

Über die Monte-Carlo-Methode

Autor(en): **Engeler, Erwin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966798>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über die Monte-Carlo-Methode

von *Erwin Engeler*, Zürich

Die Monte-Carlo-Methode ist keineswegs, wie der Name fast vermuten liesse, eine Theorie, deren Anwendung am Spieltisch sicheren Gewinn verheisst. Es handelt sich vielmehr um eine Methode für die numerische Auswertung von mathematischen Beziehungen mit Hilfe stochastischer Prozesse.

Betrachtet wird ein Modell für einen exakt definierten stochastischen Prozess. In diesem Modell seien gewisse mathematische Beziehungen zwischen gewissen Verteilungen, Erwartungswerten und den das Modell bestimmenden Parametern bekannt.

So besteht z.B. im Moserschen Modell für das Erneuerungsproblem ¹⁾ zwischen der Ausscheideordnung $Q(t)$ und der Erneuerungsfunktion $m(t)$ die Integralgleichung

$$m(t) = Q(t) + \int_0^t m(t-\tau) Q'(\tau) d\tau.$$

Nach der Monte-Carlo-Methode wird der dieser Integralgleichung zugrunde liegende Erneuerungsprozess allgemein zur Lösung von Integralgleichungen vom gleichen Typus herangezogen. Das einer gegebenen Integralgleichung entsprechende Mosersche Modell ist durch die Ausscheideordnung $Q(t)$ vollständig bestimmt.

Spielt man in dem entsprechend der Integralgleichung gewählten Modell den stochastischen Erneuerungsprozess genügend oft durch, so erhält man aus den einzelnen elementaren Erneuerungsfunktionen

¹⁾ Für die Deutung der Erneuerung als stochastischen Prozess vgl. z. B. H. Ammeter, Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse, Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. 55 (1955).

durch Mittelbildung eine Annäherung an die gesuchte Erneuerungsfunktion, wobei die Genauigkeit der Approximation sich mit der Anzahl der Versuche nach dem Gesetz der grossen Zahlen verbessert. Auf diese Weise würde die Monte-Carlo-Methode mit Hilfe von Erneuerungsprozessen eine (angenäherte) numerische Lösung von Integralgleichungen vom Typus der Moserschen Integralgleichungen ermöglichen.

Das oben am Beispiel einer Integralgleichung geschilderte Vorgehen ist charakteristisch für die Monte-Carlo-Methode. Auf ähnliche Weise können auch andere mathematische Beziehungen numerisch ausgewertet werden, sobald sie sich als Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Erwartungswerten für einen geeignet gewählten stochastischen Prozess interpretieren lassen.

In neuerer Zeit ist die Monte-Carlo-Methode insbesondere dadurch zu vermehrtem Interesse gelangt, dass die programmgesteuerten elektronischen Rechenautomaten es gestatten, auch kompliziertere stochastische Prozesse zu simulieren und (infolge ihrer grossen Rechengeschwindigkeit) innert nützlicher Frist ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zu liefern und auszuwerten.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Monte-Carlo-Methode an einigen aus der Literatur ausgewählten Beispielen zu erläutern. Wir haben dazu solche mathematische Probleme gewählt, bei welchen die Verbindung mit stochastischen Prozessen durchaus nicht auf der Hand liegt. Wir möchten uns die Behandlung der eingangs gegebenen Integralgleichung für das Erneuerungsproblem mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode für eine spätere Arbeit vorbehalten, in welcher wir auch auf die Lösung anderer mathematischer Probleme mittels der Monte-Carlo-Methode an Hand von Modellen aus der Versicherungsmathematik eingehen möchten.

1. Ein klassisches Beispiel für die Monte-Carlo-Methode ist die Ermittlung der Zahl π durch den Zürcher Astronomieprofessor *Wolf*. Er benützte dazu die bekannte Aufgabe von Buffon, welche darin besteht, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit welcher eine willkürlich geworfene Nadel der Länge l eine Parallele eines Parallelnetzes mit dem Parallelenabstand d schneidet.

Diese Wahrscheinlichkeit kann theoretisch leicht gefunden werden und beträgt $\frac{2l}{\pi \cdot d}$ bei einem Modell, welches durch die Parameter l und d

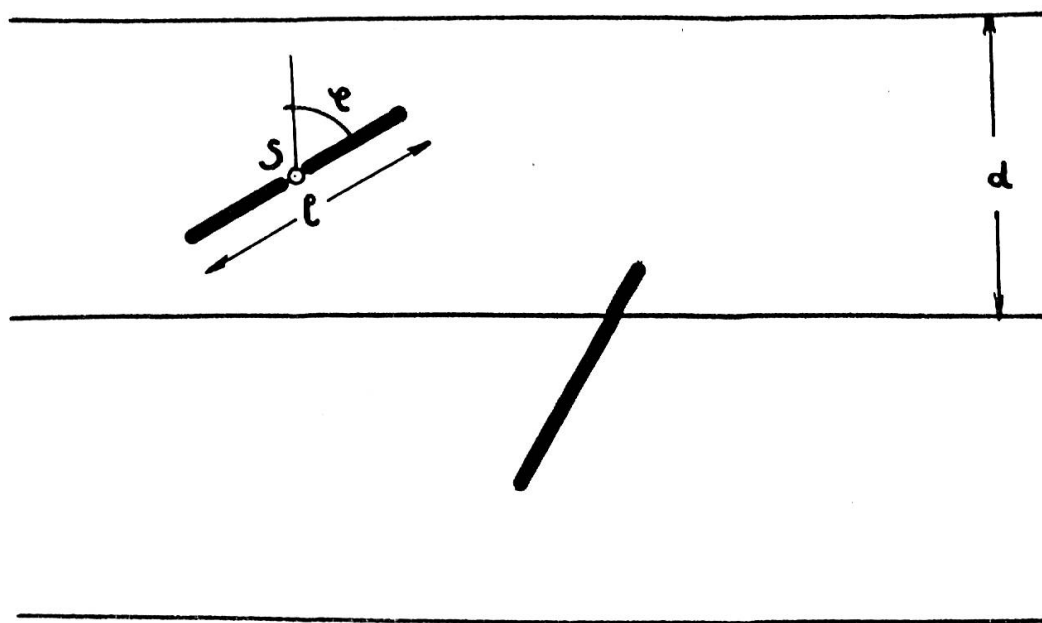


Fig. 1

bestimmt ist und bei welchem Gleichverteilung der Lage des Nadel-Schwerpunktes S und des Richtungswinkels φ der Nadel im Schwerpunkt angenommen wird. Das Problem der Bestimmung von π kann bei numerisch bekannter Wahrscheinlichkeit p und bekannten Werten für die Parameter l und d auf die numerische Auswertung der Beziehung

$$p = \frac{2l}{\pi \cdot d}$$

zurückgeführt werden. Prof. Wolf hat eine Nadel 5000mal geworfen und die Zahl π aus den Versuchsergebnissen vermöge der obigen Beziehungen ermittelt. Er fand für π den Wert 3,159. Dieser Wert weicht vom richtigen Wert für π um weniger als 1% ab. Immerhin ist zu bemerken, dass die Verbesserung des Versuchsergebnisses mit der Anzahl der Versuche nur sehr langsam steigt. Jede gesicherte Dezimale mehr erfordert nämlich das Hundertfache der vorherigen Versuchszahl.

2. Unter den Modellen für stochastische Prozesse, welche sich mit der Monte-Carlo-Methode zur Lösung von mathematischen Problemen heranziehen lassen, nehmen die Irrwegmodelle eine besonders wichtige Stellung ein. Die bekannteste mathematische Aufgabe, die sich mit einem Irrweg-Modell behandeln lässt, ist das Potentialproblem in der Ebene.

Auf dem Rand eines Gebietes G in der Ebene sei eine Funktion $f(x, y)$ vorgegeben. Das Gebiet G und die Funktion $f(x, y)$ sollen einigen

Bedingungen genügen, welche in praktischen Fällen stets erfüllt sein werden und auf die wir hier nicht näher einzutreten brauchen. Gesucht ist eine Funktion $u(x, y)$ im ganzen Gebiet G , welche die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ erfüllt und auf dem Rand von G mit den Werten von $f(x, y)$ übereinstimmt.

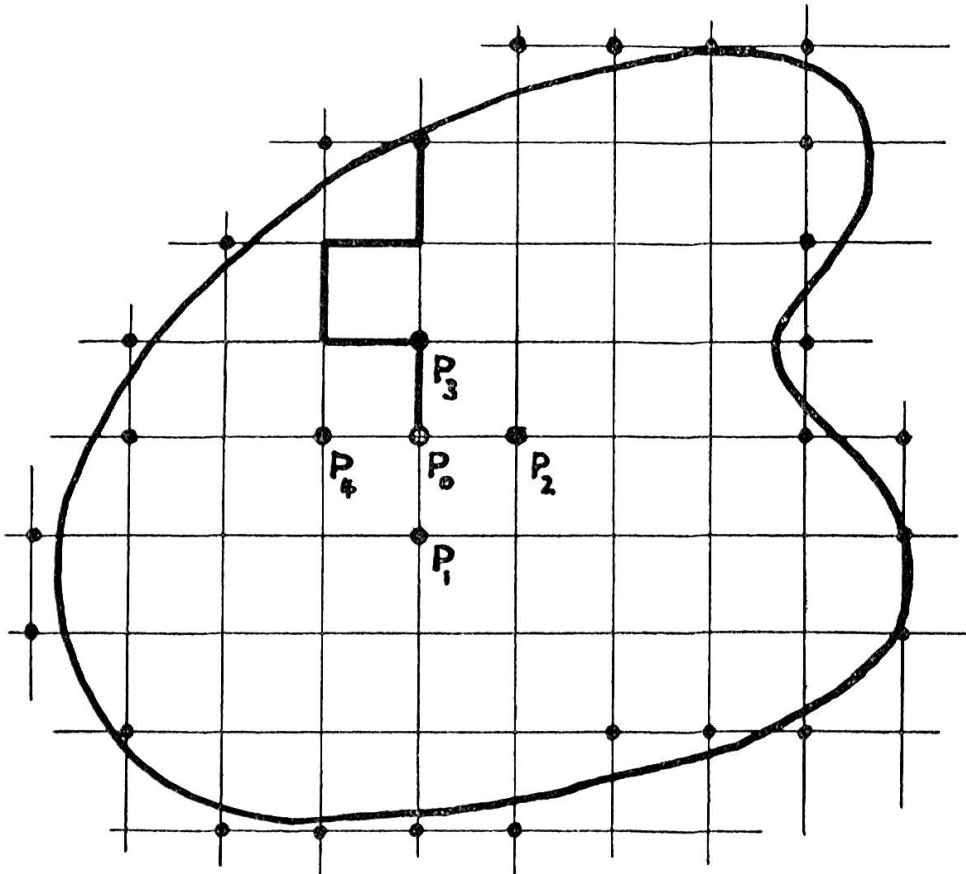


Fig. 2

Wir gehen darauf aus, für einen beliebigen Punkt $P_0 (= \{x_0, y_0\})$ des Gebietes G den Wert $u(x_0, y_0)$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck legen wir über das Gebiet G ein quadratisches Maschennetz der Maschenweite h so, dass P_0 zum Maschenpunkt wird. Ferner ersetzen wir den Rand von G durch einen «Maschen-Rand» aus dem Rande nächstgelegenen Maschenpunkten und bestimmen die Randwerte $f^*(x, y)$ auf dem Maschen-Rand in naheliegender Weise aus den vorgegebenen Randwerten $f(x, y)$.

In diesem Maschennetz suchen wir nun ausgehend von P_0 Irrwege, welche auf dem Maschen-Rand enden, indem wir eine Einrichtung zu Hilfe nehmen, mit welcher wir mit gleicher Wahrscheinlichkeit bei jeder

Betätigung einen der Buchstaben N , W , S oder E «würfeln». Beim ersten Wurf mögen wir etwa N herauswürfeln. Dementsprechend geht unser Irrweg von P_0 nach Norden (N) zum Punkt P_1 . Hier angelangt, wird erneut gewürfelt; wir setzen unsern Irrweg entsprechend dem Ergebnis (etwa W) um einen Schritt nach Westen fort. In dieser Weise verfahren wir, bis wir auf unserem Irrweg einen Punkt auf dem Maschenrand erreichen. Als «Gewinn» dieses Irrweges notieren wir uns den Wert von $f^*(x, y)$ für diesen Maschenpunkt. Nachdem wir eine grosse Anzahl von solchen von P_0 ausgehenden Irrwegen und die zugehörigen Gewinne bestimmt haben, bilden wir den arithmetischen Mittelwert der Gewinne.

Die Verbindung zwischen dem Irrwegproblem und dem Potentialproblem besteht nun darin, dass gilt:

Der Erwartungswert $E(P_0)$ des Gewinnes eines von P_0 ausgehenden Irrweges ist gleich dem Wert der Lösungsfunktion des Potentialproblems in diesem Punkt.

Dies können wir uns wie folgt klarmachen:

Für den Punkt P_0 lässt sich die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ durch eine Differenzgleichung ersetzen. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} &\approx \frac{\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} - \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} (u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) - 2u(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Eine entsprechende Beziehung gilt auch für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Durch Einsetzen erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) + u(x_0, y_0 + h) + u(x_0, y_0 - h) - \\ - 4u(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

In P_0 nimmt u also den arithmetischen Mittelwert der Werte von u in den vier Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 an. Da die benutzte Einrichtung zur Bestimmung von N, W, S, E die vier Richtungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit liefert, ist andererseits der Erwartungswert des Gewinnes eines Irrweges aus P_0 gleich dem arithmetischen Mittelwert der ent-

sprechenden Erwartungswerte in P_1, P_2, P_3 und P_4 . Die Erwartungswerte genügen also der Potentialgleichung $\Delta E(x, y) = 0$. Auf dem Maschen-Rand stimmen die Erwartungswerte gemäss der Organisation des Irrwegproblems mit den Werten $f^*(x, y)$ überein. Also löst die beschriebene Monte-Carlo-Methode das gegebene Potentialproblem.

Durch Modifikation der Definition des Gewinnes eines Irrweges kann das obige Randwertproblem auch für gewisse andere partielle Differentialgleichungen gelöst werden. Als Beispiel möchten wir nur die Gleichung

$$\Delta u(x, y) + g(x, y) \cdot u(x, y) = 0$$

erwähnen. Der Gewinn eines Irrweges ausgehend von P_0 durch die Maschenpunkte $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{m-1}, Q_m$ und endend im Punkt R des Maschen-Randes wird definiert zu

$$f^*(R) \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \frac{h^2}{4} g(Q_i)}$$

Ganz entsprechend wie oben lässt sich zeigen, dass der Erwartungswert des Gewinnes das gegebene Randwertproblem löst.

3. Ausgehend von der Theorie der Markoff-Ketten können auch andere mathematische Probleme einer Behandlung durch die Monte-Carlo-Methode zugänglich gemacht werden. Das naheliegendste Beispiel ist die Berechnung von Matrixpotenzen für Matrizen $(a_{i,j})$ mit nicht negativen Elementen. Die zentrale Idee besteht darin, die Zeilenvektoren so zu normieren, dass ihre Komponentensumme je 1 ergibt. Auf diese Weise entsteht eine Matrix von Übergangswahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit $p_{i,j}$, vom Zustand Nummer i in den Zustand Nummer j überzugehen, ist

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_i}, \text{ wo } a_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

Aus der Theorie der Markoff-Ketten weiss man, dass die Wahrscheinlichkeit, in k Schritten vom Zustand i in den Zustand j überzugehen, gleich $p_{i,j}^{(k)}$ ist, mit $(p_{i,j}^{(k)}) = (p_{i,j})^k$. Diese Zusammenhänge werden zur Berechnung von $(a_{i,j})^k$ benützt.

Sei $(a_{i,j})$ eine n -zeilige quadratische Matrix mit nicht negativen Elementen. Gesucht sei $(a_{i,j})^k = (b_{i,j})$. Wir betrachten n Urnen $U_1, U_2,$

..., U_n , die mit Kugeln gefüllt sind, welche Nummern von 1 bis n tragen. Dabei enthält jede Urne U_i :

$$\begin{array}{ll} N \cdot a_{i,1} & \text{Kugeln mit der Nummer 1} \\ N \cdot a_{i,2} & \text{Kugeln mit der Nummer 2} \\ \vdots & \\ N \cdot a_{i,n} & \text{Kugeln mit der Nummer } n \end{array}$$

Dabei ist N ein Faktor, der so gross sein soll, dass die auf ganze Zahlen gerundeten Produkte $N \cdot a_{i,j}$ in genügender Näherung proportional zu den $a_{i,j}$ sind.

Zur Berechnung eines Elementes der Potenzmatrix $(b_{i,j})$ organisieren wir nun das folgende Spiel: Wir beginnen mit der Urne Nummer i und ziehen daraus eine Kugel, lesen die Nummer dieser Kugel ab, legen diese zurück und gehen zur Urne mit der abgelesenen Nummer. Aus dieser Urne ziehen wir wieder eine Kugel, gehen zur befohlenen Urne usw. Auf diese Weise fahren wir fort bis wir insgesamt k Kugeln gezogen haben. Diese Kugeln mögen der Reihenfolge nach die folgenden Nummern tragen:

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_{k-1}, i_k$$

Als Gewinn dieser Partie definieren wir:

Gewinn der Partie

$$\{i, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k\} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j; \\ a_i \cdot a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1}}, & \text{falls } i_k = j \end{cases}$$

Dieses Spiel wiederholen wir nun genügend oft und ermitteln schliesslich den arithmetischen Mittelwert der erzielten Gewinne.

Der Zusammenhang zwischen dem beschriebenen Spiel und dem gestellten Problem besteht in Folgendem:

Der Erwartungswert des Gewinnes einer Partie ist gleich $b_{i,j}$.

Dies zeigt man leicht wie folgt:

Die Wahrscheinlichkeit der Partie

$\{i, i_1, i_2, i_3, \dots, i_{k-1}, j\}$ ist gleich

$$\frac{a_{i,i_1}}{a_i} \cdot \frac{a_{i_1,i_2}}{a_{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{i_{k-1},j}}{a_{i_{k-1}}}$$

Der Erwartungswert $E_{i,j}$ einer in i beginnender und auf j ausgerichteten Partie ist schliesslich:

$$E_{i,j} = \sum \text{Wahrscheinlichkeit (Partie)} \cdot \text{Gewinn (Partie)}$$

(Summe über alle Partien mit k Zügen)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} \frac{a_{i, i_1}}{a_i} \cdot \frac{a_{i_1, i_2}}{a_{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{i_{k-1}, j}}{a_{i_{k-1}}} \cdot a_i \cdot a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} a_{i, i_1} \cdot a_{i_1, i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1}, j} = b_{i, j}. \end{aligned}$$

Zu einem etwas umständlicher definierten Spiel führt das Problem der Inversion einer Matrix. Sei die n -zeilige quadratische Matrix $A = (a_{i,j})$ vorgegeben. Gesucht ist die Matrix $(I - A)^{-1}$. Die Matrix A habe ferner die Eigenschaft, dass die Reihe

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots \text{ konvergiert.}$$

$$\text{Dann ist } (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

Für das in Aussicht genommene Spiel verwenden wir wieder n Urnen U_1, U_2, \dots, U_n . Ferner bestimmen wir weitgehend willkürlich n^2 Zahlen $v_{i,j} \neq 0$ mit den nachfolgend gewünschten Eigenschaften. Sei N wieder eine genügend grosse Zahl. Jede Urne U_i füllen wir nun mit

$$[N \cdot a_{i,1} \cdot v_{i,1}] \text{ Kugeln mit der Nummer 1,}$$

$$[N \cdot a_{i,2} \cdot v_{i,2}] \text{ Kugeln mit der Nummer 2,}$$

$$\vdots$$

$$[N \cdot a_{i,n} \cdot v_{i,n}] \text{ Kugeln mit der Nummer } n$$

$$\text{sowie mit } \left[\left(1 - \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_{i,j} \right) \cdot N \right] \text{ Kugeln mit dem Vermerk STOP.}$$

Die Zahlen $v_{i,j}$ sind so zu bestimmen, dass

$$a_{i,j} \cdot v_{i,j} \geq 0 \text{ für } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ und so, dass } 0 < \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_{i,j} < 1.$$

Zur Berechnung des Elementes $b_{i,j}$ von $(I - A)^{-1}$ wird folgendes Spiel organisiert: Wir beginnen mit dem Ziehen bei der Urne U_i , gehen über zur Urne U_{i_1} mit der gezogenen Nummer i_1 und fahren so fort,

bis wir zum erstenmal eine Kugel mit dem Vermerk STOP ziehen. Dann ist eine Partie beendet. Als Gewinn dieser Partie definieren wir:

$$\text{Gewinn } \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, \text{ Stop}\} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i_k \neq j; \\ 1 \\ v_{i_1, i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{k-1}, i_k} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n a_{i, j} v_{i, j}\right), & \text{falls } i_k = j. \end{cases}$$

Man kann entsprechend wie oben zeigen, dass der *Erwartungswert des Gewinnes einer Partie gleich dem Element $b_{i, j}$ der Matrix $(I - A)^{-1}$ ist.*

4. Die hier geschilderten Beispiele vermögen selbstverständlich nicht, den ganzen Umfang des Anwendungsbereiches der Monte-Carlo-Methode abzugrenzen. Zudem ist dieser Zweig der angewandten Mathematik (d.h. eigentlich der angewandten Statistik) in steter Fortentwicklung begriffen und bietet wie jedes mathematische Forschungsgebiet neben einer Reihe von interessanten Resultaten eine Fülle von lockenden neuen Aufgaben.

Unter den Problemgruppen möchten wir an erster Stelle die Erzeugung von Zufallszahlen oder -proben einer gegebenen Verteilung auf programmgesteuerten Rechenmaschinen erwähnen. Ist eine Folge von Zufallszahlen der benötigten Verteilung gegeben, so lässt sich z. B. das Urnenschema zur Berechnung von $(I - A)^{-1}$ nach der Monte-Carlo-Methode durch ein von den Zufallszahlen gesteuertes Rechenprogramm auf der programmgesteuerten Rechenmaschine ersetzen.

Als zweites wichtiges Problem erhebt sich sodann die Frage nach den wesentlichen Charakteristiken der Verteilung der Spielergebnisse. Bei der Bestimmung von $(I - A)^{-1}$ z. B. hängt die Verteilung von der Parametermatrix $(v_{i, j})$ ab. Es ist eine praktisch wichtige und theoretisch interessante Frage, ob etwa die Streuung der Spielergebnisse durch geeignete Wahl der Parametermatrix minimal gemacht werden könnte. — Es wird bei allen Anwendungsbeispielen der Monte-Carlo-Methode stets die Frage nach geeigneten Modifikationen der «Spiele» zur Verringerung des statistischen Fehlers gestellt werden müssen.

Wenn die Monte-Carlo-Methode auch nie die exakten Berechnungen ersetzen wird, so ist sie doch geeignet, erste Überblicke über die Lösung

gewisser Probleme zu verschaffen. Sie kann in praktischen Fällen (etwa bei Diffusions- und Absorptionsproblemen, bei Potentialproblemen und bei der Auflösung umfangreicher linearer Gleichungssysteme) vielfach die exakte Methode ersetzen.

Literatur:

Meyer, Herbert A. e. a.: Symposium on Monte Carlo Methods (Wiley 1956).

Wasow: Random walks and eigenvalues of elliptic difference equations, *Journal of Research, Bureau of Standard*, 46 (1951), p. 65.

Forsythe and Leibler: A Monte Carlo Method for matrix inversion, *Mathematical Tables and other Aids for Computation*, 4 (1950), p. 127.