Der Gruppenexcedent in der Feuer-Rückversicherung

Der Gruppenexcedent in der Feuer-Rückversicherung

Von Paul Iff, Zürich

Zusammenfassung

Die Handhabung der Rückversicherung von Einzel-Summen-Excedenten verursacht dem Erstversicherer eine grosse Arbeit. Eine Entlastung wird durch die Bildung von Excedentengruppen erreicht. Der «Gruppenexcedent» kommt insbesondere in der Feuerrückversicherung häufig zur Anwendung und der Verfasser hat sich deshalb erlaubt, in der vorliegenden Arbeit dessen Aufbau und seine Konsequenzen für den Erstversicherer kurz darzulegen.

Die Rückversicherung nach *Gruppenexcedenten* hat insbesondere in der Feuersparte Eingang gefunden. Sie leistet dort ihre guten Dienste und wir erlauben uns deshalb, nachstehend diese Excedentenform kurz zu beschreiben.

Die hier in Frage stehende Gruppierung erfolgt nach Massgabe der *Selbstbehaltsquote* q_i des Erstversicherers für die einzuordnende *Einzelversicherung* V_i. Es ist:

$$q_i = \frac{\text{Selbstbehalt } E_i}{\text{Versicherungssumme } S_i}. \tag{1}$$

Die Festsetzung des Selbstbehaltes E_i erfolgt durch den Erstversicherer nach den von ihm beachteten Regeln und Richtlinien. Wir werden sehen, dass die Bildung von Excedentengruppen Abweichungen des *effektiven Selbstbehaltes* vom Eigenbehalt E_i zur Folge hat. Die Versicherungssumme S_i ist durch die Bestimmungen des Rückversicherungsvertrages limitiert. Übersteigt die gezeichnete Summe die vertragliche Limite, so muss der Erstversicherer für die Spitze ausserhalb des Vertrages Rückdeckung nehmen.

Alle Einzelversicherungen V_i, für die

$$(1-m_r)\, q_r \leqq q_i \leqq (1+m_r)\, q_r \tag{2}$$

ausfällt, werden der *Rückversicherungsgruppe* r zugeteilt. Sie werden der einheitlichen *Selbstbehaltsquote* q_r und damit der einheitlichen *Abgabequote* $1-q_r$ unterworfen. Für die Zwecke dieser Gruppenbildung ist also die Versicherung V_i durch S_i und E_i bestimmt.

Zur Beschreibung des Aufbaues des ganzen Abgabesystems können wir uns zunächst auf die Betrachtung des *Teilportefeuilles* A des Erstversicherers beschränken, das durch den einheitlichen Selbstbehalt E_A gekennzeichnet ist. Für alle Versicherungen V_i dieses Teilportefeuilles gilt also $E_i = E_A$. Diese Posten unterscheiden sich lediglich durch die Höhe der Summe S_i; für sie ist die Selbstbehaltsquote q_i durch S_i bestimmt.

Wir untersuchen zunächst die Verhältnisse in der Gruppe r des Teilportefeuilles A. Diese sind durch die Grenzwerte $S_{A,r}^{(\max)}$ und $S_{A,r}^{(\min)}$ für die Summe S_i sowie durch die Grenzwerte $E_{A,r}^{(\max)}$ und $E_{A,r}^{(\min)}$ für den effektiven Selbstbehalt gekennzeichnet.

Aus der Extremlage $q_i = (1-m_r)\,q_r$ gemäss (2) folgt nach (1):

$$(1-m_r)\,q_r = \frac{E_A}{S_{A,r}^{(\max)}}$$

und entsprechend aus der Extremlage $q_i = (1+m_r)\,q_r$:

$$(1+m_r)\,q_r = \frac{E_A}{S_{A,r}^{(\min)}}\,.$$

Daraus folgt:

$$S_{A,r}^{(\max)} = \frac{1+m_r}{1-m_r}\,S_{A,r}^{(\min)}\,. \tag{3}$$

Dabei haben wir für die *Hilfszahl* m_r die erste Annahme: $m_r > 0$ getroffen, andererseits muss $m_r < 1$ sein.

Aus $E_{A,r}^{(\max)} = q_r\,S_{A,r}^{(\max)}$ und $E_{A,r}^{(\min)} = q_r\,S_{A,r}^{(\min)}$ ergibt sich dann:

$$E_{A,r}^{(\max)} = \frac{1+m_r}{1-m_r}\,E_{A,r}^{(\min)}\,. \tag{4}$$

Es ist weiter:

$$E_{A,r}^{(\min)} = \frac{E_A}{1+m_r} \quad \text{und} \quad E_{A,r}^{(\max)} = \frac{E_A}{1-m_r}\,. \tag{5}$$

Durch die Hilfszahl m_r sind die maximalen Abweichungen des effektiven Selbstbehaltes des Erstversicherers vom Selbstbehalt E_A bestimmt. Wir werden später sehen, in welcher Weise diese Hilfszahl den Aufbau des ganzen Abgabesystems mitbestimmt.

Wir gehen nun über zur Betrachtung der nächstfolgenden Gruppen $r+1, r+2, \ldots, n$ und zeigen, wie der Zusammenschluss zu erfolgen hat. Dazu gelten folgende Richtlinien:

a) Es ist naheliegend, die absoluten Grenzen für den effektiven Selbstbehalt für alle Gruppen einheitlich anzusetzen und also für alle r:

$$m_r = m \qquad \text{zu wählen.}$$

b) Um Summenüberschneidungen zu vermeiden, muss schrittweise

$$S_{A,r}^{(\max)} = S_{A,r+1}^{(\min)}, \qquad S_{A,r+1}^{(\max)} = S_{A,r+2}^{(\min)} \ldots. \tag{6}$$

gelten.

Aus *a)* folgt, dass die maximalen Abweichungen des effektiven Selbstbehaltes von E_A in allen Gruppen, absolut und prozentual genommen, gleich sind.

Aus *b)* ergibt sich für den Aufbau der Summen S_i nach (3) und (6)

$$S_{A,r+1}^{(\min)} = \frac{1+m}{1-m} S_{A,r}^{(\min)}, \qquad S_{A,r+2}^{(\min)} = \frac{1+m}{1-m} S_{A,r+1}^{(\min)} \ldots$$

und

$$S_{A,r+1}^{(\max)} = \frac{1+m}{1-m} S_{A,r}^{(\max)}, \qquad S_{A,r+2}^{(\max)} = \frac{1+m}{1-m} S_{A,r+1}^{(\max)} \ldots.$$

Ausgehend von der 1. Rückversicherungsgruppe $r = 1$ erhalten wir:

$$S_{A,r}^{(\min)} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{r-1} S_{A,1}^{(\min)} \quad \text{und} \quad S_{A,r}^{(\max)} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{r-1} S_{A,1}^{(\max)}$$

und für die *Summenspanne* der Gruppe r:

$$S_{A,r}^{(\max)} - S_{A,r}^{(\min)} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{r-1} \left\{ S_{A,1}^{(\max)} - S_{A,1}^{(\min)} \right\}. \tag{7}$$

Die Summenspanne wächst also mit fortschreitendem r exponentiell.

Dem System der Rückversicherungsgruppen $r = 1, 2, \ldots, n$ fügen wir die *Selbstbehaltsgruppe* $r = 0$ bei. Sie umfasst alle Versicherungen des Teilportefeuilles A, die zu keiner Rückversicherungsabgabe Anlass geben, für die also $E_A^{(\max)} \geqq S_i$ ist. Ihre obere Summengrenze ist also durch $E_A^{(\max)}$ bestimmt. Damit eine Summenüberschneidung auch beim Übergang von der Gruppe 0 zur Gruppe 1 vermieden wird, muss

$$S_{A,0}^{(\max)} = S_{A,1}^{(\min)} \qquad \text{sein.}$$

Wir fragen nun nach der *Anzahl n der Gruppen*, die für das Teilportefeuille A gebildet werden können. Zu ihrer Festsetzung muss auf die maximale Haftung des Rückversicherers Bedacht genommen werden. Letztere wird im allgemeinen durch eine Höchstzahl von Selbstbehalten ausgedrückt, die unter dem Excedenten überwiesen werden können. Dabei ist der effektive Selbstbehalt in Rechnung zu stellen. Diese Höchstzahl sei a und es muss:

$$a = \frac{S_{A,n}^{(\max)} - E_A^{(\max)}}{E_A^{(\max)}} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^n - 1 \qquad \text{sein.}$$

Die *Zeichnungskapazität*, die dem Erstversicherer auf Grund dieser Vertragsbestimmung eingeräumt ist, ist also:

$$a + 1 = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^n.$$

m, a und n sind in dieser Weise verknüpft. Die Anzahl a ist durch den Rückversicherungsvertrag vorgegeben und für die Abhängigkeit von m und n gelten folgende Gleichungen:

$$m = \frac{\sqrt[n]{a+1} - 1}{\sqrt[n]{a+1} + 1} \quad \text{und} \quad n = \frac{\log(a+1)}{\log(1+m) - \log(1-m)}. \tag{8}$$

Wir haben in nachstehender Tabelle für $a = 10$, 15, 20 und 25 die Werte von m für $n = 6$, 8, 10 und 12 zusammengestellt.

a	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$
	m	m	m	m
10	0.197	0.149	0.119	0.100
15	0.227	0.172	0.138	0.115
20	0.248	0.188	0.151	0.126
25	0.265	0.201	0.162	0.135

Das Verhältnis zwischen dem höchsten und dem niedrigsten effektiven Selbstbehalt innerhalb einer Gruppe ist durch $\frac{1+m}{1-m}$ gegeben. Es nimmt mit wachsendem n ab und steigt mit wachsendem a. Im Rahmen der eben betrachteten Beispiele erreicht es folgende Extremwerte:

$$\frac{1+m}{1-m} = 1.215 \qquad \text{für } a = 10, \quad n = 12$$

und

$$\frac{1+m}{1-m} = 1.710 \qquad \text{für } a = 25, \quad n = 6.$$

Die Abweichungen des effektiven Selbstbehaltes können also recht beträchtliche Ausmasse annehmen.

Sind a und m vorgegeben, so ergibt sich im allgemeinen kein ganzes n. Die letzte Gruppe kann trotzdem voll ausgenützt werden, da ja die Selbstbehaltsquote und damit die Abgabequote innerhalb einer Gruppe einheitlich gelten.

Es sind noch die Selbstbehaltsquoten q_r und damit die Abgabequoten $1-q_r$ für die einzelnen Gruppen zu bestimmen. In der Gruppe r ist

$$S_{A,r}^{(\max)} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^r S_{A,0}^{(\max)} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)^r E_A^{(\max)}$$

und damit

$$q_r = \frac{E_A^{(\max)}}{S_{A,r}^{(\max)}} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^r \quad \text{und} \quad 1-q_r = \frac{(1+m)^r-(1-m)^r}{(1+m)^r}. \qquad (9\text{a, b})$$

Unter der bereits getroffenen Annahme $m > 0$ ist $\dfrac{1-m}{1+m} < 1$.

Die Selbstbehaltsquoten q_r bauen sich mit wachsendem r exponentiell ab.

Wir betrachten nun ein zweites *Teilportefeuille B*, das durch den einheitlichen Selbstbehalt E_B des Erstversicherers gekennzeichnet ist. Es besteht keine Veranlassung für die prozentualen Abweichungen des effektiven Selbstbehaltes von E_B andere Annahmen zu treffen, als beim Teilportefeuille A. Wir setzen also hier dieselbe Hilfszahl $m_r = m$ in Rechnung. Weiter muss auch für dieses Teilportefeuille die Kapazität des Rückversicherungsvertrages beachtet werden. Die Rückversicherungsgruppen bauen sich aus E_B nach denselben Regeln und mit Hilfe derselben Werte m und a auf, wie diejenigen für das Teilportefeuille A. *Insbesondere ergeben sich nach Formel (9a und b) für die einzelnen Rückversicherungsgruppen r dieselben Selbstbehalts- und Abgabequoten.*

Analoges gilt für alle andern Teilportefeuilles. Für entsprechende Gruppen r der einzelnen dieser Teilportefeuilles gilt eine einheitliche Abgabequote $1-q_r$; sie können also zur *Gesamtgruppe* r zusammengelegt werden.

Für die Rückversicherung nach diesem Gruppenexcedenten hat also der Erstversicherer die Selbstbehaltsquote der einzubringenden Einzelversicherung V_i zu bestimmen und die Gruppenzuordnung gemäss Formel (2) vorzunehmen. Die Verrechnung der Prämien- und Schadenanteile kann dann für jede der n-Gruppen pauschal aus dem entsprechenden Gruppentotal vorgenommen werden. Die dadurch erzielte Arbeitsersparnis muss vom Erstversicherer durch die geschilderten Abweichungen des effektiven Selbstbehaltes innerhalb einer Gruppe erkauft werden.

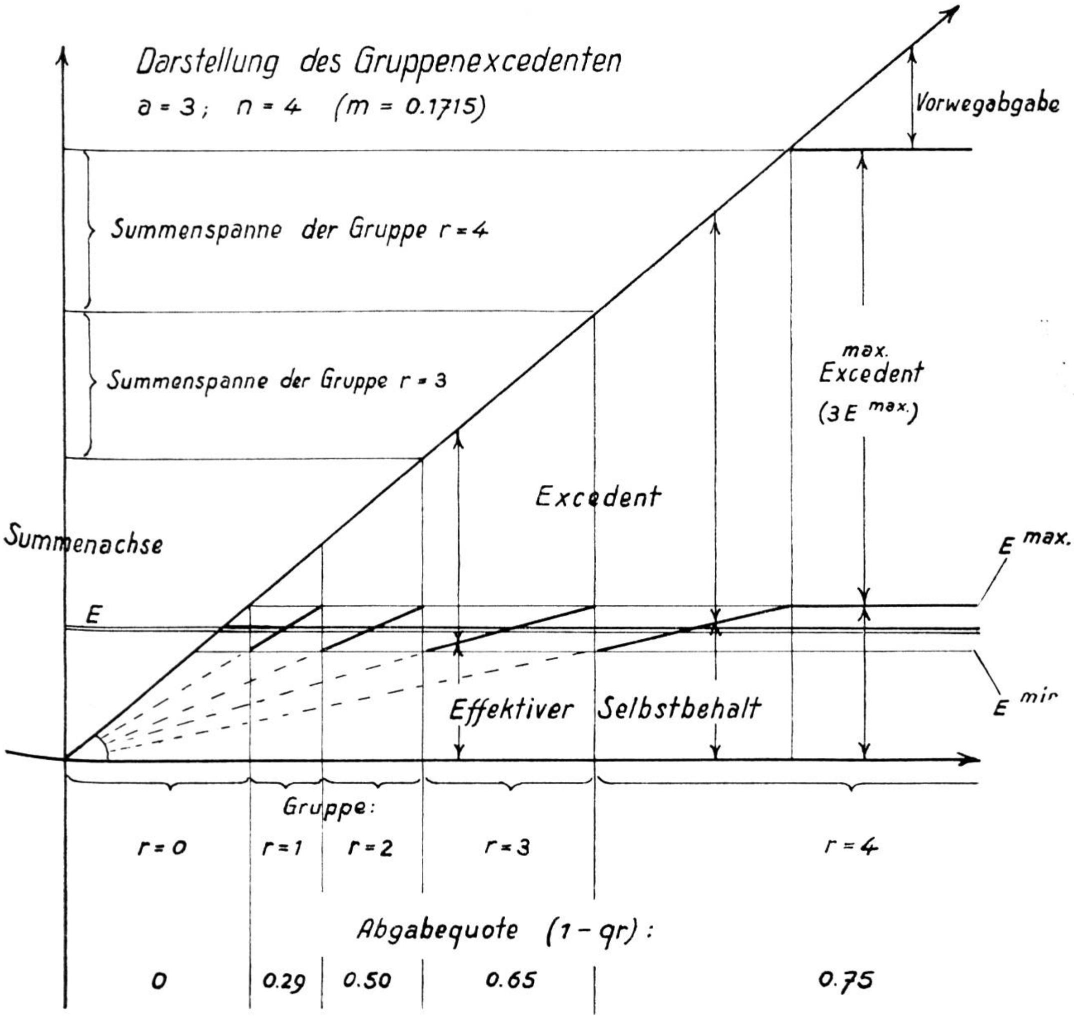
Zur Gruppierung der Einzelposten wird sich der Sachbearbeiter des Erstversicherers einer Tabelle bedienen, die zu jedem Selbstbehalt E die Summenspannen der einzelnen Gruppen aufzeigt. Die Grenzen dieser Spannen ergeben sich, ausgehend von $S_1^{(\min)} = (1-m)^{-1}E$ nach der Rechnung (3) unter Berücksichtigung von (6). Zeichnet der Erstversicherer auf einen Posten eine Summe $S > (a+1)\,E^{(\max)}$, dann muss er diese durch eine Vorwegabgabe auf den Betrag $(a+1)\,E^{(\max)}$ zurückbringen, den er dann unter der Rückversicherungsgruppe $r = n$ verarbeiten kann.

Mit $n = \infty$ gelangen wir zum System der Einzelexcedenten ohne Abweichungen vom Selbstbehalt.

Aus $n = 1$ resultiert eine Quotenabgabe, in die auch die Gruppe $r = 0$ einbezogen werden kann.

Wir geben umstehend eine graphische Darstellung eines solchen Gruppenexcedenten. Die Summenspannen der einzelnen Gruppen können auf der Summenachse abgelesen werden, wobei der Maßstab durch den für E vorgegebenen Betrag bestimmt wird. Die Darstellungen für die einzelnen Teilportefeuilles unterscheiden sich nur durch diesen Maßstab.

Gruppenexcedenten sind in der Praxis häufig im Gebrauch und durchgerechnet worden. Als Literaturhinweis diene: «Estudio sobre el sistema de Reaseguro por Grupos» por Jacinto Fenoll Ceva – Instituto de Actuarios Espagnoles 1950.


Darstellung des Gruppenexcedenten
a = 3; n = 4 (m = 0.1715)
Vorwegabgabe
Summenspanne der Gruppe r = 4
Summenspanne der Gruppe r = 3
max. Excedent
(3 E max.)
Excedent
Summenachse
E max.
E
Effektiver Selbstbehalt
E min
Gruppe:
r = 0
r = 1
r = 2
r = 3
r = 4
Abgabequote (1 − qr):
0
0.29
0.50
0.65
0.75

Résumé

L'utilisation en réassurance des excédents individuels représente un travail considérable pour l'assureur. On peut simplifier ce travail en constituant des groupes de risques. L'«excédent de groupe» est fréquemment utilisé dans la réassurance-incendie; c'est pourquoi l'auteur s'est permis, dans le présent travail, de traiter brièvement l'élaboration de ces groupes et de décrire les conséquences qui en résultent pour l'assureur.

Summary

The handling of reinsurances on a individual excess line basis causes a great deal of work for the direct-insurer. Relief will be obtained by forming groups of individual risks. The «group surplus» is frequently used in the fire-reinsurance, therefore the author has allowed himself to explain briefly in the present paper the construction of such groups and their consequences for the direct-insurer.

Riassunto

L'utilizzazione nella riassicurazione di eccedenti singoli causa grande lavoro all'assicuratore. Si può giungere ad una semplificazione formando gruppi di rischi. L'«eccedente di gruppo» è applicato frequentemente nella riassicurazione incendio, ciò che ha indotto l'autore ad esporre in modo succinto col presente lavoro la costruzione di questi gruppi e la conseguenza di tale applicazione per l'assicuratore.