)\, d\xi = \frac{f(x)\, f(y)}{g(x)+g(y)} \left[\frac{f'(y)}{f(y)} - \frac{g'(y)}{g(x)+g(y)}\right]$$

durch Addition zusammen, dann kann die Integration über die Ableitung eines Produktes ausgeführt und das Ergebnis mit

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(y)}{f(y)}\right] \frac{1}{g(x)+g(y)} - \frac{g'(x)+g'(y)}{[g(x)+g(y)]^2} = -1 \tag{5}$$

festgehalten werden.

Der aus
$$\int_0^\infty [f(x+\xi)]^2\, d\xi = \int_x^\infty [f(\xi)]^2\, d\xi = \frac{[f(x)]^2}{2g(x)}$$
durch Ableiten erhaltene Ausdruck
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} - g(x) \tag{6}$$
bestimmt bei gegebenen $g(x)$ die Funktion $f(x)$ als Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung,
$$f(x) = k\sqrt{g(x)}\, e^{-\int g(x)\, dx}\,, \tag{7}$$
und führt, in (5) substituiert, zu folgender Bedingung für die Funktion $g(x)$:
$$\frac{1}{2}\left[\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{g'(y)}{g(y)}\right] = \frac{g'(x)+g'(y)}{g(x)+g(y)}$$
oder
$$\left[\frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{g'(y)}{g(y)}\right][g(x)-g(y)] = 0\,. \tag{8}$$
Demzufolge ist entweder
$$g(x) = g(y) = \text{konstant} = \alpha, \quad (\alpha > 0)\,,$$
oder aber $g(x)$ ist der Bedingung
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{g'(y)}{g(y)} = \text{konstant} = A\,,$$
also
$$g(x) = \alpha e^{Ax}, \quad (A \geqq 0,\ \alpha > 0)$$
unterworfen. Da $g(x)$ als reziproke Barwertfunktion im Unendlichen nicht verschwinden kann, wird für den Parameter A der Variabilitätsbereich auf $A \geqq 0$ eingeschränkt und gibt damit Anlass zu zwei Fallunterscheidungen:

I. $\underline{A = 0}$: $\qquad g(x) = \alpha, \quad (\alpha > 0)$.

Nach (6) wird $\qquad f(x) = k e^{-\alpha x}, \quad (\alpha > 0)\,, \qquad (9)$

mithin die zugeordnete Überlebensordnung
$$l(x) = e^{\frac{\delta}{2}x} f(x) = k e^{-\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)x} = k s^x, \quad \left(\alpha > \frac{\delta}{2}\right) \tag{10}$$
vom Dormoyschen Typus.

Für ein derartiges Sterbegesetz wird wegen der Altersunabhängigkeit des Rentenbarwertes,

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty \frac{f(x+\xi)}{f(x)} \frac{f(y+\xi)}{f(y)} d\xi = \int_0^\infty e^{-2\alpha\xi} d\xi = \frac{1}{2\alpha},$$

die einleitend postulierte Mittelwerteigenschaft trivialerweise erfüllt.

II. $\underline{A > 0}$: $\qquad g(x) = \alpha e^{Ax}, \quad (\alpha > 0).$

Durch die zweiparametrige Schar

$$f(x) = \varkappa e^{\frac{Ax}{2}} e^{-\frac{\alpha}{A} e^{Ax}}, \tag{11}$$

welche (7) in diesem Falle darstellt, wird ein Sterbegesetz

$$l(x) = e^{\frac{\delta}{2}x} f(x) = \varkappa e^{\frac{A+\delta}{2}x} e^{-\frac{\alpha}{A}e^{Ax}} = \varkappa s^x g^{c^x} \tag{12}$$

mit

$$c = e^A, \quad g = e^{-\frac{\alpha}{A}}, \quad s = e^{\frac{A+\delta}{2}}$$

vom Makehamschen Typus bestimmt, zwischen dessen Parametern c und s die Beziehung

$$ce^\delta = cr = s^2, \quad (r = 1 + i = e^\delta) \tag{13}$$

besteht.

Satz 1. Durch die Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx}} + \frac{1}{\bar{a}_{yy}}\right\}$$

wird eine Makehamsche Überlebensordnung $l(x) = \varkappa s^x g^{c^x}$ *bestimmt, deren Parameter* c *und* s *durch die Relation (13)*

$$ce^\delta = cr = s^2$$

miteinander verknüpft sind.

Das Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als die Verbindungsrente $\bar{a}_{xy}$ für ein ungleichaltriges Paar (x, y) durch die Barwerte der beiden gleichaltrigen Paare (x, x) und (y, y) bestimmt wird, ohne die Eigenschaft des gemeinsamen Zentralalters zu berühren.

Auch die Umkehrung von Satz 1 ist richtig, wie durch explizites Ausrechnen des Barwertintegrales gezeigt wird: Da

$$\frac{f(x+\xi)}{f(x)}\,\frac{f(y+\xi)}{f(y)} = e^{A\xi}\, e^{-\frac{\alpha}{A}\,(e^{Ax}+e^{Ay})\,(e^{A\xi}-1)} = e^{A\xi}\, e^{-\theta(A)\,(e^{A\xi}-1)},$$

$$\theta(A) = \frac{\alpha}{A}\,(e^{Ax}+e^{Ay}),$$

erhält man für

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty \frac{f(x+\xi)}{f(x)}\,\frac{f(y+\xi)}{f(y)}\,d\xi = \int_0^\infty e^{A\xi} e^{-\theta(A)\,(e^{A\xi}-1)}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^\infty e^{\theta(A)\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{A\Theta\,(A)} = \frac{1}{\alpha\,(e^{Ax}+e^{Ay})}$$

$$= \frac{1}{g(x)+g(y)},$$

mithin

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy}} = g(x)+g(y) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx}}+\frac{1}{\bar{a}_{yy}}\right\}.$$

Satz 2. Notwendig und hinreichend dafür, dass die Barwerte der Verbindungsrente die Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx}}+\frac{1}{\bar{a}_{yy}}\right\}$$

aufweisen, ist das Bestehen der Relation

$$ce^{\delta} = cr = s^2$$

zwischen den Parametern c und s der Makehamschen Überlebensordnung und dem gewählten Rechnungszinsfuss.

Satz 2 charakterisiert Makehams Sterbegesetz durch die harmonische Mittelwerteigenschaft (1). Zu jeder mittels der Parameter c, g und s festgelegten Sterbeformel $l(x) = \varkappa s^x g^{c^x}$ lässt sich nach (13)

$$r = 1+i = \frac{s^2}{c}$$

ein «Zinsfuss» i^* angeben, für den (1) erfüllt wird.

Da $c > 1$, $s < 1$, bestimmt $r^* = 1 + i^* = \frac{s^2}{c} < 1$ ein negatives i^*, dem mithin keine reale Bedeutung zukommt. Nachfolgende Tabelle enthält für einige nach Makeham ausgeglichenen Sterbetafeln die Grössen r^*, $v^* = \frac{1}{r^*}$ und $\delta^* = \log r^*$.

Sterbetafel	Makehamsche Konstante	r^*	v^*	δ^*
SM 1939/44 [1]) . .	$c = 1.098\,52$ $g = 0.999\,18$ $s = 0.999\,00$	0.908 496	1.100 720	—0.041 677
SF 1939/44 [1]) . .	$c = 1.110\,57$ $g = 0.999\,75$ $s = 0.998\,54$	0.897 811	1.113 820	—0.046 815
MG 1948	$c = 1.106\,760$ $g = 0.999\,700$ $s = 0.998\,904$	0.901 559	1.109 191	—0.045 006
FG 1948	$c = 1.116\,283$ $g = 0.999\,896$ $s = 0.998\,810$	0.893 699	1.118 945	—0.048 809
MR 1950	$c = 1.11$ $g = 0.999\,809$ $s = 0.998\,313$	0.897 864	1.113 755	—0.046 790
FR 1946	$c = 1.11$ $g = 0.999\,86$ $s = 0.999\,39$	0.899 802	1.111 355	—0.045 853

[1]) Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44, Statistische Quellenwerke der Schweiz, Heft 232, Reihe Bk 4, Bern 1951, Seite 67*.

Besonders interessiert uns nun die Frage, ob die Mittelwerteigenschaft für Makehams Sterbeformel mit Nebenbedingung (13) ebenfalls für temporäre Verbindungsrenten erhalten bleibt.

Da $$\frac{f(x+n)}{f(x)}\,\frac{f(y+n)}{f(y)} = e^{An}\, e^{-\frac{a}{A}\left(e^{Ax} + e^{Ay}\right)\left(e^{An}-1\right)},$$

erhalten wir aus

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \bar{a}_{xy} - \frac{f(x+n)\,f(y+n)}{f(x)\,f(y)}\,\bar{a}_{x+n,\,y+n}$$

für den Barwert der temporären Verbindungsrente den Ausdruck

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{\alpha\,(e^{Ax}+e^{Ay})}\left[1 - e^{-\frac{\alpha}{A}(e^{Ax}+e^{Ay})(e^{An}-1)}\right]. \tag{14}$$

Die Mittelwertformel

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy:\overline{n}|}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx:\overline{n}|}} + \frac{1}{\bar{a}_{yy:\overline{n}|}}\right\} \tag{1'}$$

führt nach den Festsetzungen

$$Q_\zeta = Q(\zeta;A,n) = e^{-\frac{\alpha}{A}(e^{An}-1)\,e^{A\zeta}}, \quad (\zeta = x,y)$$

mit

$$Q(\zeta;A,0) = 1\,,$$

$$Q(\zeta;A,\infty) = 0$$

und

$$Q'_\zeta = -\alpha\,(e^{An}-1)\,e^{A\zeta}\,Q_\zeta$$

zur Bedingung

$$e^{Ax}\frac{Q_x}{1-Q_x^2} - e^{Ay}\frac{Q_y}{1-Q_y^2} = 0\,,$$

aus der zunächst

$$e^{Ax}Q_x - C\,(1-Q_x^2) = 0$$

und hieraus

$$Q_x\left[A - \alpha\,(e^{An}-1)\,e^{Ax} - 2\alpha C\,(e^{An}-1)\,Q_x\right] = 0$$

folgt. Für $n = 0$ wird daher $A = 0$; Eigenschaft (1′) ist nur im trivialen Falle erfüllt. (14) oder das Barwertintegral ergeben für den Sonderfall $A = 0$

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1-e^{-2\alpha n}}{2\alpha}$$

mit der trivialen Zerlegung

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy:\overline{n}|}} = \frac{2\alpha}{1-e^{-2\alpha n}} = g(x,n) + g(y,n)\,,$$

$$g(x,n) = \frac{\alpha}{1-e^{-2\alpha n}}\,.$$

Satz 3. Die Überlebensordnung von Dormoy, $l(x) = ks^x$, ist einziges Sterbegesetz, für welches

$$\frac{1}{\bar{a}_{xy:\overline{n}|}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx:\overline{n}|}} + \frac{1}{\bar{a}_{yy:\overline{n}|}}\right\}, \quad (n < \infty)$$

gilt.

2. Sterbegesetze, für die sich der Barwert $\bar{a}_{xy}$ der Verbindungsrente als arithmetisches Mittel aus den Barwerten $\bar{a}_{xx}$ und $\bar{a}_{yy}$ darstellen lässt

Die Sterbeformel wird charakterisiert durch

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{2}\{\bar{a}_{xx} + \bar{a}_{yy}\}, \tag{15}$$

eine Relation, die mit

$$\bar{a}_{xy} = h(x) + h(y)$$

äquivalent und mittels (3) sich als Integralgleichung

$$\int_0^\infty \frac{f(x+\xi)}{f(x)}\,\frac{f(y+\xi)}{f(y)}\,d\xi = h(x) + h(y) \tag{16}$$

schreiben lässt. Diese Integralgleichung ist nicht linear; ihre einzige Lösung wird wie folgt gefunden. Man setze in (16) $x = y$ und fasse die entstehenden Ausdrücke

$$\int_0^\infty \left[\frac{f(x+\xi)}{f(x)}\right]^2 d\xi = 2h(x), \qquad \int_0^\infty \left[\frac{f(y+\xi)}{f(y)}\right]^2 d\xi = 2h(y) \tag{17}$$

mit (16) in

$$\int_0^\infty \left[\frac{f(x+\xi)}{f(x)} - \frac{f(y+\xi)}{f(y)}\right]^2 d\xi = 0$$

zusammen. Da der Integrand positiv definite ($x \neq y$), verschwindet er identisch in ξ:

$$\frac{f(x+\xi)}{f(x)} - \frac{f(y+\xi)}{f(y)} \equiv 0 \quad (\text{in } \xi).$$

$\dfrac{f(x+\xi)}{f(x)}$ ist mithin von x unabhängig:

$$\frac{f(x+\xi)}{f(x)} = u(\xi)\,, \quad f(x+\xi) = u(\xi)\,f(x)\,,$$

woraus

$$f'(x) = u'(0)\,f(x)\,, \quad u'(0) = -\alpha$$

und damit die zur Dormoyschen Sterbeformel gehörende Exponentialfunktion

$$f(x) = k e^{-\alpha x}$$

einzige Lösung wird. Im Falle temporärer Barwerte wird die Entwicklung analog.

Satz 4. Einziges Sterbegesetz mit der Eigenschaft

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{2}\left\{\bar{a}_{xx:\overline{n}|} + \bar{a}_{yy:\overline{n}|}\right\}, \quad (n \leqq \infty)$$

ist die Überlebensordnung von Dormoy.

Die Funktion $h(x,n)$ ist durch (17) bestimmt:

$$h(x,n) = \frac{1}{2}\int_0^n e^{-2\alpha\xi}\,d\xi = \frac{1-e^{-2\alpha n}}{4\alpha}; \quad h(x;\infty) = \frac{1}{4\alpha}.$$

3. Sterbegesetze, für welche $\bar{a}_{xy} = \sqrt{\bar{a}_{xx}\,\bar{a}_{yy}}$ ist

Durch

$$\bar{a}_{xy} = \sqrt{\bar{a}_{xx}\,\bar{a}_{yy}} \tag{18}$$

wird für die Barwertfunktion eine multiplikative Zerlegung in zwei nur von einer Altersvariablen abhängige Faktoren bestimmt:

$$\bar{a}_{xy} = \varphi(x)\,\varphi(y)\,. \tag{19}$$

Beachtet man (3), dann lässt sich (19) in

$$\int_0^\infty \frac{f(x+\xi)}{f(x)}\,\frac{f(y+\xi)}{f(y)}\,d\xi = \varphi(x)\,\varphi(y) \tag{20}$$

und mit Hilfe der für $x = y$ erhaltenen Integralrelationen in

$$\int_0^\infty \left[\frac{f(x+\xi)}{f(x)} - \frac{f(y+\xi)}{f(y)}\right]^2 d\xi = [\varphi(x) - \varphi(y)]^2$$

überführen. Falls $\varphi(x) =$ konstant, wird $\dfrac{f(x+\xi)}{f(x)} = u(\xi)$ von x unabhängig, und wegen $f'(x) = u'(0)\, f(x)$ ist

$$f(x) = ke^{u(0)x} = ke^{-ax}$$

Lösungsfunktion. Dass $f(x) = ke^{-ax}$ einzige Lösung, lässt sich nun wie folgt darlegen: Aus (20),

$$\int_0^\infty f(x+\xi)\, f(y+\xi)\, d\xi = f(x)\, \varphi(x)\, f(y)\, \varphi(y),$$

ergibt sich durch Addition der beiden nach x und y gebildeten Ableitungen

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{f'(y)}{f(y)} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right] \varphi(x)\, \varphi(y) = -1. \tag{21}$$

Unter Berücksichtigung der aus

$$\int_0^\infty [f(x+\xi)]^2\, d\xi = \int_x^\infty [f(\xi)]^2\, d\xi = [f(x)\, \varphi(x)]^2$$

gewonnenen und für y analog lautenden Relation

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2\varphi^2(x)}$$

geht (21) über in

$$\{\varphi(x) - \varphi(y)\}^2 = 0,$$

woraus

$$\varphi(x) = \varphi(y) = \text{konstant}$$

folgt.

An Stelle von (19) trete nun

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \sqrt{\bar{a}_{xx:\overline{n}|}\,\bar{a}_{yy:\overline{n}|}}\,, \qquad (n < \infty)\,.$$

Ersetzt man darin die Barwerte durch ihre Integrale, so kann aus dem entstehenden Sonderfall einer Schwarzschen Ungleichung

$$\int_0^n f(x+\xi)\,f(y+\xi)\,d\xi = \sqrt{\int_0^n [f(x+\xi)]^2\,d\xi \int_0^n [f(y+\xi)]^2\,d\xi}\,,$$

auf die Relation

$$f(x+\xi) = \lambda(x,y)\,f(y+\xi)$$

geschlossen werden. In Verbindung mit

$$f'(x+\xi) = \lambda(x,y)\,f'(y+\xi)$$

folgt nun aber

$$\frac{f'(x+\xi)}{f(x+\xi)} = \frac{f'(y+\xi)}{f(y+\xi)} = v(\xi)\,,$$

damit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v(0) = -\alpha\,, \qquad (\alpha > 0)$$

und

$$f(x) = ke^{-\alpha x}\,, \qquad (\alpha > 0)\,.$$

Satz 5. Das Sterbegesetz von Dormoy, $l(x) = ks^x$, ist einzige Sterbeformel mit der Eigenschaft

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \sqrt{\bar{a}_{xx:\overline{n}|}\,\bar{a}_{yy:\overline{n}|}}\,, \qquad (n \leqq \infty)\,.$$

4. Über die Äquivalenz der Mittelwerteigenschaften von Verbindungsrenten

Die Eigenschaften der Barwerte *temporärer* Verbindungsrenten, sich als harmonisches, arithmetisches oder geometrisches Mittel aus Barwerten für gleichaltrige Paare darzustellen, sind äquivalent.

Um die Verhältnisse bei der *lebenslänglichen* Verbindungsrente abzuklären, stützen wir uns auf die Differentialgleichung des Rentenbarwertes

$$\dot{\bar{a}}_{x+t,y+t} = \bar{a}_{x+t,y+t}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta) - 1 \quad ^{1})\ ^{2}) \tag{22}$$

und die mittels

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{x+t,x+t} = \bar{a}_{x+t,x+t}\left(\mu_{x+t} + \frac{\delta}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

und

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{y+t,y+t} = \bar{a}_{y+t,y+t}\left(\mu_{y+t} + \frac{\delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \tag{22'}$$

durch Elimination der Sterbensintensitäten erhaltene Beziehung

$$\frac{d}{dt}\log\frac{\bar{a}_{x+t,y+t}}{\sqrt{\bar{a}_{x+t,x+t}\bar{a}_{y+t,y+t}}} = \frac{1}{\bar{a}_{x+t,y+t}} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{x+t,x+t}} + \frac{1}{\bar{a}_{y+t,y+t}}\right\}. \tag{23}$$

Ist die Mittelwertrelation (1),

$$\frac{1}{\bar{a}_{x+t,y+t}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{x+t,x+t}} + \frac{1}{\bar{a}_{y+t,y+t}}\right\},$$

erfüllt, dann erhält man durch Integration von (23) für $t = 0$

$$\bar{a}_{xy} = \psi(x,y)\sqrt{\bar{a}_{xx}\bar{a}_{yy}},$$

ein Ergebnis, das durchaus mit der uns bekannten Tatsache übereinstimmt, wonach durch harmonische Mittelbildung eine allgemeinere Klasse von Sterbegesetzen bestimmt wird, die Dormoys Überlebensordnung als trivialen Sonderfall enthält (Satz 1). Die Eigenschaft, eine der betrachteten geometrischen oder arithmetischen Mittelwertformeln zu erfüllen, fehlt den für diese nichttrivialen Sterbegesetze ermittelten

---

[1]) Punkte bezeichnen Ableitungen nach t.

[2]) Am einfachsten aus $\bar{a}_{x+t,y+t} = \dfrac{\bar{N}_{x+t,y+t}}{D_{x+t,y+t}}$ unter Beachtung von

$$\dot{\bar{N}}_{x+t,y+t} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty D_{x+t+\xi,y+t+\xi}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} D_{x+t+\xi,y+t+\xi}\,d\xi = -D_{x+t,y+t},$$

$$\dot{D}_{x+t,y+t} = \frac{d}{dt}\left[l_{x+t}\,l_{y+t}\,e^{-\frac{\delta}{2}(x+y)-\delta t}\right] = -D_{x+t,y+t}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)$$

hergeleitet. Vergleiche auch O. W. Spring, Kleine Bemerkung zu einer Klasse versicherungstechnischer Approximationen, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 50, Heft 2, S. 229–238.

Rentenbarwerten. – Für die Funktion $\psi(x,y)$ zeigt man das Bestehen der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \quad {}^{1}). \tag{24}$$

$\psi(x,y)$ ist daher nur eine Funktion der Differenz beider Altersvariablen

$$\psi(x,y)=\chi(x-y)\,, \quad {}^{2})$$

---

1) (22) entnimmt man

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{a}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{a}_{xy}}{\partial y}&=\bar{a}_{xy}(\mu_x+\mu_y+\delta)-1,\\ \frac{1}{2}\,\frac{\partial\bar{a}_{xx}}{\partial x}&=\bar{a}_{xx}\left(\mu_x+\frac{\delta}{2}\right)-\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}\,\frac{\partial\bar{a}_{yy}}{\partial y}&=\bar{a}_{yy}\left(\mu_y+\frac{\delta}{2}\right)-\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{25}$$

Fasst man die nach x und y gebildeten Ableitungen von

$$\bar{a}_{xy}=\psi(x,y)\sqrt{\bar{a}_{xx}\bar{a}_{yy}}\,,$$

$$\frac{\partial\bar{a}_{xy}}{\partial x}=\sqrt{\bar{a}_{xx}\bar{a}_{yy}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,y)\sqrt{\frac{\bar{a}_{yy}}{\bar{a}_{xx}}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial\bar{a}_{xx}}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial\bar{a}_{xy}}{\partial y}=\sqrt{\bar{a}_{xx}\bar{a}_{yy}}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}+\psi(x,y)\sqrt{\frac{\bar{a}_{xx}}{\bar{a}_{yy}}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial\bar{a}_{yy}}{\partial y}$$

durch Addition zusammen und substituiert darin für $\frac{1}{2}\,\frac{\partial\bar{a}_{xx}}{\partial x}$ und $\frac{1}{2}\,\frac{\partial\bar{a}_{yy}}{\partial y}$ die Werte gemäss (25), so folgt

$$\frac{\partial\bar{a}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{a}_{xy}}{\partial y}=\sqrt{\bar{a}_{xx}\bar{a}_{yy}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+$$
$$\psi(x,y)\sqrt{\bar{a}_{xx}\bar{a}_{yy}}\left\{\mu_x+\mu_y+\delta-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\bar{a}_{xx}}+\frac{1}{\bar{a}_{yy}}\right]\right\},$$

unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (25) und der Voraussetzung

(24) $$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\,.$$

2) Transformiert man in $\psi(x, y)$ die Variablen linear,

$$\psi(x,y)=\chi(x+y,x-y)\,,$$

so verschwindet gemäss (24) die Ableitung nach $x+y$, d. h. χ ist von $x+y$ unabhängig.

so dass
$$\bar{a}_{xy} = \chi(x-y)\sqrt{\bar{a}_{xx}\,\bar{a}_{yy}}$$
und
$$\bar{a}_{xy} = \chi^2(x-y)\,\frac{1}{2}\left\{\bar{a}_{xx} + \bar{a}_{yy}\right\}$$
wird.

Insbesondere ist für die durch (1) bestimmten Sterbegesetze (12)

$$l(x) = \varkappa s^x g^{c^x}, \qquad e^\delta c = s^2, \qquad (\log c = A)$$

$$\frac{1}{\chi(x-y)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[e^{\frac{A}{2}(x-y)} + e^{-\frac{A}{2}(x-y)}\right] = \operatorname{Cos}\frac{A}{2}(x-y) = \frac{1}{2}\left[c^{\frac{1}{2}(x-y)} + c^{-\frac{1}{2}(x-y)}\right], \\ \qquad\qquad A > 0,\ (n = \infty) \\ 1 \qquad\qquad , \ A = 0,\ (n \leqq \infty)\,. \end{cases}$$

Satz 6. Für ein Sterbegesetz (12) bestehen neben
$$\frac{1}{\bar{a}_{xy}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\bar{a}_{xx}} + \frac{1}{\bar{a}_{yy}}\right\}$$
gleichzeitig die Beziehungen
$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{A}{2}(x-y)}\,\frac{1}{2}\left\{\bar{a}_{xx} + \bar{a}_{yy}\right\}$$
und
$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{A}{2}(x-y)}\sqrt{\bar{a}_{xx}\,\bar{a}_{yy}}\,.$$

Im Falle temporärer Barwerte ist $A = 0$.

* * *

Die Ergebnisse legen es nahe, die Betrachtungen auf Verbindungsrenten mit beliebig vielen Versicherten auszudehnen oder aber Rentenbarwerte durch allgemeine Mittelwerteigenschaften zu definieren. Die Weiterverfolgung dieses Gedankens sowie die Mitteilung bereits erzielter Ergebnisse bleiben einer spätern Note vorbehalten.