Quelques aspects des capitaux différés et des rentes sur plusieurs têtes

Autor(en): **Urech, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **59 (1959)**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966812

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Quelques aspects des capitaux différés et des rentes sur plusieurs têtes

Par Aug. Urech, Berne et Lausanne

Résumé

Pour le problème des capitaux différés et des rentes sur plusieurs têtes, on se borne le plus souvent dans les traités d'assurance à des exemples, sans étudier le cas général. L'auteur donne une formule générale de solution pour le cas où l'ordre des décès n'importe pas, formule simple, intéressante et avantageuse pour le calcul numérique.

I.

La prime unique pure d'un capital de 1, reposant sur une tête d'âge x, payable en cas de vie après n années, est égale à:

$$ {}_nE_x = v^n \, {}_np_x , \qquad (1)$$

où v désigne le facteur d'escompte et ${}_np_x$ la probabilité qu'une personne d'âge x soit encore en vie après n années. Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation actuarielle internationale.

A l'aide des nombres de commutation, le capital différé s'écrit:

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} , \qquad (1')$$

si bien qu'on peut se servir directement de la table de mortalité adéquate pour le calcul du capital différé sur une tête. Le problème est en principe résolu. Il ne donne pas lieu à d'autres considérations.

Si l'on envisage les capitaux différés sur plusieurs têtes, on aboutit en revanche à des combinaisons fort variées et à des études très intéressantes.

On peut d'abord poser comme condition de paiement du capital après n années que les m têtes considérées, d'âges $x, y, z, \ldots, w$, soient toutes encore en vie à l'échéance. On a le capital différé d'un groupe disparaissant au premier décès ou capital différé au premier décès;

l'opération s'éteint à l'échéance, ou auparavant déjà, dès qu'un décès survient. On a:

$$ {}_nE_{xyz\ldots w(m)} = v^n \, {}_np_{xyz\ldots w(m)}\,, \tag{2} $$

où ${}_np_{xyz\ldots w(m)}$ est la probabilité que les m têtes vivent encore après n années. On pourrait introduire les nombres de commutation par la méthode de Davies ou par celle de de Moivre. Toutefois, cela n'a pas d'intérêt pour ce qui va suivre.

On pourrait aussi stipuler que le capital différé est payable si une au moins des m têtes, n'importe laquelle, est en vie à l'échéance. On aurait alors le capital différé d'un groupe disparaissant au dernier décès, ou capital différé au dernier décès:

$$ {}_nE_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;1} = v^n \, {}_np_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;1}\,, \tag{3} $$

où ${}_np_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;1}$ désigne la probabilité qu'une au moins des m têtes vive après n années. Toutes les têtes jouent un rôle symétrique les unes par rapport aux autres. L'ordre des décès n'importe pas.

Si l'on demandait en revanche pour payer le capital qu'une ou plusieurs têtes bien déterminées vivent après n années, à l'exclusion des autres, les têtes ne joueraient plus un rôle symétrique; les unes seraient avantagées par rapport aux autres. On pourrait par exemple considérer un capital différé de 1 reposant sur 2 têtes, mari et femme, payable dans n années à condition que la femme soit encore en vie, le mari étant décédé auparavant. La valeur actuelle du capital différé dépendrait de l'ordre dans lequel se produisent les décès.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que les capitaux différés pour lesquels l'ordre des décès n'importe pas; les m têtes doivent jouer un rôle symétrique les unes par rapport aux autres en ce qui concerne les droits au payement du capital; c'est-à-dire que si l'on veut payer le capital par exemple en cas de vie de 3 têtes déterminées α, β, γ choisies parmi les m têtes $xyz\ldots w$, il faut aussi le payer en cas de vie de 3 autres têtes quelconques λ, μ, ν. On ne demande cependant pas que toutes les têtes suivent la même loi de mortalité. Il faut seulement savoir quelle table de mortalité est applicable à chacune d'elles.

II.

Nous considérons donc m têtes d'âges $x, y, z, \ldots, w$ et nous les supposons indépendantes les unes des autres en ce qui concerne la mortalité, de sorte qu'on puisse appliquer le théorème des probabilités composées.

Nous partons de la probabilité que r exactement de ces m têtes soient encore en vie après n années, n'importe lesquelles, mais r exactement. Cette probabilité s'écrit:

$$
{}_n p_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m, \qquad (4)
$$

où

$$
Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} {}_n p_{\alpha\beta\gamma \ldots (r)},
$$

$$
Z_{r+1} = \sum_{\binom{m}{r+1}} {}_n p_{\alpha\beta\gamma \ldots (r+1)},
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
Z_m = \sum_{\binom{m}{m}} {}_n p_{\alpha\beta\gamma \ldots (m)} = {}_n p_{xyz \ldots w(m)}.
$$

Dans le symbole Z_r, ${}_n p_{\alpha\beta\gamma \ldots (r)} = {}_n p_\alpha \, {}_n p_\beta \, {}_n p_\gamma \ldots$ désigne la probabilité que r têtes bien déterminées $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ choisies parmi les m têtes $x, y, z, \ldots, w$ soient en vie après n années. On peut former $\binom{m}{r}$ probabilités de ce genre, de sorte que Z_r est la somme de toutes les probabilités sur r têtes, au premier décès, qu'on peut considérer en partant des m têtes $xyz \ldots w$.

D'après la formule (4), la probabilité que r têtes exactement vivent après n années s'exprime sous la forme d'une somme algébrique de probabilités au premier décès sur r têtes, sur $(r+1)$ têtes, sur $(r+2)$ têtes, etc. Les coefficients sont, au signe près, égaux aux coefficients binomiaux

$$
\binom{r}{0}, \binom{r+1}{1}, \binom{r+2}{2}, \ldots, \binom{r+t}{t}, \ldots, \binom{m}{m-r}.
$$

Ils sont alternativement positifs et négatifs. On peut les représenter en valeur absolue en fonction de r et de t au moyen du tableau (5) qui n'est autre que le triangle arithmétique de Pascal.

$r \backslash t$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	1	1	1	1	1	
1	1	2	3	4	5		
2	1	3	6	10			
3	1	4	10				
4	1	5					
5	1						
⋮							

(5)

La formule (4) peut du reste s'écrire sous une forme symbolique, facile à retenir; nous n'insistons pas sur ce point.

III.

Après ce préambule, nous considérons la valeur actuelle du capital différé de 1 reposant sur m têtes $xyz \ldots w$, payable dans n années à la condition que r têtes exactement soient en vie à ce moment-là. Elle est donnée en vertu de la méthode de l'espérance mathématique par la formule:

$$
{}_nE_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = v^n \, {}_np_{\overline{xyz \ldots w(m)}}^{[r]} = \tag{6}
$$

$$
= v^n Z_r - \binom{r+1}{1} v^n Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} v^n Z_{r+2} \mp \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} v^n Z_{r+t} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} v^n Z_m .
$$

Chacun des symboles $Z_r, Z_{r+1}, Z_{r+2}, \ldots, Z_m$ est multiplié par le facteur d'escompte v^n.

Or,
$$
v^n Z_r = \sum_{\binom{m}{r}} v^n \, {}_np_{\alpha\beta\gamma \ldots (r)} .
$$

Toute probabilité sur r têtes au premier décès, $p_{\alpha\beta\gamma \ldots (r)}$, multipliée par le facteur d'escompte v^n donne un capital différé au premier décès, ${}_nE_{\alpha\beta\gamma \ldots (r)}$.

En introduisant les nouveaux symboles:

$$Z_r^{(E)} = \sum_{\binom{m}{r}} v^n {}_n p_{\alpha\beta\gamma\ldots(r)} = \sum_{\binom{m}{r}} {}_n E_{\alpha\beta\gamma\ldots(r)} \tag{6'}$$

$$Z_{r+1}^{(E)} = \sum_{\binom{m}{r+1}} v^n {}_n p_{\alpha\beta\gamma\ldots(r+1)} = \sum_{\binom{m}{r+1}} {}_n E_{\alpha\beta\gamma\ldots(r+1)}$$

. . . .

$$Z_m^{(E)} = v^n {}_n p_{xyz\ldots w(m)} = {}_n E_{xyz\ldots w(m)},$$

la formule (6) s'écrit:

$$ {}_n E_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[r]} = Z_r^{(E)} - \binom{r+1}{1} Z_{r+1}^{(E)} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2}^{(E)} \mp \ldots$$

$$\ldots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{r+t}^{(E)} \pm \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m^{(E)}. \tag{6''}$$

Elle a exactement la même forme que la formule (4) de la probabilité. Les coefficients sont les mêmes et se déduisent aussi du tableau (5). La seule différence est que les symboles Z_r de la formule (4) sont remplacés dans la formule (6″) par les symboles $Z_r^{(E)}$. A la place d'une somme de probabilités Z_r, on a une somme de capitaux différés $Z_r^{(E)}$, différence évidemment fondamentale.

Après avoir établi la formule (6″), on considère fréquemment d'autres capitaux différés: le capital différé au dernier décès qui est payable si une tête au moins est en vie à l'échéance, le capital différé payable si r têtes au moins sont en vie à l'échéance, des capitaux différés variables suivant le nombre de têtes en vie, des capitaux avec réversion totale ou partielle et d'autres combinaisons particulières, le plus souvent, sans aborder le cas général. Pourtant, c'est le cas général qui est le plus intéressant; d'abord en soi, mais aussi parce qu'il conduit à une solution extrêmement simple qui permet de trouver très rapidement la formule de n'importe quel cas particulier.

IV.

Le problème le plus général qu'on peut se poser dans le cadre que nous avons tracé, c'est-à-dire lorsque les m têtes $x, y, z, \ldots, w$ jouent un rôle symétrique les unes par rapport aux autres, lorsque donc l'ordre des décès n'importe pas, est le suivant:

Quelle est la valeur actuelle d'un capital différé reposant sur m têtes, égal:

à C_1, si 1 tête exactement est en vie au terme,

à C_2, si 2 têtes exactement sont en vie au terme,

à C_3, si 3 têtes exactement sont en vie au terme,

. . . .

à C_m, si m têtes exactement sont en vie au terme.

C'est en effet le problème le plus général de ce genre, car, nous l'avons vu: Si nous voulons payer le capital C_r au cas où r têtes déterminées $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$ sont en vie au terme, il faut aussi payer ce même capital au cas où n'importe quelle autre combinaison de r têtes choisies parmi $x, y, z, \ldots, w$ vivraient à l'échéance. Dans ces conditions-là et dans ces conditions seulement, les m têtes jouent un rôle symétrique les unes par rapport aux autres; l'ordre des décès n'importe pas.

Cette remarque, très simple, est aussi fondamentale. Pour des raisons de commodité et de symétrie, nous voulons encore généraliser un peu et supposer qu'on paie le capital C_0 au cas où aucune tête ne serait plus en vie à l'échéance. Cela paraît peut-être un peu bizarre de parler dans ce cas de capital différé, puisque C_0 est en réalité un capital payable à une époque fixée si le dernier décès est survenu auparavant. Mais il s'agit là d'une question de mots que nous ne voulons pas examiner maintenant; mathématiquement, le problème est posé d'une manière précise. On peut du reste toujours supposer si l'on veut que C_0 est égal à 0.

La valeur actuelle cherchée est égale à la somme des valeurs actuelles des capitaux différés $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$, soit à l'expression:

$$
{}_n(vE)_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;v} = C_0\,{}_nE_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[0]} + C_1\,{}_nE_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[1]} + C_2\,{}_nE_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[2]} + \\
+ \ldots + C_m\,{}_nE_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{[m]}, \qquad (7)
$$

où la lettre v rappelle que le capital assuré est variable.

Or, la formule (6″) est valable non seulement pour toutes les valeurs entières et positives de r, mais encore pour $r = 0$, comme on s'en assure facilement, pourvu qu'on définisse le symbole Z_0 par $Z_0 = 1$ et, par suite, $Z_0^{(E)} = v^n Z_0 = v^n$.

On peut donc écrire:

$$
\begin{aligned}
{}_{n}(vE)_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;v} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7')\\
= C_0\Big[& Z_0^{(E)} - Z_1^{(E)} + Z_2^{(E)} - Z_3^{(E)} \pm \ldots + (-1)^t \binom{t}{t} Z_t^{(E)} \pm \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} Z_m^{(E)}\Big]\\
+ C_1\Big[& Z_1^{(E)} - \binom{2}{1} Z_2^{(E)} + \binom{3}{2} Z_3^{(E)} \mp \ldots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t-1} Z_t^{(E)} \mp \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1} Z_m^{(E)}\Big]\\
+ C_2\Big[& Z_2^{(E)} - \binom{3}{1} Z_3^{(E)} \pm \ldots + (-1)^{t-2}\binom{t}{t-2} Z_t^{(E)} \pm \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2} Z_m^{(E)}\Big]\\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ C_t\Big[& \binom{t}{0} Z_t^{(E)} \mp \ldots + (-1)^{m-t}\binom{m}{m-t} Z_m^{(E)}\Big]\\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ C_m & \binom{m}{0} Z_m^{(E)}.
\end{aligned}
$$

En additionnant les termes qui se trouvent sur une même colonne, on obtient:

$$
\begin{aligned}
{}_{n}(vE)_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;v} = {} & C_0 Z_0^{(E)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7'')\\
& + (C_1 - C_0)\, Z_1^{(E)}\\
& + \left(C_2 - \binom{2}{1} C_1 + C_0\right) Z_2^{(E)}\\
& + \left(C_3 - \binom{3}{1} C_2 + \binom{3}{2} C_1 - C_0\right) Z_3^{(E)}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + \left(\binom{t}{0} C_t - \binom{t}{1} C_{t-1} + \binom{t}{2} C_{t-2} \mp \ldots \pm \binom{t}{t} C_0\right) Z_t^{(E)}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + \left(\binom{m}{0} C_m - \binom{m}{1} C_{m-1} + \binom{m}{2} C_{m-2} \mp \ldots \pm \binom{m}{m} C_0\right) Z_m^{(E)}.
\end{aligned}
$$

La valeur actuelle du capital différé variable s'exprime sous la forme d'une somme algébrique de capitaux différés au premier décès, reposant respectivement sur 0 tête, sur 1 tête, sur 2 têtes, etc.

On a: (8)

$$
{}_{n}(vE)_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(E)} + \alpha_1 Z_1^{(E)} + \alpha_2 Z_2^{(E)} + \alpha_3 Z_3^{(E)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(E)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(E)},
$$

où les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ne dépendent que des capitaux $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Le coefficient de $Z_0^{(E)}$ est le capital C_0; celui de $Z_1^{(E)}$ est la différence première de C_0 et C_1; celui de $Z_2^{(E)}$ est la différence seconde de $(C_0, C_1$ et $C_2)$.

On peut montrer par récurrence que le coefficient de $Z_t^{(E)}$ est la t^e différence des capitaux $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_t$. Nous pouvons donc écrire la formule pour le capital différé le plus général considéré ici:

$$\begin{aligned} {}_n(vE)_{\underset{\overline{}}{xyz\ldots w(m)}}^{\;v} = {} & C_0 Z_0^{(E)} + \varDelta(C_0, C_1)\, Z_1^{(E)} \\ & + \varDelta^2(C_0, C_1, C_2)\, Z_2^{(E)} \\ & + \varDelta^3(C_0, C_1, C_2, C_3)\, Z_3^{(E)} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \varDelta^t(C_0, C_1, \ldots, C_t)\, Z_t^{(E)} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \varDelta^m(C_0, C_1, \ldots, C_m)\, Z_m^{(E)}. \end{aligned} \tag{8'}$$

Ce résultat, intéressant en lui-même, est remarquable de simplicité lorsqu'il s'agit d'établir la formule dans n'importe quel cas donné, d'en déterminer les coefficients. Quelques exemples montreront avec quelle rapidité on arrive à la solution.

Exemple 1. Etablir la formule du capital différé reposant sur 5 têtes x, y, z, u, w, étant entendu qu'on paiera 1000 francs si les 5 têtes sont en vie après n années, 500 francs si 4 têtes exactement sont en vie, 200 francs si 3 têtes exactement sont en vie et rien du tout si moins de 3 têtes sont en vie.

On a: $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 200$, $C_4 = 500$, $C_5 = 1000$.

Les différences successives de $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ s'établissent d'après le schéma:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & \\ 0 & & \mathbf{0} & & & \\ & 0 & & \mathbf{2} & & \\ 0 & & 2 & & \mathbf{-3} & \\ & 2 & & -1 & & \mathbf{5} \\ 2 & & 1 & & 2 & \\ & 3 & & 1 & & \\ 5 & & 2 & & & \\ & 5 & & & & \\ 10 & & & & & \end{array}\right.$$

d'où:
$$\underline{{}_{n}(vE)_{\overset{v}{\overline{xyzuw}}}} = 100\,[0Z_0^{(E)} + 0Z_1^{(E)} + 0Z_2^{(E)} + 2Z_3^{(E)} - 3Z_4^{(E)} + 5Z_5^{(E)}]$$
$$= \underline{100\,[2Z_3^{(E)} - 3Z_4^{(E)} + 5Z_5^{(E)}]},$$

où la signification des symboles est la suivante:

$$\begin{cases} Z_3^{(E)} = \sum\limits_{\binom{5}{3}} {}_{n}E_{\alpha\beta\gamma(3)} = {}_{n}E_{xyz} + {}_{n}E_{xyu} + {}_{n}E_{xyw} + \dots \text{ (10 termes)} \\ Z_4^{(E)} = \sum\limits_{\binom{5}{4}} {}_{n}E_{\alpha\beta\gamma\delta(4)} = {}_{n}E_{xyzu} + {}_{n}E_{xyzw} + \dots \text{ (5 termes)} \\ Z_5^{(E)} = {}_{n}E_{xyzuw}. \end{cases}$$

Exemple 2. Etablir la formule du capital différé reposant sur m têtes $x, y, z, \dots, w$, étant entendu qu'on paiera autant de fois 1 franc qu'il y aura de survivants après n années.

Dans ce cas les capitaux $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ sont égaux respectivement à: $0, 1, 2, 3, \dots, m$. Pour déterminer leurs différences successives, on a le schéma:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & & & & & \\ & \mathbf{1} & & & & \\ 1 & & \mathbf{0} & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} & & \\ 2 & & 0 & & \vdots & \\ & 1 & & 0 & & \vdots \\ 3 & & 0 & & \vdots & \\ & 1 & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ & \vdots & & & & \\ m & & & & & \end{array}\right.$$

ce qui conduit à:

$$\underline{{}_{n}(vE)_{\overset{v}{\overline{xyz\dots w(m)}}} = Z_1^{(E)} = {}_{n}E_x + {}_{n}E_y + \dots + {}_{n}E_w.}$$

Exemple 3. Etablir la formule du capital différé reposant sur m têtes $x, y, z, \dots, w$, étant entendu qu'on paiera 1 franc pourvu qu'une tête au moins soit en vie après n années.

Les capitaux $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ sont égaux respectivement à $0, 1, 1, 1, \dots, 1$. Les différences successives s'obtiennent à l'aide du schéma:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & & & & & \\ & \mathbf{1} & & & & \\ 1 & & \mathbf{-1} & & & \\ & 0 & & \mathbf{+1} & & \\ 1 & & 0 & & \mathbf{-1} & \\ & 0 & & 0 & & \vdots \\ 1 & & 0 & & \vdots & \\ & 0 & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ & \vdots & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}\right.$$

et le capital différé cherché prend la forme bien connue:

$$\begin{aligned}
{}_nE_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;\;1} &= Z_1^{(E)} - Z_2^{(E)} + Z_3^{(E)} - Z_4^{(E)} \pm \ldots + (-1)^m Z_m^{(E)} \\
&= [{}_nE_x + {}_nE_y + {}_nE_z + \ldots + {}_nE_w] \\
&\quad - \left[{}_nE_{xy} + {}_nE_{xz} + \ldots \binom{m}{2} \text{ termes}\right] \\
&\quad + \left[{}_nE_{xyz} + {}_nE_{xyw} + \ldots \binom{m}{3} \text{ termes}\right] \\
&\quad \mp \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + (-1)^m {}_nE_{xyz\ldots w(m)}\,.
\end{aligned}$$

Pour le calcul numérique, il faut naturellement bien avoir en tête la signification des symboles $Z_0^{(E)}, Z_1^{(E)}, Z_2^{(E)}$, etc. Le problème est ramené au calcul de capitaux différés respectivement sur 1 tête, sur 2 têtes, sur 3 têtes, etc., tous au premier décès.

Dans les traités d'assurance, lorsqu'on se borne à donner des exemples, on n'a pas l'occasion d'établir la formule générale si simple et si intéressante qui précède et nous ne croyons pas même qu'on y gagne du temps.

D'habitude, on calcule aussi des exemples par la méthode dite des «coefficients indéterminés», mais sans aller, nous le craignons, au fond des choses, sans préciser pourquoi cette méthode est exacte.

V.

Reprenons donc notre problème général pour le résoudre au moyen de la méthode des coefficients indéterminés. Nous cherchons la valeur actuelle d'un capital différé égal à C_1, C_2, C_3, ..., C_m suivant que 1, 2, 3, ... ou m têtes exactement sont en vie au terme.

Cette fois, il n'est pas nécessaire d'étendre notre problème en prévoyant des prestations dans le cas où aucune tête ne serait en vie au terme. On procède alors comme il suit:

On sait déjà que la valeur actuelle cherchée se présente sous la forme d'une somme algébrique de capitaux différés au premier décès respectivement sur 1 tête exactement, sur 2 têtes exactement, sur 3 têtes exactement, etc., formule (8), c'est-à-dire que:

$$ {}_n(vE)_{\overline{xyz\ldots w(m)}}^{\;\;v} = \alpha_1 Z_1^{(E)} + \alpha_2 Z_2^{(E)} + \alpha_3 Z_3^{(E)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(E)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(E)}, \tag{8}$$

où les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ne dépendent que des capitaux $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Ils sont indépendants des bases techniques utilisées, taux d'intérêt et tables de mortalité. Les bases techniques n'entrent que dans le calcul des symboles $Z_1^{(E)}, Z_2^{(E)}, Z_3^{(E)}$, etc.

Pour que le problème soit résolu, il faut connaître les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$. Nous avons vu plus haut, formule (8'), qu'ils sont égaux aux différences successives des capitaux $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$, où $C_0 = 0$. Nous voulons maintenant les chercher en appliquant la méthode des coefficients indéterminés.

Or, la formule (8) est valable quels que soient le taux d'intérêt et les tables de mortalité utilisés pour les m têtes.

a) Supposons pour commencer que le taux technique d'intérêt soit égal à 0, c'est-à-dire que $v = 1$. De plus, admettons que les tables de mortalité applicables aux diverses têtes soient choisies de la manière suivante:

1re table, pour la tête	x:	$q_x = q_{x+1} = q_{x+2} = \ldots = q_{x+n-1} = 0,$
2e » » » »	y:	$q_y = 1,$
3e » » » »	z:	$q_z = 1,$
. . . .		
me » » » »	w:	$q_w = 1.$

A l'échéance, la tête x est en vie, tandis que toutes les autres têtes sont décédées. L'assureur doit payer C_1. Dans ce cas particulier, on peut calculer directement le premier membre de la formule (8), ainsi que la valeur de chacun des symboles du deuxième membre.

La valeur actuelle du capital différé cherché est égale à C_1. Au second membre de la formule (8) nous avons:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} Z_1^{(E)} = \sum\limits_{\binom{m}{1}} {}_nE_{\alpha(1)} = {}_nE_x + {}_nE_y + \ldots + {}_nE_w = 1\,, \\ Z_2^{(E)} = \sum\limits_{\binom{m}{2}} {}_nE_{\alpha\beta(2)} = {}_nE_{xy} + {}_nE_{xz} + \ldots = 0\,, \\ Z_3^{(E)} = Z_4^{(E)} = \ldots = Z_m^{(E)} = 0\,. \end{array}\right.$$

Notre formule générale (8) devient:

$$C_1 = \alpha_1 1 + \alpha_2 0 + \alpha_3 0 + \ldots + \alpha_m 0\,.$$

Nous en tirons:

$$\underline{\alpha_1 = C_1.}$$

b) Plaçons-nous dans un deuxième cas particulier, avec un système de bases techniques tel que:

$$\begin{aligned}
i &= 0, \\
v &= 1, \\
q_x &= q_{x+1} = q_{x+2} = \ldots = q_{x+n-1} = 0, \\
q_y &= q_{y+1} = q_{y+2} = \ldots = q_{y+n-1} = 0, \\
q_z &= 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_w &= 1.
\end{aligned}$$

Sur la base de ce système de bases techniques, les deux têtes x et y sont en vie à l'échéance; les autres sont décédées. L'assureur devra verser C_2. La valeur actuelle cherchée, c'est-à-dire le premier membre de la formule (8), est égale à C_2. Dans le deuxième membre de la formule (8) on a:

$$\left.\begin{aligned}
Z_1^{(E)} &= {}_nE_x + {}_nE_y + {}_nE_z + \ldots + {}_nE_w = 2, \\
Z_2^{(E)} &= {}_nE_{xy} + {}_nE_{xz} + \ldots = 1, \\
Z_3^{(E)} &= {}_nE_{xyz} + \ldots = 0, \\
Z_4^{(E)} &= Z_5^{(E)} = \ldots = Z_w^{(E)} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8'')$$

La formule (8) devient:

$$C_2 = \alpha_1 2 + \alpha_2 1 + \alpha_3 0 + \ldots + \alpha_m 0,$$

d'où:

$$\underline{\alpha_2 = C_2 - 2C_1.}$$

c) Plaçons-nous dans un troisième cas particulier:

$$\begin{aligned}
v &= 1, \\
q_x &= q_{x+1} = \ldots = q_{x+n-1} = 0, \\
q_y &= q_{y+1} = \ldots = q_{y+n-1} = 0, \\
q_z &= q_{z+1} = \ldots = q_{z+n-1} = 0, \\
q_u &= 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_w &= 1.
\end{aligned}$$

A l'échéance, 3 têtes sont en vie, x, y et z; les autres sont décédées. L'assureur doit payer C_3.

Au deuxième membre, on a:

$$\left.\begin{aligned} Z_1^{(E)} &= {}_nE_x + {}_nE_y + {}_nE_z + {}_nE_u + \ldots = 3\,, \\ Z_2^{(E)} &= {}_nE_{xy} + {}_nE_{xz} + {}_nE_{yx} + \ldots = 3\,, \\ Z_3^{(E)} &= {}_nE_{xyz} + \ldots = 1\,, \\ Z_4^{(E)} &= Z_5^{(E)} = \ldots = Z_m^{(E)} = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8''')$$

La formule (8) devient:

$$C_3 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3 + \alpha_3 1 + 0 + \ldots + 0\,.$$

D'où:

$$\underline{\alpha_3 = C_3 - 3\,C_2 + 3\,C_1\,.}$$

On voit comment il faut continuer. La méthode consiste à trouver des bases techniques qui permettent de calculer directement aussi bien le premier membre de la formule (8) que la valeur des symboles $Z_1^{(E)}$, $Z_2^{(E)}$, etc. du deuxième membre, ce qui fournit des relations entre les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Dans tous les cas particuliers, comme du reste aussi dans le cas général, il est facile d'établir m relations linéaires indépendantes, non homogènes, entre les m coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. On obtient le système d'équations:

$$\left.\begin{array}{lr} 1\,\alpha_1 & = C_1 \\ 2\,\alpha_1 + \quad \alpha_2 & = C_2 \\ 3\,\alpha_1 + \quad 3\,\alpha_2 + \quad \alpha_3 & = C_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \binom{t}{1}\alpha_1 + \binom{t}{2}\alpha_2 + \binom{t}{3}\alpha_3 + \ldots + \binom{t}{t}\alpha_t & = C_t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \binom{m}{1}\alpha_1 + \binom{m}{2}\alpha_2 + \binom{m}{3}\alpha_3 + \ldots + \binom{t}{m}\alpha_t + \ldots + \binom{m}{m}\alpha_m & = C_m\,, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

où tous les termes non écrits sont nuls. On en tire les coefficients $\alpha_1, \alpha_2. \ldots, \alpha_m$. Il est facile de montrer par récurrence que α_t est la t^e différence des capitaux.

$$0,\; C_1,\; C_2,\; \ldots,\; C_t\,.$$

On retrouve ainsi la solution à laquelle nous étions arrivés en étudiant le cas général, sous chiffre IV ci-dessus, formule (8').

Reprenons, en lui appliquant la méthode des coefficients indéterminés, l'exemple 1 du chiffre IV, dans lequel les capitaux C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 sont respectivement égaux à 0, 0, 200, 500 et 1000.

Le système d'équations linéaires (9), obtenu à l'aide des systèmes particuliers de bases techniques considérés sous *a), b), c), ...* ci-dessus est alors:

$$\begin{aligned}
&1\alpha_1 &&= 0\,,\\
&2\alpha_1 + \alpha_2 &&= 0\,,\\
&3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &&= 200\,,\\
&4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 &&= 500\,,\\
&5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 10\alpha_3 + 5\alpha_4 + \alpha_5 &&= 1000\,.
\end{aligned}$$

On en tire: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 200$; $\alpha_4 = -300$ et $\alpha_5 = 500$.

On a donc pour la valeur actuelle cherchée:

$$\underline{{}_n(vE)^{\,v}_{xyzuv} = 100\left[2Z_3^{(E)} - 3Z_4^{(E)} + 5Z_5^{(E)}\right]}\,.$$

En utilisant la méthode des déterminants pour résoudre le système des m équations, on arriverait également facilement au but. Le déterminant du système des m équations a pour valeur 1. C'est un déterminant particulier dont les éléments non nuls constituent un triangle arithmétique de Pascal amputé de la première colonne.

On aurait pu, ici aussi, élargir le problème en convenant qu'on paie le capital C_0 si aucune tête n'est en vie à l'échéance. On aurait alors à déterminer un coefficient α_0 en plus. On disposerait aussi d'une équation en plus, linéairement indépendante des précédentes, soit:

$$1\alpha_0 + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \ldots + 0\alpha_m = C_0\,, \tag{9'}$$

ce qui conduirait à un système de $(m+1)$ équations linéaires, non homogènes, à $(m+1)$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont le déterminant serait:

$$\begin{vmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \binom{t}{1} & \binom{t}{2} & \binom{t}{3} & \cdots & \binom{t}{t} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & \cdots & \binom{m}{m-1} & \binom{m}{m}
\end{vmatrix} = 1 \tag{10}$$

Les coefficients α_t sont alors donnés par la formule:

$$\alpha_t = \begin{vmatrix} 1 & & & & & C_0 \\ 1 & 1 & & & & C_1 \\ 1 & 2 & 1 & & & C_2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & C_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & C_{t-1} \\ 1 & \binom{t}{1} & \binom{t}{2} & \binom{t}{3} \cdots & \binom{t}{t-1} & C_t \end{vmatrix} = \qquad (11)$$

$$= C_t 1 - C_{t-1}\binom{t}{t-1} + C_{t-2}\binom{t}{t-2} - C_{t-3}\binom{t}{t-3} \pm \ldots + (-1)^{t-1}\binom{t}{1} C_1 + (-1)^t C_0,$$

d'où:

$$\underline{\alpha_t = \pm \Delta^t(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_t)}.$$

Les bases techniques que nous avons introduites pour justifier la méthode des coefficients indéterminés paraissent à beaucoup inadmissibles au premier abord, parce qu'on ne les rencontre pas dans la pratique courante. Il faut cependant distinguer nettement entre les problèmes d'ordre purement mathématique et les applications de la théorie qu'on fait aux ensembles humains soumis à une mortalité qui, en fait, n'est jamais nulle.

Dans notre cas, c'est-à-dire lorsqu'on veut simplement déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, il s'agit d'un problème purement mathématique. Rien ne nous empêche d'adopter un taux d'intérêt nul, des taux de mortalité nuls à certains âges ou égaux à 1, puisque notre formule générale (8) est valable quelles que soient les bases techniques. Dans les études de ce genre, l'actuaire est libre de choisir n'importe quel taux d'intérêt, pourvu qu'il soit positif ou nul, et n'importe quelles tables de mortalité, pourvu que les taux de mortalité à chaque âge soient compris entre 0 et 1, ces limites incluses.

Les bases techniques particulières que nous avons choisies sont des bases limites qui nous donnent en quelque sorte les conditions aux limites de nos capitaux différés.

VI.

Il nous reste à examiner les rentes sur plusieurs têtes, ce qui sera rapidement fait vu l'analogie des problèmes qui se posent avec ceux des capitaux différés.

Faisons d'abord une remarque à propos de la formule (8) qui exprime le capital différé:

$$ {}_n(vE)_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(E)} + \alpha_1 Z_1^{(E)} + \alpha_2 Z_2^{(E)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(E)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(E)}. $$

Dans cette formule, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont indépendants non seulement des âges $x, y, \ldots, w$, du taux technique d'intérêt et des tables de mortalité, mais encore du différé n.

Si donc nous considérons un capital différé variable $(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m)$ payable une première fois après n années,

$$ (\overline{8})\quad {}_n(vE)_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(nE)} + \alpha_1 Z_1^{(nE)} + \alpha_2 Z_2^{(nE)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(nE)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(nE)}, $$

puis une deuxième fois après n' années,

$$ (\overline{\overline{8}})\quad {}_{n'}(vE)_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(n'E)} + \alpha_1 Z_1^{(n'E)} + \alpha_2 Z_2^{(n'E)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(n'E)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(n'E)}, $$

sa valeur actuelle totale est égale à la somme de $(\overline{8})$ et de $(\overline{\overline{8}})$.

Elle est donnée par la formule: (12)

$$ {}_{n,n'}(vE)_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(n,n'E)} + \alpha_1 Z_1^{(n,n'E)} + \alpha_2 Z_2^{(n,n'E)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(n,n'E)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(n,n'E)}, $$

où les nouveaux symboles $Z_t^{(n,n'E)}$ sont simplement la somme des symboles de $(\overline{8})$ et de $(\overline{\overline{8}})$:

$$ \left. \begin{aligned} Z_t^{(n,n'E)} &= Z_t^{(nE)} + Z_t^{(n'E)} \\ &= \sum_{\binom{m}{t}} {}_nE_{xyz\,\ldots\,(t)} + \sum_{\binom{m}{t}} {}_{n'}E_{xyz\,\ldots\,(t)} \\ &= \sum_{\binom{m}{t}} \left({}_nE_{xyz\,\ldots\,(t)} + {}_{n'}E_{xyz\,\ldots\,(t)}\right), \end{aligned} \right\} \qquad (12') $$

avec $\qquad Z_0^{(n,n'E)} = v^n + v^{n'}.$

Cette remarque nous permet de généraliser et de considérer non plus seulement deux échéances n et n' pour le capital différé variable, mais toute une série, par exemple après 0, 1, 2, 3 années, etc., de sorte que l'on peut écrire immédiatement la formule qui donne la valeur actuelle de la rente viagère sur m têtes $x, y, z, \ldots, w$ la plus générale qu'on puisse envisager dans le cadre que nous nous sommes assigné:

$$ (v\ddot{a})_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(\ddot{a})} + \alpha_1 Z_1^{(\ddot{a})} + \alpha_2 Z_2^{(\ddot{a})} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(\ddot{a})} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(\ddot{a})}, \quad (13) $$

où les symboles $Z_t^{(\ddot{a})}$ représentent chacun la somme des $\binom{m}{t}$ combinaisons des rentes viagères sur t têtes au premier décès qu'on peut former à l'aide des m têtes, c'est-à-dire:

$$\left.\begin{aligned}
Z_1^{(\ddot{a})} &= \sum_{\binom{m}{1}} \ddot{a}_{\alpha(1)} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ldots + \ddot{a}_w \\
Z_2^{(\ddot{a})} &= \sum_{\binom{m}{2}} \ddot{a}_{\alpha\beta(2)} = \ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{xz} + \ldots \\
Z_3^{(\ddot{a})} &= \sum_{\binom{m}{3}} \ddot{a}_{\alpha\beta\gamma(3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z_t^{(\ddot{a})} &= \sum_{\binom{m}{t}} \ddot{a}_{\alpha\beta\gamma\ldots(t)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z_m^{(\ddot{a})} &= \sum_{\binom{m}{m}} \ddot{a}_{\alpha\beta\gamma\ldots(m)} = \ddot{a}_{xyz\ldots w(m)}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Quant à $Z_0^{(\ddot{a})}$ il est égal à:

$$Z_0^{(\ddot{a})} = v^0 + v^1 + v^2 + \ldots = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}, \tag{13'}$$

soit à la valeur actuelle de la rente perpétuelle de 1.

Les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont les mêmes que dans les formules (8) et (8'). Si nous désignons la rente variable par

$$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m$$

suivant que 0, 1, 2, ..., m têtes sont en vie au début de l'année d'assurance, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont les différences successives des rentes $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m$:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= r_0 \\
\alpha_1 &= \Delta(r_0, r_1) \\
\alpha_2 &= \Delta^2(r_0, r_1, r_2) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_t &= \Delta^t(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_t) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_m &= \Delta^m(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ici encore, pour obtenir commodément la formule, il faut considérer non seulement la rente variable payable lorsque 1, 2, 3, ..., m têtes sont en vie au début de l'année d'assurance, mais encore la rente r_0

payable lorsqu'aucune tête n'est en vie. Cette rente r_0 n'est pas autre chose qu'une rente perpétuelle différée payable à partir du moment où toutes les têtes sont décédées. Dans les applications pratiques usuelles r_0 est nul.

D'après la manière dont nous avons déduit la formule (13), il va sans dire qu'elle est aussi valable pour la rente variable sur m têtes payable à terme échu, ainsi que pour les rentes différées et temporaires. Les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ restent les mêmes. Seuls, les symboles $Z_0^{(\ddot{a})}$, $Z_1^{(\ddot{a})}$, $Z_2^{(\ddot{a})}$, $\ldots$, $Z_m^{(\ddot{a})}$ doivent être écrits en fonction de rentes payables à terme échu, sur t têtes au premier décès, de rentes différées ou de rentes temporaires.

Dans les exemples suivants, nous avons choisi la rente variable $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m)$ égale au capital différé variable $(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m)$ des exemples correspondants des capitaux différés pour qu'on voie bien que le calcul des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ est identique.

Exemple 1. Etablir la formule de la rente viagère reposant sur 5 têtes x, y, z, u, w, étant entendu qu'on paiera 1000 francs au début de chaque année si les 5 têtes sont en vie, 500 francs si 4 têtes sont en vie, 200 francs si 3 têtes sont en vie et rien du tout si moins de 3 têtes sont en vie.

Les rentes $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ sont égales respectivement à 0, 0, 0, 200, 500 et 1000. Les différences successives s'obtiennent à l'aide du schéma:

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
\mathbf{0} & & & & & \\
 & \mathbf{0} & & & & \\
0 & & \mathbf{0} & & & \\
 & 0 & & \mathbf{2} & & \\
0 & & 2 & & \mathbf{-3} & \\
 & 2 & & -1 & & \mathbf{5} \\
2 & & 1 & & 2 & \\
 & 3 & & 1 & & \\
5 & & 2 & & & \\
 & 5 & & & & \\
10 & & & & &
\end{array}\right.$$

Il en résulte:

$$\underline{(v\ddot{a})^{\;\;\;v}_{\overline{xyzuw}} = 100\left[2Z_3^{(\ddot{a})} - 3Z_4^{(\ddot{a})} + 5Z_5^{(\ddot{a})}\right]}.$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}
Z_3^{(\ddot{a})} = \ddot{a}_{xyz} + \ddot{a}_{xyu} + \ddot{a}_{xyw} + \ldots \text{ (10 termes)} \\
Z_4^{(\ddot{a})} = \ddot{a}_{xyzu} + \ddot{a}_{xyzw} + \ldots \text{ (5 termes)} \\
Z_5^{(\ddot{a})} = \ddot{a}_{xyzuw}
\end{array}\right.$$

Exemple 2. Etablir la formule de la rente viagère reposant sur m têtes $x, y, z, \ldots, w$, étant entendu qu'on paiera au début de chaque année autant de fois 1 franc qu'il y aura de têtes en vie.

Les rentes $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ sont égales respectivement à: $0, 1, 2, 3, \ldots, m$. Le schéma conduisant aux différences successives est alors:

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
\mathbf{0} & & & & & \\
 & \mathbf{1} & & & & \\
1 & & \mathbf{0} & & & \\
 & 1 & & \mathbf{0} & & \\
2 & & 0 & & \vdots & \\
 & 1 & & 0 & & \vdots \\
3 & & 0 & & \vdots & \\
 & 1 & & \vdots & & \\
\vdots & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & \\
m & & & & &
\end{array}\right.$$

de sorte que:

$$(v\ddot{a})_{\overset{v}{\overline{xyz\ldots w(m)}}} = Z_1^{(\ddot{a})} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ldots + \ddot{a}_w .$$

Exemple 3. Etablir la formule de la rente viagère reposant sur m têtes $x, y, z, \ldots, w$, étant entendu qu'on paiera 1 franc au début de chaque année si une tête au moins est en vie.

Les rentes $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ étant ici respectivement: $0, 1, 1, 1, \ldots, 1$, le schéma des différences successives devient:

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
\mathbf{0} & & & & & \\
 & \mathbf{1} & & & & \\
1 & & \mathbf{-1} & & & \\
 & 0 & & \mathbf{+1} & & \\
1 & & 0 & & \mathbf{-1} & \\
 & 0 & & 0 & & \vdots \\
1 & & 0 & & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & & \\
\vdots & & \vdots & & & \\
 & \ldots & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}\right.$$

La rente cherchée s'écrit donc:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overset{1}{\overline{xyz\ldots w(m)}}} &= Z_1^{(\ddot{a})} - Z_2^{(\ddot{a})} + Z_3^{(\ddot{a})} - Z_4^{(\ddot{a})} \pm \ldots + (-1)^m Z_m^{(\ddot{a})} \\
&= [\ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ddot{a}_z + \ldots + \ddot{a}_w] \\
&\quad - \left[\ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{xz} + \ldots \binom{m}{2} \text{ termes}\right] \\
&\quad + \left[\ddot{a}_{xyz} + \ddot{a}_{xyw} + \ldots \binom{m}{3} \text{ termes}\right] \\
&\quad \mp \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
&\quad + (-1)^m \ddot{a}_{xyz\ldots w(m)} .
\end{aligned}$$

Les formules (8) et (13) sont les mêmes quant à la forme. La différence fondamentale entre elles réside dans la signification des symboles $Z_t^{(E)}$ et $Z_t^{(\ddot{a})}$. $Z_t^{(E)}$ est une somme de capitaux différés tandis que $Z_t^{(\ddot{a})}$ est une somme de rentes.

VII.

La détermination des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans la formule (13) au moyen des différences successives des rentes $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m$ est si simple lorsqu'on a en vue un cas particulier déterminé que l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés ne devrait en somme plus entrer en ligne de compte. Si cependant on désire l'appliquer, soit parce qu'elle est intéressante, soit qu'on ait oublié la règle des différences successives, voici comment on peut la justifier dans le cas des rentes.

On se souviendra d'abord que la rente la plus générale qu'on puisse envisager dans le cadre que nous nous sommes tracé peut se mettre sous la forme:

$$(va)_{\overset{v}{xyz\ldots w(m)}} = \alpha_0 Z_0^{(a)} + \alpha_1 Z_1^{(a)} + \alpha_2 Z_2^{(a)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(a)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(a)}, \quad (15)$$

si nous considérons par exemple une rente variable payable à terme échu. Il s'agit de déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

On cherche alors $(m+1)$ systèmes de bases techniques simples qui permettent de calculer directement le premier membre de la formule ainsi que les symboles $Z_0^{(a)}, Z_1^{(a)}, \ldots, Z_m^{(a)}$ du deuxième membre. On obtient ainsi $(m+1)$ équations linéaires non homogènes, linéairement indépendantes, entre les inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, qui permettent de les déterminer.

Comme systèmes de bases techniques, on peut choisir successivement:

$$\left.\begin{array}{l}
a)\ \text{taux d'intérêt quelconque,} \\
\quad q_x = q_y = q_z = \ldots = q_w = 1; \\
b)\ \text{taux d'intérêt quelconque,} \\
\quad q_x = 0, \quad q_{x+1} = 1; \\
\quad q_y = q_z = \ldots = q_w = 1; \\
c)\ \text{taux d'intérêt quelconque,} \\
\quad q_x = 0, \quad q_{x+1} = 1; \\
\quad q_y = 0, \quad q_{y+1} = 1; \\
\quad q_z = q_u = \ldots = q_w = 1;
\end{array}\right\} \quad (15')$$

et ainsi de suite.

On trouve les mêmes équations que dans le cas du capital différé et l'on peut faire les mêmes considérations.

Si nous considérons par exemple le cas d'une rente reposant sur 5 têtes x, y, z, u, w, payable au commencement de l'année et égale à 1000 francs si les 5 têtes sont en vie, à 500 francs si 4 têtes sont en vie, à 200 francs si 3 têtes sont en vie et nulle dans les autres cas, le système des m équations linéaires obtenues à l'aide des bases techniques (15') $b), c)$, etc. devient:

$$\begin{aligned}
1\alpha_1 &= 0,\\
2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0,\\
3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 200,\\
4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 &= 500,\\
5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 10\alpha_3 + 5\alpha_4 + \alpha_5 &= 1000;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire:

$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = 200,\quad \alpha_4 = -300 \quad \text{et} \quad \alpha_5 = 500.$$

La prime unique cherchée s'écrit donc:

$$\underline{(va)_{\overset{v}{xyzuw}} = 100\left[2Z_3^{(a)} - 3Z_4^{(a)} + 5Z_5^{(a)}\right].}$$

VIII.

Nous avons vu pourquoi la formule des rentes a les mêmes coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ que la formule des capitaux différés. Cela vient de ce que les coefficients de la formule (8) sont indépendants du différé n et de ce que la rente est égale à une somme de capitaux différés.

Rien n'empêche de généraliser encore. La formule (15) est applicable non seulement aux rentes immédiates, mais aussi aux rentes différées. Or, la rente croissante variable sur m têtes $x, y, z, \ldots, w$, égale:

à nr_0 la n^e année si aucune tête n'est en vie,
à nr_1 la n^e année si 1 tête est en vie,
à nr_2 la n^e année si 2 têtes sont en vie,
à nr_3 la n^e année si 3 têtes sont en vie,
. . . .,

est une somme de rentes variables du genre de celles que nous avons considérées tout à l'heure, différées respectivement de 1, 2, 3, 4, . . . ans.

Nous pouvons donc écrire la formule suivante avec des symboles qu'on comprendra sans autres:

$$(v\,Ia)_{\overline{xyz\,\ldots\,w(m)}|}^{\;v} = \alpha_0 Z_0^{(Ia)} + \alpha_1 Z_1^{(Ia)} + \alpha_2 Z_2^{(Ia)} + \ldots + \alpha_t Z_t^{(Ia)} + \ldots + \alpha_m Z_m^{(Ia)}. \tag{16}$$

Les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont de nouveau égaux aux différences successives des rentes $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m$.

En résumé, la même formule s'applique aux capitaux différés, aux rentes ordinaires et aux rentes augmentant en progression arithmétique avec les années. Les coefficients sont indépendants des âges et des bases techniques; ils sont toujours obtenus comme différences successives des capitaux ou des rentes. Mais dans ces formules, les symboles $Z_t^{(E)}$, $Z_t^{(a)}$, $Z_t^{(Ia)}$ ont naturellement une signification fondamentalement différente.

On voit à quels résultats aussi simples que remarquables on arrive lorsqu'on considère le problème des capitaux différés et des rentes sur m têtes, indépendants de l'ordre des décès, dans toute sa généralité. L'introduction du capital C_0 ou de la rente r_0 payables lorsqu'aucune des m têtes n'est en vie amène une symétrie complète dans les formules et conduit immédiatement aux coefficients des formules (8), (8'), (13) et (14) sous la forme des différences successives de

$$(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

ou de

$$(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m).$$

Devant la simplicité des solutions obtenues pour les capitaux différés et pour les rentes, la méthode du reste très intéressante des coefficients indéterminés devient elle-même superflue, et cela bien qu'on puisse la justifier mathématiquement par l'emploi de systèmes particuliers de bases techniques.

La conclusion de capitaux différés et de rentes sur plusieurs têtes est peu fréquente. Cependant, leur étude s'impose à tout actuaire; elle contribue puissamment à sa formation. Nous espérons avoir montré qu'il est possible de la présenter sous une forme à la fois très générale et attrayante.

Zusammenfassung

Das Problem der Erlebensfallversicherung und der Renten auf mehrere Leben wird in den Lehrbüchern der Versicherungsmathematik meist nur anhand spezieller Beispiele gestreift, ohne dass der allgemeine Fall behandelt wird. Verfasser diskutiert das Problem für den Fall, dass die Reihenfolge der Todesfälle keine Rolle spielt, und gibt für die Lösung eine allgemeine Formel, welche nicht nur einfach und mathematisch interessant ist, sondern im Einzelfall in rascher Rechnung zum Ziel führt.

Riassunto

Di solito, nei trattati attuariali, nel problema delle rendite e dell'assicurazione per il caso di vita su diverse teste, ci si limita ad esempi, senza approfondirsi nel caso generale. Per il caso in cui che l'ordine dei decessi non importi, l'autore da una formola generale, semplice, interessante e vantaggiosa per il calcolo numerico.

Summary

The problem of pure endowment and annuities on joint lifes has been solved in most textbooks of actuarial mathematics for special examples only; the general case however has not been treated. The author discusses the problem under no assumption about the ordering of the incidents and derives a general formula which—already quite remarkable from the mathematical viewpoint—also proves to be efficient for numerical computations.