Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 61 (1961)

Artikel: Abschätzung von Reserven mit spieltheoretischen Methoden

Autor: Baumgartner, U.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966740

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Abschätzung von Reserven mit spieltheoretischen Methoden[1])

Von U. Baumgartner, Bern

Zusammenfassung

Für die Berechnung mathematischer Reserven wird ein spieltheoretisches Modell aufgestellt, dessen praktische Anwendungsmöglichkeiten diskutiert werden. Je ein spezielles Kapitel ist der Schrankenbestimmung mit Hilfe der linearen Programmierung und der spieltheoretisch optimalen Wahl von Mittelwerten bei vorgegebenen Schranken gewidmet.

Einleitung

Der relativ junge Wissenszweig der Unternehmensforschung (Operations Research) ist bestrebt, mathematische Prinzipien und Methoden auf Entscheidungssituationen anzuwenden, wie sie in erster Linie in militärischen und betriebswirtschaftlichen Problemen auftreten. Es handelt sich im Prinzip darum, unter Berücksichtigung vorgegebener Situationen optimale Dispositionen zu treffen. Diese Aufgabe setzt zweierlei voraus: Einerseits müssen die Probleme in eine mathematisch erfassbare Form gebracht werden; dies erreicht man durch die Aufstellung geeigneter Modelle. Andererseits müssen Verfahren existieren, die der besonderen Problemlage gerecht werden. Hier sind in erster Linie die Spieltheorie und die mathematische Programmierung anzuführen. Über beide Methoden wurde an dieser Stelle schon berichtet [6, 12] [2]).

---

[1]) Erweiterte Fassung des anlässlich der Jahresversammlung der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker am 8. Oktober 1960 gehaltenen Referates.

[2]) Zahlen in Klammern [ ] verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Die Anwendung der Spieltheorie auf Probleme der Versicherungsmathematik wurde von *Bierlein* [2, 3] und *Nolfi* [12, 13] angeregt. Sie stützt sich auf den von *Wald* [17] und *Blackwell-Girshick* [4] eingeführten Begriff des statistischen Spiels, des Spiels «gegen die Natur». Die lineare Programmierung hat durch *Benjamin-Bennet* [1] in der aktuariellen Literatur Eingang gefunden.

Die vorliegenden Darlegungen sollen die Anwendungsmöglichkeiten dieser Methoden auf das Problem der Reserverechnung diskutieren. Dies wird nicht zu neuen Methoden führen, sondern Gelegenheit bieten, die bestehenden Methoden von einem andern Gesichtspunkt aus zu interpretieren und die Charakteristiken der spieltheoretischen Betrachtungsweise klarzulegen.

Wir gliedern unsere Ausführungen wie folgt: Zuerst werden die zwei Probleme, die Bestimmung eines optimalen Reservewertes und die Wahl einer optimalen Methode, in ein spieltheoretisches Modell gekleidet (1). Daran schliesst sich eine praktische Beurteilung der wesentlichen Merkmale, Kostenfunktion, Information und Strategienmenge (2). Die beiden andern Kapitel sind Spezialproblemen gewidmet, der Abschätzung von Reserven mit Hilfe der linearen Programmierung (3) und der spieltheoretischen Bestimmung eines optimalen Mittelwertes bei vorgegebenen Schranken (4). Für die numerischen Beispiele (3) stellte mir Herr Dr. K. Stauber, Chefmathematiker der Fortuna Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in Zürich einen Testbestand zur Verfügung, und Herr Prof. W. Nef, Direktor des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Bern gestattete mir in grosszügigem Ausmass die Benützung der elektronischen Rechenanlage. Beiden Herren danke ich für ihre Unterstützung bestens.

Zur Symbolik: Es bedeuten

$\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|$	Matrix mit den Elementen a_{ij},
$\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$	Spaltenvektor mit den Elementen $r_1, \ldots, r_n$,
$\boldsymbol{r}'$	Zeilenvektor (transponierter Vektor zu $\boldsymbol{r}$),
$\det\|\boldsymbol{A}\| = \det\|a_{ij}\|$	Determinante zur Matrix $\boldsymbol{A}$,
$\{r\}$	Menge mit den Elementen r,
$\underline{V}$	$\min V$,
$\overline{V}$	$\max V$.

1 Reserverechnung als spieltheoretisches Problem

11 Methoden approximativer Reserverechnung

Im Sinne einer Darstellung der wesentlichen Grundsätze beschränken wir uns auf den Spezialfall der Nettoreserve einer gemischten Versicherung gegen Jahresprämie, zahlbar während der Vertragsdauer.

111 Die genaue Reserve

Als *Reservefaktor* $f = {}_tV_{x\overline{n}|}$ bezeichnen wir die technische Reserve für einen Vertrag mit der Versicherungssumme 1. Er ist abhängig von zwei Gruppen von Parametern:

a) *Tarifparameter* (Zinsfuss i, Sterblichkeit $\{\mu\}$).
Ihre genauen Werte sind nicht feststellbar und werden ersetzt durch fiktive Werte, die im allgemeinen für einen gegebenen Bestand ein für allemal fest angenommen werden.

b) *Vertragsparameter* (Eintrittsalter x, Vertragsdauer n, bisherige Laufzeit t oder Kombinationen dieser Werte).
Sie sind für jeden Vertrag bestimmbar und unterteilen sich ihrerseits in zeitabhängige und zeitunabhängige.

Die Menge der Reservefaktoren bildet die *Reservefunktion.*

Die *individuelle Reserve* eines Vertrages erhalten wir durch Multiplikation der Versicherungssumme mit dem entsprechenden Reservefaktor, und die *Reserve des Bestandes* durch Summation über alle individuellen Reserven. Damit lautet die Reserve eines Bestandes:

$$V = \int f(i, \{\mu\}; x, n, t)\, dS(x, n, t)\,. \tag{1.1}$$

Dabei bedeutet $S(x, n, t)$ die *Summenverteilung* des Bestandes über den drei Vertragsparametern. Will man mehrere Tarife in einem Bestand vereinigen, wird auch die Summenverteilung von den Tarifparametern abhängig; davon sehen wir in der Folge ab. Die Darstellung als Stieltjes-Integral wurde lediglich der Übersichtlichkeit halber gewählt.

Während die Reservefunktion nach Wahl des Tarifs festbleibt, verändert sich die Summenverteilung von Jahr zu Jahr. Die Bestimmung der Reserve zerfällt damit in zwei Aufgaben:

a) Ermittlung der Summenverteilung,

b) Auswertung des Integrals (1.1).

Praktisch besteht *a)* in einer Gruppierung nach den drei Parametern x, n, t und einer anschliessenden Bildung von Subtotalen, *b)* im Ausmultiplizieren der Ausdrücke $f(x,n,t)\ s(x,n,t)$ und anschliessender dreifacher Summation.

112 Aufspaltung der Reservefunktion, Hilfszahlen

Eine Aufspaltung der Reservefunktion in zeitabhängige und zeitunabhängige Komponenten gestattet eine mehrmalige Verwendung von Teilresultaten.

Zweckmässig ist eine Darstellung der Form

$$f = \sum_k g_k(t)\, h_k,$$

worin h_k zeitunabhängig ist und g_k weniger Parameter als f enthält. Ordnen wir jedem Vertrag Hilfszahlen der Form $h_k^* = s\, h_k$ zu, können wir Hilfsverteilungen H_k konstruieren, mit welchen (1.1) übergeht in

$$V = \sum_k \int g_k(t)\, dH_k, \tag{1.2}$$

worin (1.1) als Spezialfall ($h = 1$) enthalten ist.

Die Einführung dieser Hilfszahlen reduziert die notwendigen Gruppierungen und vereinfacht die Integration (weniger Multiplikationen).

Als Beispiele zitieren wir die Methoden von *Karup* und *Altenburger* [19]. Bei der ersten ersparen wir mit den Hilfszahlen $h_1 = 1$, $h_2 = P_{x\overline{n}|}$ eine Gruppierung, und bei der zweiten werden zwei Gruppierungen unterdrückt durch die Verwendung von drei Hilfszahlen $h_1 = 1$, $h_2 = P_{x\overline{n}|}$, $h_3 = (P_x + d)\, N_{x+n}$.

113 Approximation der Reservefunktion

Die Ersetzung der Reservefunktion durch eine Näherungsfunktion hat den Zweck, die Integralbildung (1.1) zu erleichtern und insbesondere die Bildung von Hilfszahlen zu fördern. Sie ist um so eher berechtigt, als ja auch die «genaue» Reservefunktion auf vereinfachten Annahmen beruht, und die Tarifparameter nicht genau bekannt sind.

Als Approximationsfunktionen werden hauptsächlich Konstanten, Polynome, Hyperbeln oder Exponentialfunktionen verwendet. Indem die Genauigkeit normalerweise nur für einen beschränkten Bereich der

entsprechenden Parameter genügt, ist im allgemeinen eine reduzierte Gruppierung nach diesen Parametern nicht zu umgehen.

Von besonderer Bedeutung sind Approximationen, die eine Reserverechnung nach (1.2) so erlauben, dass g_k von t allein abhängig ist [14]. Sie gestatten eine gruppenfreie Reserverechnung, wenn man als Zeitursprung nicht mehr den Versicherungsbeginn jeder einzelnen Police annimmt, sondern einen für den ganzen Bestand geltenden Bezugspunkt.

Zur Erläuterung sollen die folgenden Beispiele dienen:

a) *Gerundete Eintrittsalter:* Werden nur noch durch 5 dividierbare Eintrittsalter zugelassen, bedeutet dies, dass f bezüglich x für je 5 Alter konstant ist. Damit wird die Zahl der x-Gruppen reduziert.

b) *Methode von Trachtenberg* [19]: $A_{x\overline{n}|}$ und $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ werden für je 10 Alter in x quadratisch angesetzt.

c) *F-Methode von Jecklin* [8]: f wird hyperbolisch in t angesetzt. Diese Approximation genügt für ca. 20 Jahre. Damit hat f zwar nicht die in 112 geforderte Form, liefert aber durch eine weitere Approximation für die Reserve einen Ausdruck, der nur noch von zwei Hilfszahltotalen und dem (einzigen) Gruppierungsmerkmal t abhängt.

d) *Skalarmethode von Pöttker* [14]: Sie beruht auf der Darstellung (1.2) mit vier Hilfszahlen, wobei die g_k Linerarkombinationen von Exponentialfunktionen in t und die Hilfszahlen Reservewerte in 4 festen Zeitpunkten darstellen. Diese Methode benötigt keine Gruppierung und gestattet eine Zusammenfassung von ca. 40 Beginnjahren.

Weitere Beispiele sind die n-Alter-Methode [19], die Φ- und φ-Methode Jecklins [8] und die Ko-Methode von Meier [11].

114 Vereinfachungen der Summenverteilung

Gruppierungen lassen sich unterdrücken, indem durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf (1.1) resp. (1.2) für gewisse Parameter Mittelwerte eingesetzt werden, z. B.:

$$V = f(x^*, n^*, t^*) \int dS = \sum_k g_k^* \int dH_k .$$

Die Bestimmung dieser Mittelwerte stützt sich meistens auf eine Approximation der Reservefunktion und geschieht mittels Hilfszahlen.

Die klassischen Beispiele dafür sind die Z-Methode Lidstones und die t-Methode Jecklins [19]. Beide beruhen auf der Approximation $\ddot{a}_{x\overline{n}|} \approx a + bc^x$. Im ersten Fall wird innerhalb jeder $(n-t)$-Gruppe das Schlussalter mit den Hilfszahlen c^{x+n} bestimmt, im zweiten innerhalb jeder t-Gruppe das Anfangsalter x mit der Hilfszahl c^x. Weitere Beispiele sind die Methode von Pöttker [15], die n-Methode Jecklins [8] und die Methode von Insolera [5].

Während diese Methoden annehmen, die Summenverteilung sei über einem bestimmten Parameter konstant, kann man auch linearen Verlauf voraussetzen (Trachtenberg [19]) oder eine Normalverteilung (Givskov).

12 Statistische Spiele

121 Der Begriff des statistischen Spiels [4, 17]

Der Begriff des statistischen Spiels wird mit Erfolg dort angewendet, wo Werte zu schätzen sind, die von einem stochastischen Prozess beeinflusst werden. Es handelt sich dabei um ein Spiel eines Schätzers M (Mathematiker) gegen einen hypothetischen Gegenspieler N (Natur). N wählt den richtigen Wert V, M einen Schätzwert W, womit M einen wirtschaftlichen Schaden $A(V,W)$ erleidet, der um so grösser wird, je schlechter die Schätzung ist. Diesen Schaden sucht M möglichst klein zu halten. Nehmen wir an, er bestehe in einer Auszahlung von M an N, und N habe ein Interesse daran, diese Auszahlung maximal zu machen, so gelangen wir zum Modell eines Zweipersonen-Nullsummen-Spiels. Die Menge der reinen Strategien von N besteht in der Menge der möglichen richtigen Werte V, d.h. einem Stück der positiven reellen Zahlenachse, während die gemischten Strategien durch Verteilungsfunktionen über den möglichen Werten dargestellt werden. Analoges gilt für die Schätzwerte als Strategien von M. Die Auszahlungsfunktion ist eine positive reellwertige Funktion über der Produktmenge der Strategienräume. Falls das Spiel lösbar ist, erhalten wir für N einen wahren Wert V^* so, dass $\min\limits_{W} A(V,W) = \max$ und für M einen Schätzwert W^* so, dass $\max\limits_{V} A(V,W) = \min$. Nach dem Minimaxtheorem gilt dann die Gleichung

$$A^* = \max_{V} \min_{W} A(V,W) = \min_{W} \max_{V} A(V,W) = A(V^*,W^*). \quad (1.3)$$

Den Ausdruck A^* nennen wir den *Wert* des Spiels. Er ist, sofern er existiert, durch Strategienräume und Auszahlungsfunktion eindeutig bestimmt.

Dieses Modell ist eigentlich nur vom Standpunkt von M aus richtig. Der Spieler N hingegen interessiert uns wenig, und wir stellen uns eigentlich auch nicht vor, dass er eine maximale Auszahlung anstrebt. Zur Klarstellung diene die folgende risikotheoretische Interpretation.

122 Risikotheoretische Interpretation

Es sei $A(V,W) > 0$ der Schaden, den M erleidet, indem er einen Schätzwert W anstelle des richtigen Wertes V verwendet. $z(V)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass V der richtige Wert sei.

Als *Risiko n-ter Ordnung* für M bezeichnen wir den Ausdruck

$$R_n(W) = \left[\int A(V,W)^n z(V)\, dV\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{1.4}$$

M sucht ein möglichst kleines Risiko und wählt daher bei vorgegebenem n den Wert W^* so, dass (1.4) zu einem Minimum wird.

Mit $n = 1$ liefert (1.4) das durchschnittliche Risiko; die Bestimmung von W^* aus dem durchschnittlichen Risiko wird als Bayessche Lösung bezeichnet [4]. Mit wachsendem n werden die Schätzungen vorsichtiger, indem der Einfluss der Verteilung $z(V)$, die im allgemeinen nur approximativ bekannt ist, abnimmt. $n = 2$ liefert eine Schätzung aus dem mittleren Risiko, und für den Grenzfall $n = \infty$ erhalten wir

$$R_\infty(W^*) = \min_W R_\infty(W) = \min_W \max_V A(V,W). \tag{1.5}$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Wert des oben konstruierten Spiels (1.3) und garantiert einen minimalen Schaden im ungünstigsten Fall. Mit $W = W^*$ liefert (1.5) eine obere Schranke für den Schaden. Die Bestimmung optimaler Werte auf Grund des maximalen Schadens anstelle einer Schadenerwartung ist für die spieltheoretische Methode charakteristisch.

123 Die Wahl von Schätzverfahren

Damit eine spieltheoretische Schätzung von M brauchbare Resultate liefert, muss M das Verhalten von N möglichst genau analysieren. Sein Verhalten basiert sonst auf maximalen Schäden, die gar nicht

auftreten können. Durch vermehrten Arbeitsaufwand, der eine zweite Komponente der Kostenfunktion zur Folge hat, muss sich M Informationen über das Verhalten von N verschaffen. Dies wird durch folgende Annahme ermöglicht: Es existiert a priori eine Verteilung der richtigen Werte V mit bestimmten, M unbekannten Parametern, auf Grund welcher N den richtigen Wert V mittels eines stochastischen Prozesses herausgreift. M verschafft sich Angaben über diese Parameter z.B. durch Experimente (Stichproben, physikalische Experimente usw.).

Das in 121 entwickelte Modell verfeinert sich damit wie folgt: N wählt die Parameter $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, aus denen sich V mittels eines stochastischen Prozesses bestimmt. M gewinnt durch ein Experiment die Information $J = J(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ und berücksichtigt bei der Wahl von W^* nur noch diejenigen möglichen Werte $V = V(\omega_1, \ldots, \omega_r)$, für welche gilt: $J(\omega_1, \ldots, \omega_r) = J$.

Der Informationsgewinnung werden durch ihre Kosten Grenzen gesetzt; der Verbesserung des Schätzwertes steht der vergrösserte Arbeitsaufwand gegenüber. Dem eigentlichen Schätzproblem ist daher das Problem einer optimalen Methode übergeordnet: Was für eine Methode soll M wählen, um seinen Schaden, bestehend aus Arbeitskosten und wirtschaftlichen Folgen einer falschen Schätzung, minimal zu halten?

13 Spieltheoretisches Modell für die Reserverechnung

Wir gehen aus von der in 111 besprochenen Darstellung der Reserve (1.1). Eine Strategie von N besteht in einem Satz $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ von Parametern, welche die Reservefunktion und die Summenverteilung bestimmen. Jedem Vektor $\boldsymbol{\omega}$ ist genau ein Punkt der positiven reellen Zahlenachse als wahre Reserve zugeordnet. Damit wird in diesem speziellen Fall der stochastische Prozess ausgeschaltet.

Für M ergeben sich gemäss 123 die Probleme des optimalen Schätzwertes und der optimalen Methode in folgender Form:

131 Optimaler Schätzwert

Die Strategienmenge von M ist primär die Menge der Schätzwerte W, eine kontinuierliche oder diskrete Menge von Punkten der positiven reellen Zahlenachse, je nachdem beliebige Schätzwerte oder nur ganze

Vielfache einer Werteinheit zugelassen sind. Die Wahl des optimalen Schätzwertes W^* stützt sich auf Experimente, welche jeder Strategie $\boldsymbol{\omega}$ von N eine Information $J(\boldsymbol{\omega})$ zuordnen, die selbst aus mehreren Komponenten bestehen kann. Damit besteht die Wahl eines Schätzwertes im Prinzip in einer Vorschrift, die jeder Information J einen Schätzwert W^* zuordnet.

132 Optimale Methoden

Jede Strategie von M ist ein Paar von Methoden $G = (g_1, g_2)$. Die erste Komponente g_1 liefert für jedes $\boldsymbol{\omega}$ eine Information $J(g_1, \boldsymbol{\omega})$. g_2 ordnet jeder Information J einen Wert W^* der positiven reellen Zahlenachse zu. Die Schadenfunktion setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, von denen die erste den Arbeitsaufwand berücksichtigt und im allgemeinen nur von der verwendeten Methode abhängig ist, während die zweite den Schaden aus der Fehlschätzung berücksichtigt:

$$A = A^{\mathrm{I}}(g_1, g_2) + A^{\mathrm{II}}(V, W) = A^{\mathrm{I}}(G) + A^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\omega}, G).$$

Schematisch stellt sich der Spielverlauf wie folgt dar:

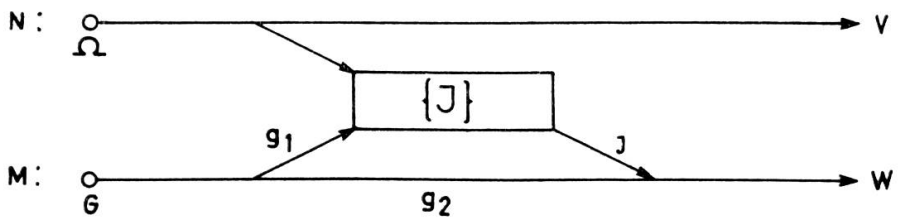

Fig.1

Ohne Berücksichtigung der Schadenkomponente $A^{\mathrm{I}}(G)$ erhalten wir das Problem des optimalen Schätzwertes (131).

Zur Erläuterung führen wir noch zwei Beispiele für Strategien von M an:

a) Methode von Karup: Informationen liefern die Vergangenheit (Erfahrungen über Tarifparameter) und Gruppierungen mit Summen- und Prämientotalen. Die zweite Information erfasst die Summenverteilung genau. Schätzfehler werden nur durch Tarifparameter verursacht. Die Methode g_2 entspricht der bekannten Formel:

$$W = \sum_z \sum_m \left[A_{z\overline{m}|}\, s(z,m) - \ddot{a}_{z\overline{m}|}\, p(z,m)\right] \text{ mit } z = x + t,\ m = n - t,$$

wobei s das Summentotal einer Gruppe bedeutet und p das zugehörige Prämientotal.

b) F-Methode: Informationen liefern die Erfahrung (Hilfszahlen) und die Bildung der Hilfszahltotale in t-Gruppen. Die Methode g_2 besteht in der Formel

$$W = \sum_t \frac{tG}{1 - t\frac{H}{G}},$$

wo G und H die Hilfszahltotale bedeuten.

2 Überlegungen zur praktischen Anwendung

Ein Spiel ist bestimmt durch die Kostenfunktion und die Strategienräume, die ihrerseits durch Informationen beeinflusst werden. Die Anwendung eines spieltheoretischen Modells auf einen konkreten Fall erfordert daher eine Untersuchung dieser charakteristischen Begriffe. Für die Reserve gelten die in 11 getroffenen Einschränkungen. Theoretische Grundlagen finden sich in den Arbeiten von *Wald* [17], *Blackwell-Girshick* [4] und *Bierlein* [2].

21 Die Kostenfunktion

Die Anwendbarkeit des spieltheoretischen Modells ist hauptsächlich von der Kostenfunktion abhängig. Ihre konkrete Form entscheidet über die Lösbarkeit des Problems, und von ihrem sinnvollen Ansatz hängt die Aussagekraft der Lösung ab. In der Tat liegen die Schwierigkeiten der Umsetzung des skizzierten Modells auf einen konkreten Fall hauptsächlich hier begründet.

Die Kostenfunktion zerfällt wie erwähnt in die Komponenten für den Arbeitsaufwand und den Schaden, der durch einen Schätzfehler verursacht wird.

211 Der Arbeitsaufwand

Die Kosten für den Arbeitsaufwand lassen sich relativ einfach wertmässig fassen. Sie setzen sich zusammen aus einem Teil der Gehälter, den Kosten für Maschinenbeanspruchung, Materialverbrauch usw. Die Beschaffung brauchbarer Unterlagen erfordert indessen neben einem genauen Studium der einbezogenen Methoden vor allem eine eingehende Analyse des Versichertenbestandes und der Organisation des Betriebes. Die Struktur des Versichertenbestandes kann gewisse

Methoden bevorzugen und andere verbieten. Bei der Betriebsorganisation ist die optimale Verwendung der verfügbaren Mittel (Personal, Maschinen, technische Grundlagen, Statistiken usw.) zu berücksichtigen. Auch die Frage, was für Arbeiten parallel zur Reserverechnung ausgeführt werden können oder müssen, ist von entscheidender Bedeutung. Derart zeitraubende und entsprechend kostspielige Untersuchungen lohnen sich vielleicht in Grossbetrieben. Indem sich andererseits allgemeine Angaben über den Arbeitsaufwand nur in geringem Masse geben lassen, sind der praktischen Anwendbarkeit des Modells Grenzen gesetzt: Im allgemeinen werden sich nur Teilprobleme lösen lassen, indem verwandte Methoden, deren Unterschied im Arbeitsaufwand leicht zu überblicken ist, in die Untersuchung einbezogen werden.

In diesem Sinne wollen wir einige charakteristische Gesichtspunkte hervorheben. Dabei basieren wir im wesentlichen auf der speziellen, heute aber vielfach zutreffenden Annahme, eine Lochkartenanlage sei vorhanden, nicht aber ein grösseres elektronisches Rechengerät, und berücksichtigen in erster Linie Methoden, die sich teilweise automatisch durchführen lassen.

Wir unterscheiden zwischen *a) periodischen Arbeiten,* wie Summenbildungen, Multiplikationen mit technischen Werten, die mit Vorteil automatisch durchgeführt werden, sobald sie grösseren Umfang annehmen, *b)* Arbeiten, die *einmal für jede Police* durchzuführen sind, wie Hilfszahlbestimmungen, und die im allgemeinen zweckmässig von Hand erledigt werden, und schliesslich *c)* Arbeiten, die nur *einmal für den ganzen Bestand* auszuführen sind, wie die Erstellung von Tabellenwerken, und für die sich meistens ein Auftrag an ein Rechenzentrum mit Elektronenrechner lohnt.

Folgende *Operationstypen* kommen hauptsächlich vor: Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division, Lesen von Tabellen und evtl. Interpolation. Die Addition/Subtraktion benötigt den geringsten Zeitaufwand und lässt sich gut automatisch durchführen. Multiplikation und Division erfordern ein Mehrfaches an Zeit und lassen sich nur bedingt automatisch durchführen. Das Ablesen von Tabellen ist relativ zeitraubend, sobald die Tabellen grösseren Umfang annehmen (2 oder 3 Argumente). Dies gilt noch vermehrt bei den Interpolationen. Beide Operationen sind im allgemeinen nur auf Elektronenrechnern automatisch durchführbar.

Gestützt auf diese Überlegungen folgern wir – vom erwähnten Standpunkt aus –, dass Gruppierungen relativ unvorteilhaft sind, weil sie umfangreiche Tabellenwerke und viele Multiplikationen bei den periodischen Arbeiten erfordern. Die Zahl der Multiplikationen wächst exponentiell mit der Anzahl der Gruppierungsargumente. Die Gruppierungsarbeit selbst ist von geringer Bedeutung, da sie ja nur für das Argument n-t periodisch vorzunehmen ist und eine automatische Durchführung erlaubt. Sie ist aber z. B. bei einem Vergleich der Z- und t-Methode zu berücksichtigen. Am geeignetsten für den Rechenaufwand sind gruppierungsfreie Hilfszahlmethoden, die eine einfache Berechnung der Reserve aus den Hilfszahltotalen erlauben. Die Hilfszahltotale lassen sich parallel aufsummieren. Der Menge der zu verwendenden Hilfszahlen sind indessen Grenzen gesetzt, z. B. durch die Kapazität der Lochkarten. Aus diesem Grunde sind Hilfszahlen von Vorteil, die auch für andere Zwecke verwendbar sind. Hier steht neben der Versicherungssumme als trivialer Hilfszahl die Prämie an erster Stelle; sie wird daher auch in den meisten Methoden verwendet.

212 Der Schaden durch Schätzfehler

Ein wirtschaftlicher, in Geldwert ausdrückbarer Schaden, der dem Versicherer durch das Einstellen einer falschen Reserve erwächst, lässt sich wohl kaum in befriedigender Weise angeben. Dies rührt wohl davon her, dass der Versicherungsbetrieb von Natur aus so eingerichtet ist, dass Schwankungen sich möglichst gering auswirken.

Aus diesem Grunde lässt sich die Einführung eines hypothetischen Schadens vertreten, z. B. in der Form einer verallgemeinerten Fehlerfunktion. Für ein Beispiel verweisen wir auf 43. Er muss um so grösser werden, je weiter der Schätzwert vom richtigen Wert entfernt ist, was uns auf folgende Darstellung führt:

$$A(V,W) = \begin{cases} A_1(V,W) & [V < W] \\ A_2(V) & [V = W] \\ A_3(V,W) & [V > W], \end{cases} \tag{2.1}$$

wobei $A(V,W) \geqq 0, \quad \dfrac{\partial A_1}{\partial v} < 0, \quad \dfrac{\partial A_1}{\partial w} > 0, \quad \dfrac{\partial A_3}{\partial v} > 0, \quad \dfrac{\partial A_3}{\partial w} < 0,$

und meistens auch $A_1(V,V) = A_2(V) = A_3(V,V)$

Zu diesem Ansatz ist aber zu bemerken, dass der wahre Reservewert im Sinne eines Barwertes der zukünftigen Verpflichtungen gar nicht feststellbar ist, da auch nachträglich nur Mittelwerte über den Verlauf der Tarifparameter bestimmt werden können. Beschränkt man sich hingegen auf die klassische Reserveapproximation mit fest vorgegebenen Tarifparametern, so ist der richtige Reservewert in diesem Sinne schon zur Zeit der Reserverechnung bestimmt.

213 Gesamtkosten

Die Zusammensetzung der beiden Kostenkomponenten ist trivial, wenn beide in Geldeinheiten ausgedrückt werden können. Ist dies nun aber für die zweite Komponente nicht der Fall, so müssen die beiden Teile vorerst in das richtige Verhältnis zueinander gebracht werden. Theoretisch möglich, praktisch aber nicht zweckmässig, ist allerdings die Darstellung durch eine vektorielle Schadenfunktion, deren Minimum auf Grund von Teilordnungsrelationen bestimmt wird.

Da auch die erste Komponente meistens auf vereinfachenden Annahmen beruht, wird mit Vorteil diese so transformiert, dass sie zur zweiten addiert werden kann. Diese Schematisierungen haben zur Folge, dass sich nur wenige Methoden zuverlässig miteinander vergleichen lassen; in erster Linie sind es Methoden mit ungefähr demselben Arbeitsaufwand oder Methoden einer eng begrenzten Klasse.

22 Informationen

Je schwächer ein Vergleichskriterium ist, um so wichtiger ist es, dass nur wenige Elemente verglichen werden müssen. Die Unsicherheit in der Konstruktion einer Schadenfunktion unterstreicht daher die Bedeutung der Informationen. Diese geben M Anhaltspunkte über das Verhalten seines Gegners N und verkleinern damit, von M aus, den Strategienraum von N. Damit wird der maximale Schaden, den M erleiden kann, durch Reduktion der Schätzfehler-Komponente im allgemeinen verkleinert. Ohne Schaden kann aber meistens auch M seinen Strategienraum auf Grund der Informationen verkleinern (siehe 231).

221 Möglichkeiten der Informationsgewinnung

Wir unterscheiden zwischen einmaligen und periodischen Informationen. Die *einmaligen* bestehen z. B. in festen Annahmen über die

Tarifparameter, welche durch die Erfahrungen geliefert werden, und in allfälligen Gesetzmässigkeiten im Bestand (Altersgrenzen, bestimmte Versicherungsdauern usw.). Ihre Gewinnung ist in einer Schätzmethode G (vgl. 132) nicht enthalten. G setzt diese Information voraus und wird zum Teil gestützt auf diese ausgewählt. *Periodische Informationen* beziehen sich auf zeitlich veränderliche Angaben, d.h. in erster Linie auf die Summenverteilung. Sie werden durch die Methoden g_1 ermittelt und setzen den konkreten Schätzwert W fest.

Die Behandlung der Angaben über Tarifparameter als einmalige Information stützt sich auf die klassische Berechnungsmethode der Reserven, welche es gestattet, die optimale Bestimmung der Rechnungsgrundlagen als Spezialproblem abzutrennen. Diese beruht auf Angaben über den bisherigen Verlauf bezüglich Grösse und Trend. Als Beispiel einer spieltheoretisch optimalen Bestimmung von Sterblichkeiten erwähnen wir [13]. Indem diese Tarifparameter in Wirklichkeit aber doch zeitlich variabel sind, müssen sie durch periodische Informationen überprüft werden. Eine nachträgliche Änderung ist allerdings mit grossem Kostenaufwand verbunden, der nur in Ausnahmefällen, wenn wirklich grosse Schätzfehler zu erwarten sind, vertretbar ist.

Nach der Abtrennung des Tarifproblems benötigen wir als Information nur noch Angaben über die Summenverteilung und können mit entsprechendem Aufwand die Reserve beliebig genau ermitteln. Damit wird die Einführung einer symbolischen Schadenfunktion für den Schätzfehler gemäss 212 erleichtert. Neben einer vollständig konstruierten Summenverteilung und allfälligen Hilfsverteilungen, deren Auswertung gemäss (1.1) resp. (1.2) grossen Aufwand erfordert, kommen als Information implizite oder explizite Mittelwerte für die Parameter in Frage, die wir nach folgenden Prinzipien gewinnen können:

a) *Stichproben* [18]: Die mittleren Parameter der Summenverteilung bestimmen sich aus den Reserven von Stichproben, deren optimaler Umfang sich durch Abwägen des Schätzfehlers und der Kosten ergibt, im Sinne eines Spezialproblems einer optimalen Methodenwahl.

b) *Momente einer Hilfsverteilung:* Durch passende Approximation der Reservefunktion ist eine Hilfsverteilung zu konstruieren, aus deren Momente sich die mittleren Parameter der Summenverteilung implizite in der Form eines mittleren Reservefaktors ergeben.

Damit ergeben sich Klassen einfach überblickbarer Methoden. Als Beispiel zitieren wir die Untersuchungen *Bierleins* zur *F*-Methode [2].

c) Mittelwerte mehrerer Hilfsverteilungen: Jedes Hilfszahlentotal ergibt durch Division mit der totalen Versicherungssumme eine mittlere Hilfszahl mit impliziten mittleren Parametern, gestützt auf welche sich ein mittlerer Reservefaktor angeben lässt. Diese Methode der Informationsgewinnung ist die gebräuchlichste.

222 Verarbeitung und Beurteilung der Information

Die Verarbeitung der Information geschieht durch die Methode g_2, die auf Grund der Kostenfunktion ausgewählt wird. Sie ordnet jeder Information einen konkreten Reservewert W zu, im allgemeinen durch Bestimmung des mittleren Reservefaktors f^*, der den gemäss 221 erhaltenen mittleren Parametern entspricht. Dabei werden Schätzfehler verursacht, die nicht durchwegs überblickbar sind, und die damit auch das Auswahlprinzip in Frage stellen. Hier sollte nun folgendes beachtet werden:

Die Beschränkung der Strategienmenge von N durch Informationen hat im allgemeinen eine Verkleinerung des Intervalls der zulässigen wahren Reservewerte zur Folge. Jede Information liefert also eine obere und eine untere Schranke für den wahren Reservewert. Je enger diese Schranken liegen, um so kleiner wird die Schadenerwartung für M. M wird daher solche Methoden zur Informationsgewinnung bevorzugen, die ihm möglichst enge Schranken für den wahren Reservewert liefern. Dann hat er trotz unsicherer Schadenfunktion eine Garantie, dass der Schaden in bestimmten Grenzen liegt.

Auf Grund der errechneten Schranken $\underline{V}$ und $\overline{V}$ für den wahren Reservewert werden wir eine Information auch beurteilen. Wir wählen als Mass den maximalen relativen Fehler, der durch die Wahl des arithmetischen Mittels der beiden Schranken begangen wird. Dabei müssen wir uns auf den Näherungswert beziehen, da der richtige Wert ja nicht bekannt ist. Wir definieren somit als *Standardfehler:*

$$\varrho = \frac{\overline{V} - \underline{V}}{\overline{V} + \underline{V}} \,. \tag{2.2}$$

23 Strategien

Bevor wir die Folgerungen aus den bisherigen Entwicklungen auf die Strategienwahl ziehen, sind noch zwei technische Begriffe zu erläutern:

231 Qualifizierte Strategien

M kann seine Strategien nach ihrer Leistungsfähigkeit wie folgt gliedern: Eine Strategie G_1 heisst besser als eine Strategie G_2, wenn sie unabhängig von $\boldsymbol{\omega}$ kleinere Auszahlungen garantiert, d.h. wenn $A(\boldsymbol{\omega}, G_1) \leqq A(\boldsymbol{\omega}, G_2)$ für alle $\boldsymbol{\omega}$. Eine Strategie G nennen wir eine qualifizierte Strategie, wenn es keine bessere Strategie gibt (höchstens gleich gute). Es lässt sich leicht einsehen, dass es genügt, wenn M sich auf die Anwendung qualifizierter Strategien beschränkt. Indem durch Informationen die Vergleichbarkeit verschiedener Strategien gefördert wird, wird damit im allgemeinen auch die Zahl der qualifizierten Strategien von M verkleinert.

Als Beispiel betrachten wir das reine Schätzproblem, das von der Kostenfunktion absieht. Als Informationen seien die obere und untere Schranke des möglichen Reservewertes V gegeben: $\underline{V} \leqq V \leqq \overline{V}$. Qualifizierte Strategien von M sind nur diejenigen Schätzwerte, welche innerhalb des vorgegebenen Intervalls liegen, d.h. für welche gilt: $\underline{V} \leqq W \leqq \overline{V}$.

232 Reine und gemischte Strategien

Reine Strategien liefern einen bestimmten Reservewert resp. eine bestimmte Methode, während gemischte Strategien Verteilungsfunktionen über einer endlichen oder unendlichen Zahl von reinen Strategien liefern. Gemischte Strategien sind bei Spielen von Bedeutung, die mehrmals durchgeführt werden, weil sie das Verhalten eines Partners seinem Gegner verschleiern können. Eine Lösung des Spiels ist oft nur durch gemischte Strategien möglich.

Indem die Schätzung einer Reserve ein einmaliges Problem ist, und eine Verwendung verschiedener Methoden im Verlaufe der Jahre auch nicht in Frage kommt, sind Spiele mit reinen optimalen Strategien für M anzustreben. Anders liegen die Verhältnisse bei N. Hier sind gemischte optimale Strategien sogar erwünscht, weil N ja kein zielbewusstes Handeln zugemutet werden kann.

233 Optimale Strategien

Gestützt auf die Darlegungen dieses Kapitels gehen wir zum Auffinden einer optimalen Methode zweckmässig wie folgt vor:

Wir betrachten Klassen von Methoden mit ungefähr demselben Arbeitsaufwand oder mit einem Arbeitsaufwand, der sich leicht überblicken lässt. Aus diesen wählen wir diejenigen Methoden aus, die die engsten Schranken liefern und vergleichen sie anschliessend mit den optimalen Elementen anderer Klassen. Sehen wir vom Arbeitsaufwand ab, stellen sich damit für eine spieltheoretische Reservebestimmung zwei Probleme, die Bestimmung von Schranken und die Festlegung optimaler Mittelwerte bei vorgegebenen Schranken. Zur Lösung dieser Fragen sollen die beiden folgenden Kapitel beitragen.

3 Abschätzungen mit Hilfe der linearen Programmierung

Die Bestimmung von Schranken für die Reserve bei vorgegebenen Hilfszahltotalen lässt sich als Problem der linearen Programmierung darstellen, indem sowohl Hilfszahlen wie Reserve in der Unbekannten, der Summenverteilung linear sind. Zur praktischen Reserverechnung wird sich diese Methode zwar kaum eignen, erfordert sie doch auch mit einem elektronischen Rechengerät einen relativ grossen Zeitaufwand, wenn eine brauchbare Genauigkeit erreicht werden soll. Hingegen wirkt sie klärend in der Beurteilung der Wirksamkeit von Hilfszahlen. Wir beschränken uns auf die Reserve einer t-Gruppe gemischter Versicherungen; dies bedeutet gegenüber den Untersuchungen in [1] und [6] eine Erweiterung in dem Sinne, als sich die Hilfszahltotale nun über 2 freie Parameter erstrecken.

31 Theoretischer Abriss

In diesem Abschnitt stellen wir die Hilfsmittel zusammen, die für das Verständnis des folgenden erforderlich sind. Für Beweise und nähere Ausführungen verweisen wir z. B. auf [7, 9, 16].

311 Problemtypen

Eine mögliche Formulierung des Problems der linearen Programmierung lautet:

Gesucht werden n *nichtnegative Variable*, die ein System von m linearen *Gleichungen* erfüllen und eine lineare Funktion *(Zielfunktion) maximieren.*

d.h. $$z = \sum_j c_j y_j = \max \quad \text{resp.} \quad z = \mathbf{c}' \mathbf{y} = \max, \tag{3.1a}$$

mit $$\sum_j a_{ij} y_j = b_i \qquad \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \tag{3.1b}$$

$$y_j \geqq 0 \qquad \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \tag{3.1c}$$

wobei $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $m < n$.

Verschiedene *verwandte Probleme* lassen sich auf dieses System wie folgt zurückführen:

a) Die Zielfunktion soll *minimiert* werden: $z = \min$ ist äquivalent mit $-z = \max$. Durch Umkehren der Vorzeichen der c_j erhalten wir wiederum das System (3.1).

b) An die Stelle von Gleichungen (3.1b) treten *Ungleichungen:* Ungleichungen lassen sich durch die Einführung einer neuen positiven Unbekannten (Schlupfvariable) in Gleichungen überführen:

$$\sum_j a_{ij} y_j \leqq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} y_j + y_{n+i} = b_i,$$
$$\sum_j a_{ij} y_j \geqq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} y_j - y_{n+i} = b_i,$$
$$\text{mit } c_{n+i} = 0.$$

c) Einzelne oder alle Unbekannten können *positiv oder negativ* sein: Jede Unbekannte mit freiem Vorzeichen lässt sich als Differenz zweier positiver Unbekannten darstellen.

312 Sätze über Lösungen

Als *zulässige Lösung* bezeichnen wir einen Vektor $\mathbf{y}$, der die Bedingungen (3.1b) und (3.1c) erfüllt, als *Basislösung* eine zulässige Lösung mit höchstens m positiven Komponenten, wobei m die Anzahl der Gleichungen (3.1b) bedeutet. Diese positiven Komponenten der Lösung nennen wir *Basisvariablen.* Ist ihre Zahl kleiner als m, heisst die Lösung *degeneriert.*

Die Menge der zulässigen Lösungen ist konvex, d.h. mit $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist auch ihre konvexe Kombination $\alpha \mathbf{x} + (1-\alpha) \mathbf{y} [0 \leqq \alpha \leqq 1]$ eine zulässige Lösung. Die Eckpunkte der konvexen Menge, d.h. Punkte,

die sich nicht als konvexe Kombination zweier anderer darstellen lassen, sind identisch mit den Basislösungen. Das Extremum der Zielfunktion wird immer in einem Eckpunkt, d.h. durch eine Basislösung angenommen. Ist die optimale Lösung nicht eindeutig, d.h. wird das Extremum durch mehrere Basislösungen angenommen, so existieren ∞ viele Lösungen, indem jede konvexe Kombination von optimalen Basislösungen auch optimal ist. Daraus folgt:

a) Falls zulässige Lösungen existieren, d.h. falls das System (3.1b/c) keinen Widerspruch aufweist, existiert eine optimale Lösung. Sie kann nichtendlich sein, wenn die Menge der zulässigen Lösungen nicht beschränkt ist.

b) Zur vollständigen Lösung des Problems genügt es, alle optimalen Basislösungen zu suchen.

313 Lösungsmethoden

Die gebräuchlichste Lösungsmethode ist die Simplexmethode von *Dantzig*, die in einer systematischen Untersuchung aller Basislösungen besteht. Sie geht aus von einer Basislösung und tauscht schrittweise eine Basisvariable durch eine neue aus in der Weise, dass

a) die Zielfunktion verbessert wird,

b) keine Variable negativ wird.

Die erste Bedingung bestimmt die neue Basisvariable, die zweite die aus der Basis ausscheidende Variable. Für die konkrete Auswertung dieses Prinzips existieren verschiedene Algorithmen, auf die hier nicht eingegangen werden muss. Einfache Beispiele lassen sich auch graphisch lösen (vgl. [1, 6]). Diese Methode eignet sich aber in erster Linie für Überschlagsrechnungen.

314 Geometrische Interpretation

Wir beschränken uns dazu auf das System (3.1). Für die aufgeführten Varianten ist die Interpretation sinngemäss zu modifizieren. Nach (3.1c) liegen die zulässigen Lösungen im n-dimensionalen positiven Hyperoktanten. Jede Gleichung (3.1b) bestimmt eine $(n-1)$-dimensionale Ebene. Die Menge der zulässigen Lösungen ist somit der Durchschnitt von m Hyperebenen mit dem positiven Hyperoktanten, also

ein $(n-m)$-dimensionales konvexes Polyeder. Die Zielfunktion liefert eine Schar paralleler Hyperebenen, von denen diejenige gesucht wird, welche noch mindestens einen Punkt mit dem Polyeder der zulässigen Lösungen gemeinsam hat und den grössten Scharparameter aufweist. Im allgemeinen wird die extremale Ebene das Polyeder in einem Eckpunkt berühren; falls aber eine Kante oder eine Fläche des Polyeders zur Zielfunktion parallel verläuft, erhalten wir ∞ viele Berührungspunkte und somit ∞ viele Lösungen.

315 Das Dualproblem

Zu jedem linearen Programm existiert ein duales, welches dasselbe Extremum liefert. Wir unterscheiden dabei zwischen dem symmetrischen und dem unsymmetrischen Dualproblem:

a) Symmetrisches Dualproblem:

Primärproblem	Dualproblem
$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \max$	$\mathbf{b}'\mathbf{w} = \min$
$\mathbf{A}\mathbf{y} \leqq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}'\mathbf{w} \geqq \mathbf{c}$
$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$

b) Unsymmetrisches Dualproblem:

Primärproblem	Dualproblem
$\mathbf{c}'\mathbf{y} = \max$	$\mathbf{b}'\mathbf{w} = \min$
$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$	$\mathbf{A}'\mathbf{w} \geqq \mathbf{c}$
$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$	

Das unsymmetrische Dualproblem unterscheidet sich also vom symmetrischen durch das Auftreten von Gleichungen im Primärproblem und das freie Vorzeichen der dualen Variabeln. Die beiden Probleme lassen sich mit Hilfe der Transformationsregeln in 311 ineinander überführen, wenn man beachtet, dass die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ aus zwei Ungleichungen $\mathbf{A}\mathbf{y} \leqq \mathbf{b}$ und $\mathbf{A}\mathbf{y} \geqq \mathbf{b}$ entsteht. Im übrigen ist es natürlich bedeutungslos, welches der beiden Probleme als primäres resp. duales bezeichnet wird. Auf dem zentralen Satz über das Dualproblem, wonach die Extrema von Primär- und Dualproblem sich gleich sind, beruht die Verwandtschaft der linearen Programmierung mit der Spieltheorie.

Die Betrachtung des Dualproblems ist bei vielen Problemen deshalb von Bedeutung, weil die dualen Variabeln oft eine ganz konkrete Deutung zulassen. Daneben bietet die Transformation auf das Dualproblem gelegentlich auch technische Vorteile, indem die Lösbarkeit auf elektronischen Rechenanlagen von gewissen Kapazitätsbedingungen abhängig ist.

32 Anwendung auf die Schätzung von Reserven

321 Problemstellung

Die Reserve einer t-Gruppe gemischter Versicherungen bestimmt sich zu $V = \sum_j f_j y_j$, wenn wir mit $f_j = f(x,t,n) = {}_tV_{x\overline{n}|}$ die Reservefaktoren und mit $y_j = s(x,t,n)$ die Versicherungssumme für eine bestimmte Parameterkombination bezeichnen. Über die Summenverteilung $S(x,n,t)$ sollen als Information lediglich die Hilfszahltotale $H_i = \sum_j h_{ij} y_j$ $(i = 1, \ldots, m)$ vorliegen. Gesucht sind die Schranken $\underline{V}$ und $\overline{V}$, innerhalb derer der Reservewert V liegen muss. Wir haben daher die beiden Summenverteilungen zu bestimmen, welche mit den gegebenen Hilfszahltotalen verträglich sind und extremale Reserven ergeben; d.h. wir bestimmen y_j $(j = 1, \ldots, n)$ so, dass

a) Maximale Reserve	*b) Minimale Reserve*	
$\overline{V} = \sum_j f_j y_j = \max$	$\underline{V} = \sum_j f_j y_j = \min$	
$\sum_j h_{ij} y_j = H_i$	$\sum_j h_{ij} y_j = H_i$	(3.2)
$y_j \geqq 0$	$y_j \geqq 0$	

Dabei erstreckt sich die Summation von $j = 1, \ldots, n$ über alle möglichen Kombinationen von x und n.

Falls sämtliche Hilfszahlen positiv sind, was im allgemeinen der Fall ist, und wir in der Folge voraussetzen wollen, sind sämtliche Koeffizienten des Systems (3.2) positiv; sowohl Zielfunktion wie Bedingungsgleichungen stellen $(n-1)$-dimensionale Hyperebenen mit positiven Achsenabschnitten dar. Da die rechten Seiten der Bedingungen, H_i, auf einer konkreten, uns unbekannten Lösung basieren, ist die Verträglichkeit des Systems garantiert; indem sämtliche Koeffizienten positiv sind, sind die Extrema endlich.

322 Die Beurteilung einzelner Gleichungen

Als Information über die Summenverteilung, d.h. die Variabeln y_j, liege lediglich ein Hilfszahlentotal vor, z.B. die totale Versicherungssumme der ganzen t-Gruppe oder das Prämientotal.

Die Systeme (3.2) reduzieren sich damit auf

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \sum_j f_j y_j = \max & \underline{V} &= \sum_j f_j y_j = \min \\ \sum_j h_j y_j &= H & \sum_j h_j y_j &= H \\ y_j &\geqq 0 & y_j &\geqq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Entsprechend den Ausführungen in 312 wird das Optimum durch eine Basislösung angenommen, die dadurch entsteht, dass eine einzige Variable von null verschieden angenommen wird. Mit $y_j = \frac{H}{h_j}$ bestimmen sich damit die Extrema wie folgt:

$$\overline{V} = \frac{f_\lambda}{h_\lambda} H, \qquad \text{mit } \frac{f_\lambda}{h_\lambda} = \max_j \frac{f_j}{h_j};$$

$$\underline{V} = \frac{f_\mu}{h_\mu} H, \qquad \text{mit } \frac{f_\mu}{h_\mu} = \min_j \frac{f_j}{h_j}.$$

Massgebend für die Güte einer einzelnen Gleichung ist damit die Variationsbreite des Koeffizienten $\frac{f_j}{h_j}$. Der Standardfehler (2.2) bestimmt sich zu

$$\varrho = \frac{\frac{f_\lambda}{h_\lambda} - \frac{f_\mu}{h_\mu}}{\frac{f_\lambda}{h_\lambda} + \frac{f_\mu}{h_\mu}}$$

und ist von H unabhängig, d.h. derselbe für jede konkrete Summenverteilung.

Die erhaltene Lösung wollen wir noch geometrisch interpretieren: Dazu transformieren wir: $y_j = \frac{u_j}{f_j}$, womit (3.3) übergeht in

$$\overline{V} = \sum_j u_j = \max \qquad \underline{V} = \sum_j u_j = \min \tag{3.4a}$$

$$\sum_j \frac{h_j}{f_j} u_j = H \qquad \sum_j \frac{h_j}{f_j} u_j = H \tag{3.4b}$$

$$u_j \geqq 0 \qquad u_j \geqq 0$$

(3.4b) stellt eine Hyperebene mit den Achsenabschnitten $H \frac{f_j}{h_j}$ dar, (3.4a) eine Hyperebene mit unter sich gleichen Achsenabschnitten, deren extreme Lagen so gesucht werden, dass sie mit der Ebene (3.4b) im positiven Hyperoktanten noch gemeinsame Punkte aufweist, und dass ihr Scharparameter maximal resp. minimal gemacht wird. Die extremalen Berührungspunkte der beiden Ebenen sind offenbar die Achsenpunkte der Ebene (3.4b) mit dem grössten resp. kleinsten Abstand vom Ursprung.

323 Kombination mehrerer Gleichungen

Jede neue, von den übrigen unabhängige Gleichung verkleinert das Maximum und vergrössert das Minimum, indem der Raum der zulässigen Lösungen durch jede Gleichung um eine Dimension verkleinert wird. Somit liefert jede neue Hilfszahl brauchbare Informationen, sofern sie von den übrigen linear unabhängig ist.

Zur Untersuchung der Lösungen transformieren wir das System (3.2) wie folgt: Wir führen eine zusätzliche Unbekannte y_{n+1} ein, welche dem Wert der Zielfunktion entspricht. Die neue Zielfunktion enthält dann nur noch eine Variable und die Bedingungsgleichungen vermehren sich um die Bestimmungsgleichung für y_{n+1}. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \text{extr.} \qquad \text{resp.} \qquad & y_{n+1} &= \text{extr.} \\ \sum_j f_j\, y_j - y_{n+1} &= 0 & \mathbf{K}\mathbf{y} &= \mathbf{k} \\ \sum_j h_{ij}\, y_j &= H_i\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Die Matrix $\mathbf{K}$ entsteht aus der Matrix $\|h_{ij}\|$ durch Anfügen einer Zeile $(f_1, \ldots, f_n)$ und einer Spalte $(-1, 0, \ldots, 0)$, und $\mathbf{k} = (0, H_1, \ldots, H_n)$.

Die Extremallösung hat die Form: $(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_m}, 0, \ldots, 0, y_{n+1})$. Als *Basismatrix* bezeichnen wir die quadratische Matrix $\mathbf{K}_\lambda$, bestehend aus den zu den Basisvariabeln gehörenden Spalten von $\mathbf{K}$. Der Lösungsvektor bestimmt sich dann zu

$$\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{K}_\lambda^{-1}\, \mathbf{k}\,. \tag{3.6}$$

Die ersten m Komponenten davon ergeben die gesuchten Basisvariabeln der Summenverteilung, und die letzte das Extremum.

Unter Berücksichtigung der Berechnungsregel für die Elemente einer inversen Matrix ergeben sich die Unbekannten der Summenverteilung zu

$$y_{\lambda_j} = \frac{\det \begin{vmatrix} f_{\lambda_1} & \dots & 0 & \dots & f_{\lambda_m} & -1 \\ h_{1\lambda_1} & \dots & H_1 & \dots & h_{1\lambda_m} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m\lambda_1} & \dots & H_m & \dots & h_{m\lambda_m} & 0 \end{vmatrix}}{(-1)^{m+3} \det |h_{i\lambda_i}|} \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{3.7a}$$

und das Extremum

$$y_{n+1} = y_{\lambda_{m+1}} = \frac{\det \begin{vmatrix} f_{\lambda_1} & \dots & f_{\lambda_m} & 0 \\ h_{1\lambda_1} & \dots & h_{1\lambda_m} & H_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m\lambda_1} & \dots & h_{m\lambda_m} & H_m \end{vmatrix}}{(-1)^{m+3} \det |h_{i\lambda_i}|}. \tag{3.7b}$$

Dasselbe ergibt sich aus (3.5) durch Anwendung der Cramerschen Regel.

Bestimmend für die Güte eines Hilfszahlsystems ist daher die Variationsbreite des Ausdrucks (3.7b), wobei alle Kombinationen von m der n Spalten von $\|h_{ij}\|$ zu berücksichtigen sind, die positive Werte für die Variabeln ergeben. Es sind deren maximal $\binom{n}{m}$.

Relativ einfach überblickbar sind die Verhältnisse noch im Fall $n = 2$, d.h. wenn zwei Hilfszahltotale vorliegen:

Zur Vereinfachung setzen wir

$$h_{1j} = a_j, \quad h_{2j} = b_j, \quad H_1 = A, \quad H_2 = B.$$

Das Maximum werde durch die Basisvariabeln y_ξ und y_λ angenommen, das Minimum durch y_μ und y_ν. Nach (3.7b) erhalten wir für das Maximum

$$\overline{V} = \frac{\det \begin{vmatrix} f_\xi & f_\lambda & 0 \\ a_\xi & a_\lambda & A \\ b_\xi & b_\lambda & B \end{vmatrix}}{-\det \begin{vmatrix} a_\xi & a_\lambda \\ b_\xi & b_\lambda \end{vmatrix}} = \frac{A(f_\lambda b_\xi - f_\xi b_\lambda) + B(f_\xi a_\lambda - f_\lambda a_\xi)}{(a_\lambda b_\xi - b_\lambda a_\xi)}$$

oder

$$\overline{V} = A \frac{\dfrac{f_\lambda}{b_\lambda} - \dfrac{f_\xi}{b_\xi}}{\dfrac{a_\lambda}{b_\lambda} - \dfrac{a_\xi}{b_\xi}} + B \frac{\dfrac{f_\xi}{a_\xi} - \dfrac{f_\lambda}{a_\lambda}}{\dfrac{b_\xi}{a_\xi} - \dfrac{b_\lambda}{a_\lambda}} \tag{3.8a}$$

und analog

$$\underline{V} = A \frac{\dfrac{f_\nu}{b_\nu} - \dfrac{f_\mu}{b_\mu}}{\dfrac{a_\nu}{b_\nu} - \dfrac{a_\mu}{b_\mu}} + B \frac{\dfrac{f_\mu}{a_\mu} - \dfrac{f_\nu}{a_\nu}}{\dfrac{b_\mu}{a_\mu} - \dfrac{b_\nu}{a_\nu}} . \tag{3.8b}$$

Die Koeffizienten von A und B können positiv oder negativ sein. Sie entsprechen den dualen Variabeln (siehe 326).

324 Zur Wahl von Hilfszahlen

Für die Wahl wirksamer Hilfszahlen sind die Darlegungen in 322 zuständig: Der Quotient $\frac{f_j}{h_j}$ soll eine möglichst kleine Variationsbreite aufweisen. So kann man sich z. B. anhand einer Graphik *(Fig. 2)*, oder durch numerische Beispiele (Tab. 1) leicht überzeugen, dass $P_{\overline{xn}|}$ eine relativ gute Hilfszahl ist, c^x hingegen eine relativ schlechte.

Aus (3.7b) lässt sich folgern, dass bei der Kombination mehrerer Hilfszahlen die Abschätzung um so besser wird, je besser die einzelnen Hilfszahlen abschätzen. Die Verbesserung durch Hinzuziehen einer neuen Gleichung ist hingegen relativ gering, wenn die Quotienten $\frac{h_{ij}}{h_{kj}}$ zweier Gleichungen eine kleine Variationsbreite aufweisen, weil dann beide Gleichungen ungefähr dieselbe Information liefern.

Bei der Wahl eines Hilfszahlsystems ist zu beachten, dass dasselbe System für alle Parameter t gute Abschätzungen geben sollte. Indem die Reservefaktoren f_j sich mit der Zeit verändern, die Hilfszahlen aber nicht, verändern sich auch die Variationsbreiten der entsprechenden Quotienten.

Ein günstiges Hilfszahlsystem ist daher z. B. ein System mit $h_i = {}_{t_i}V_{\overline{xn}|}$. Dieses liefert für $t = t_i$ eine genaue Reserve und für die übrigen t hinreichend enge Schranken, wenn die Intervalle für t_i nicht zu gross gewählt werden. Dabei muss für $t_i > n$ der Reservefaktor extrapoliert werden, damit in den Quotienten $\frac{f_j}{h_j}$ keine Sprungstelle

auftritt, welche die Variationsbreite vergrössern würde. Für die Extrapolation gilt die Formel:

$$ {}_tV_{x\overline{n}|} = 1 + \frac{\ddot{a}_{x+n:\overline{t-n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}\, {}_{t-n}E_{x+n}}, \qquad (t > n). $$

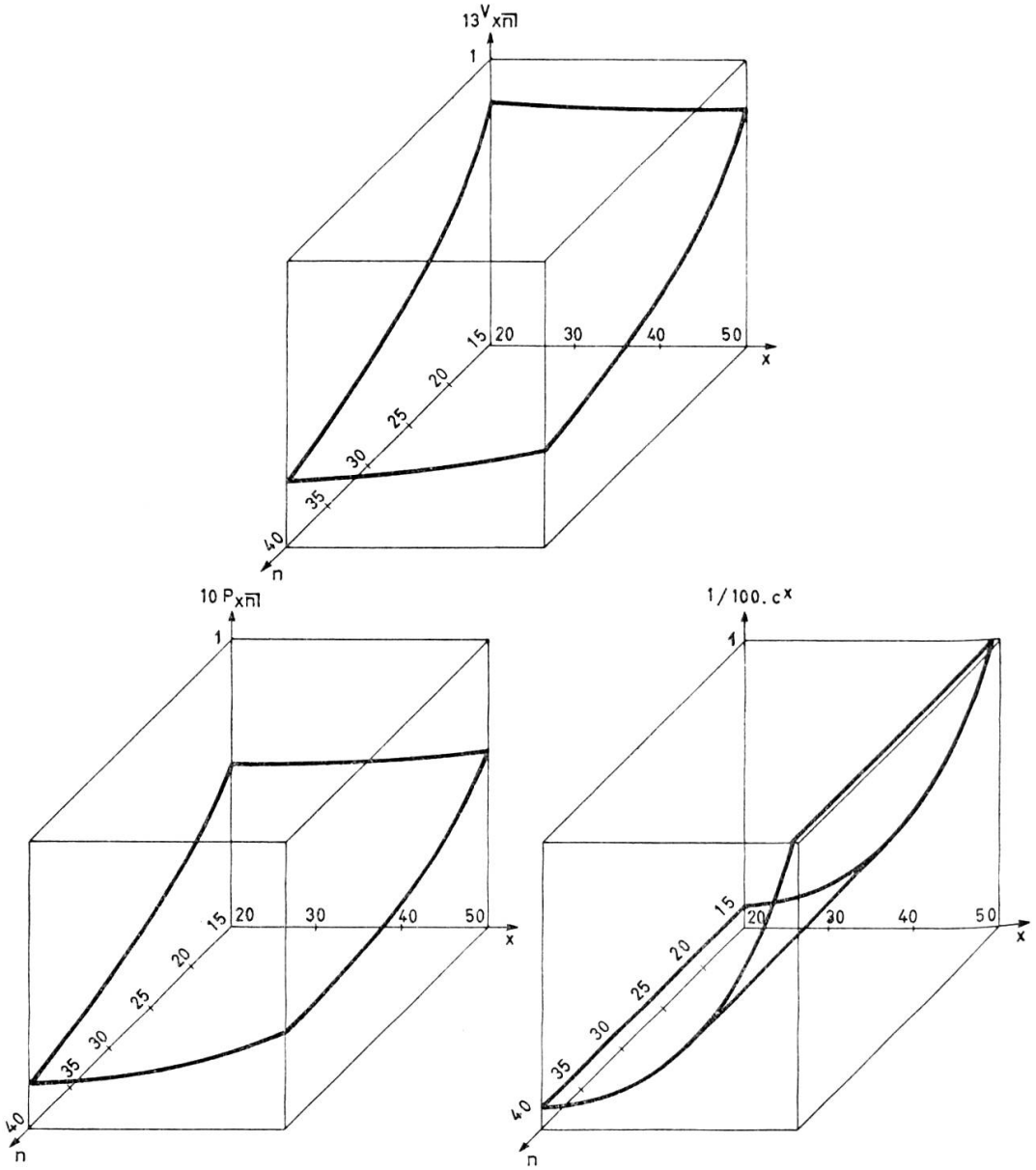

Fig. 2

325 Numerische Beispiele

Zur Illustration unserer Darlegungen wurden einige numerische Beispiele auf Grund eines konkreten Testbestandes durchgerechnet.

Die Berechnungen basieren auf einer Gruppe von 239 Policen, die sich auf 90 (x,n)-Kombinationen aufteilen, und deren bisher verflossene Laufzeit t 13 Jahre beträgt. Sie weisen eine totale Versicherungssumme von Fr. 1465144 auf. Gestützt auf die Sterbetafel SM 1948/53 mit $i = 0{,}025$ ergibt sich eine *wahre Reserve* von *Fr. 608 123.*

Für die Auswertungen mit Hilfe der linearen Programmierung wurden sämtliche (x,n)-Kombinationen berücksichtigt, welche den Bedingungen genügen:

$$20 \leqq x \leqq 50, \quad 15 \leqq n \leqq 40, \quad x + n \leqq 70.$$

Dies ergab Systeme mit 596 Variabeln.

Die Berechnungen erfolgten in Vielfachen von Fr. 1000; die einzugebenden Daten mussten auf 5 signifikante Stellen gerundet werden.

Tabelle 1 gibt eine Übersicht über die Wirksamkeit einzelner Hilfszahlentotale. Als Hilfszahlen wurden Funktionen von x und n verwendet, die bei bekannten Reserveverfahren zur Anwendung gelangen, oder die in anderem Zusammenhang in der Versicherungsmathematik von Bedeutung sind. Neben den beiden Schranken $\underline{V}$ und $\overline{V}$ führen wir ihr arithmetisches Mittel V^* (je in 1000.—), den Standardfehler ϱ nach (2.2) und den relativen Fehler

$$\sigma = \frac{V^* - V}{V}, \qquad (V = 608{,}12) \qquad (3.9)$$

auf. Für die Bruttoprämie haben wir die in Vorlesungen verwendete Formel

$$\pi_{x\overline{n}|} = \frac{1{,}1}{0{,}95}\left[P_{x\overline{n}|} + \frac{0{,}04}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + 0{,}002\right]$$

und für den Makehamparameter c den Wert 1,098 5303 verwendet, der aus der noch nicht publizierten Dissertation von *E. Stricker* («Die Methode der Momente als analytisches Ausgleichsverfahren») stammt.

Die Abschätzung durch eine Kombination mehrerer Hilfszahlen illustriert *Tabelle 2*. Dabei wurden nur noch die gebräuchlichsten Hilfszahlen berücksichtigt. Wie erwartet liefert das Hilfszahlsystem der Skalarmethode die besten Schranken. Es bietet auch die beste Gewähr, für andere t-Gruppen gute Schranken zu liefern. Recht gute Resultate ergeben aber auch die Kombinationen der t-Methode, indem sich die Hilfszahlen $P_{x\overline{n}|}$ und c^x gut ergänzen.

Tabelle 1: Abschätzungen mit 1 Hilfszahltotal für $t = 13$

Hilfszahl h_i	Schranken $\overline{V}$	$\underline{V}$	Mittel V^*	Standard-fehler $100\,\varrho$	Relative Fehler $100\,\sigma$
1	1234,54	332,79	783,66	57,53	28,87
$P_{x\overline{n}\vert}$	643,06	522,03	582,54	10,39	—4,21
$\pi_{x\overline{n}\vert}$	672,77	539,34	606,06	11,01	—0,34
c^{x+n}	9649,11	104,64	4876,88	97,85	701,96
c^x	3303,86	134,93	1719,40	92,15	182,74
$P_{x\overline{n}\vert}\,c^x$	1992,96	96,59	1044,75	90,75	71,80
$\ddot{a}_{x\overline{n}\vert}$	1996,88	258,79	1127,84	77,05	85,46
v^{x+n}	1567,05	377,58	972,32	61,17	59,89
v^n	920,06	460,12	690,09	33,32	13,48
${}_5V_{x\overline{n}\vert}$	616,80	581,74	599,27	2,93	—1,46
${}_{10}V_{x\overline{n}\vert}$	615,27	598,27	606,77	1,40	—0,22
${}_{15}V_{x\overline{n}\vert}$	615,13	599,94	607,54	1,25	—0,10
${}_{25}V_{x\overline{n}\vert}$	655,17	485,91	570,54	14,83	—6,18
${}_{35}V_{x\overline{n}\vert}$	758,01	207,23	482,62	57,06	—20,64

Tabelle 2: Abschätzungen mit m Hilfszahlen für $t = 13$

m	h_i	$\overline{V}$	$\underline{V}$	V^*	$100\,\varrho$	$100\,\sigma$
2	$1,\ P_{x\overline{n}\vert}$	622,68	541,01	581,84	7,02	—4,32
	$1,\ {}_5V_{x\overline{n}\vert}$	614,19	583,74	598,96	2,54	—1,51
	$1,\ {}_{15}V_{x\overline{n}\vert}$	613,70	602,93	608,32	0,89	0,03
	$P_{x\overline{n}\vert},\ {}_{15}V_{x\overline{n}\vert}$	609,62	602,84	606,23	0,56	—0,31
3	$1,\ P_{x\overline{n}\vert},\ {}_{15}V_{x\overline{n}\vert}$	609,24	605,52	607,38	0,31	—0,12
	$1,\ P_{x\overline{n}\vert},\ c^x$	611,55	598,62	605,08	1,07	—0,50
	$1,\ P_{x\overline{n}\vert},\ P_{x\overline{n}\vert}\,c^x$	616,43	594,77	605,60	1,79	—0,41
4	$1,\ P_{x\overline{n}\vert},\ {}_5V_{x\overline{n}\vert},\ {}_{15}V_{x\overline{n}\vert}$	608,57	607,73	608,15	0,07	0,00
	$1,\ P_{x\overline{n}\vert},\ c^x,\ P_{x\overline{n}\vert}\,c^x$	611,18	601,95	606,56	0,76	—0,26
	${}_5V_{x\overline{n}\vert},\ {}_{15}V_{x\overline{n}\vert},\ {}_{25}V_{x\overline{n}\vert},\ {}_{35}V_{x\overline{n}\vert}$	608,44	607,73	608,08	0,06	—0,01

326 Das duale Problem

Zu dem in (3.2) formulierten Primärproblem lauten die dualen Fassungen:

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \sum_i H_i w_i = \min & \underline{V} &= \sum_i H_i w_i = \max \\ \sum_i h_{ij} w_i &\geqq f_j & \sum_i h_{ij} w_i &\leqq f_j, \end{aligned} \tag{3.10}$$

mit $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. Alle Variabeln können positiv oder negativ sein.

Bei der Bestimmung der oberen Schranke $\overline{V}$ geht es also darum, die Reservefaktoren f_j so durch Linearkombinationen der Hilfszahlen h_{ij} darzustellen, dass immer zu grosse Werte entstehen, aber gleichzeitig ein aus mittleren Hilfszahlen errechneter mittlerer Reservefaktor minimal wird. Mit andern Worten: Man sucht den kleinsten der zu grossen Reservewerte. Eine analoge Interpretation gilt für die Bestimmung der untern Schranke $\underline{V}$.

Zwischen den beiden Formulierungen des Problems besteht ein prinzipieller Unterschied in der Bedeutung der *zulässigen Lösungen*. Im Primärproblem (3.2) liefern die zulässigen Lösungen Reservewerte, die nicht ausserhalb der Schranken $\underline{V}$ und $\overline{V}$ liegen können; im Dualproblem (3.10) hingegen liefern sie Werte, die nicht innerhalb der Schranken liegen. Die nicht zulässigen Lösungen aber können in beiden Problemen sowohl Werte innerhalb wie auch ausserhalb der Schranken ergeben.

Zur Lösung des Dualproblems gelten ebenfalls die in 31 dargestellten Prinzipien. Zusätzlich beachten wir aber, dass eine optimale Lösung m der n Ungleichungen zu Gleichungen machen muss, da sämtliche Koeffizienten positiv sind. Diese m Relationen wollen wir *Basisrelationen* nennen. Aus diesem Grunde können wir von einer Transformation des Ungleichungssystem in ein Gleichungssystem absehen. Wir erhalten damit für die Lösung

$$w_i = \frac{\det \begin{vmatrix} h_{1\lambda_1} & \ldots & f_{\lambda_1} & \ldots & h_{m\lambda_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1\lambda_m} & \ldots & f_{\lambda_m} & \ldots & h_{m\lambda_m} \end{vmatrix}}{\det \left| \boldsymbol{H}_\lambda \right|},$$

wobei angenommen wird, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ seien die Nummern der

Basisrelationen, und $\boldsymbol{H}_\lambda$ bestehe aus den m zu den Basisrelationen gehörigen Zeilen von $\boldsymbol{H}' = \|h_{ji}\|$.

Für das Extremum entsteht damit der Ausdruck

$$z = \sum_i H_i \frac{\det \begin{vmatrix} h_{1\lambda_1} & \dots f_{\lambda_1} & \dots h_{m\lambda_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ h_{1\lambda_m} & \dots f_{\lambda_m} & \dots h_{m\lambda_m} \end{vmatrix}}{\det |\boldsymbol{H}_\lambda|},$$

den wir auch aus (3.7b) durch Entwicklung nach der letzten Spalte erhalten.

Es lässt sich zeigen, dass die Nummern der Basisvariabeln im Primärproblem und der Basisrelationen im Dualproblem dieselben sind.

Spezialisiert auf den Fall $n = 2$ erhalten wir mit den in 323 verwendeten Bezeichnungen die Ausdrücke (3.8).

33 Beziehungen zu den klassischen Verfahren der Reserverechnung

331 Darstellung der Reserve durch Hilfszahltotale

Aus der dualen Darstellung (3.10) ist ersichtlich, dass die Schranken der Reserve um so enger liegen müssen, je besser sich die Reservefaktoren als Funktionen von x und n durch Linearkombinationen der Hilfszahlen darstellen lassen. Dazu eignen sich z.B. Systeme mit Hilfszahlen $P_{x\overline{n}|}$ und c^x (t-Methode) oder ${}_{t_i}V_{x\overline{n}|}$ (Skalarmethode). Falls die Reservefaktoren darstellbar sind als

$$f(x,n,t) = \sum_k g_k(t)\, h_k(x,n)\,,$$

wobei g_k von t allein abhängig ist, fallen die beiden Schranken zusammen, wenn wir die Hilfszahlen h_k verwenden. Über die Möglichkeiten dieser Darstellung gibt [14] Aufschluss.

Wir stellen uns daher die Aufgabe, im Sinne eines Approximationsproblems die optimale Kombination vorgegebener Hilfszahlen zu bestimmen. Dazu wählen wir die Approximation nach *Tschebyscheff*, deren Prinzip unsern Überlegungen besser angepasst ist. Die Verwandtschaft der Tschebyscheff-Approximation mit der linearen Programmierung [16] gestattet uns, die Daten für die Schrankenbestimmung auch für die Approximation zu verwenden.

332 Approximation der Reservefaktoren

Wenn wir im Bedingungssystem von (3.10) die Ungleichungen durch Gleichungen ersetzen, entsteht ein überbestimmtes System, das durch Ausgleichung zu lösen ist. Aus den dadurch erhaltenen Variabeln w_i können wir einen mittleren Reservewert W^* berechnen zu

$$W^* = \sum_i H_i w_i .$$

Wollen wir nach Tschebyscheff ausgleichen, verlangen wir, dass das maximale absolute Residuum minimal werde. Es gilt also

$$\sum_i h_{ij} w_i + \xi_j = f_j , \quad \text{mit } \max |\xi_j| = \min.$$

Daraus folgt das System

$$\begin{aligned} \xi &= \min \\ \sum_i h_{ij} w_i - \xi &\leqq f_j \\ \sum_i h_{ij} w_i + \xi &\geqq f_j , \end{aligned} \tag{3.11}$$

also ein lineares Programm mit $2n$ Gleichungen und $m+1$ Unbekannten, wovon deren m im Vorzeichen frei sind (w_i) und die letzte (ξ) automatisch positiv wird. Fassen wir (3.11) als Dualproblem auf, so lautet das zugehörige Primärproblem

$$\begin{aligned} \sum_j f_j(y_j - u_j) &= \max \\ \sum_j h_{ij}(y_j - u_j) &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ \sum_j y_j + \sum_j u_j &= 1 \\ y_j, u_i &\geqq 0 . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Es enthält doppelt so viele Unbekannten wie das Schrankenproblem und ist wie folgt zu interpretieren: Gesucht werden zwei Summenverteilungen mit gleichen Hilfszahltotalen und möglichst grosser Reservedifferenz. Die Bedingung, dass die Variablen zusammen die Summe 1 ergeben, bedeutet eine Normierung.

Die so erhaltene normierte maximale Reservedifferenz ist gleich der dualen Variabeln ξ, dem maximalen Residuum der Ausgleichung. Bezeichnen wir mit S die totale Versicherungssumme, so ist offenbar ξS die maximale Abweichung der wahren Reserve vom Mittelwert W^*. $2\xi S$ ist die maximale Schrankendifferenz, die sich ergibt, wenn wir nur die Grundlagen zu Rate ziehen.

Wie *Tabelle 3* für einige Beispiele belegt, ist die durch Ausgleichung bestimmte Schrankendifferenz ungefähr das Dreifache der nach 32 errechneten. Dies ist verständlich, da in (3.12) ja nicht verlangt wird, dass die beiden entsprechenden Hilfszahltotale einen bestimmten Wert annehmen, sondern nur, dass sie sich gleich sind. Auf die Werte W^* verzichten wir, das sie durchwegs schlecht sind; dies rührt von der Problemstellung her.

Mit diesen Angaben ist ersichtlich, dass schon aus den Grundlagen allein wesentliche Anhaltspunkte über die Güte der Hilfszahlen gewonnen werden können, dass die konkreten Werte der Hilfszahltotale aber doch einen beträchtlichen Beitrag zur Information liefern.

Tabelle 3: Variationsbreiten nach Tschebyscheff für $t = 13$

$S = 1465{,}14$

Hilfszahlen h_{ij}	ξ nach (3.11)	$2\xi S$	$\overline{V} - \underline{V}$ nach (3.2)
$1,\ P_{x\overline{n}\rceil}$	0,0645	189,00	81,67
$1,\ P_{x\overline{n}\rceil},\ c^x$	0,0106	31,06	12,93
$1,\ P_{x\overline{n}\rceil},\ {}_{15}V_{x\overline{n}\rceil}$	0,00409	11,98	3,72
${}_{5}V_{x\overline{n}\rceil},\ {}_{15}V_{x\overline{n}\rceil},\ {}_{25}V_{x\overline{n}\rceil},\ {}_{35}V_{x\overline{n}\rceil}$	0,000654	1,92	0,71

333 Beurteilung von Reserverechnungsverfahren

Durch Betrachtung der Schranken $\underline{V}$ und $\overline{V}$ lassen sich die klassischen Approximationsverfahren nur zum Teil beurteilen. Die Schrankendifferenz gibt uns Auskunft über die Zweckmässigkeit der verwendeten Hilfszahlen, aber keine Garantie, dass der errechnete Reservewert auch wirklich innerhalb der Schranken liegt.

Wie in 326 erwähnt wurde, liegen zulässige Lösungen des Primärproblems (3.2) sicher innerhalb der Schranken und zulässige Lösungen des Dualproblems (3.10) sicher ausserhalb. Daher liegt ein gefundener Reservewert sicher innerhalb der Schranken, wenn er durch eine zulässige Lösung des Primärproblems erhalten werden kann, und sicher ausserhalb der Schranken, wenn eine zulässige Lösung des Dualproblems mit demselben Reservewert existiert. Ob der gefundene Reservewert dann wirklich auf einer zulässigen Lösung basierte oder nicht, ist ohne Bedeutung.

4 Bestimmung eines optimalen Mittelwertes bei vorgegebenen Schranken

41 Darstellung als Spiel über dem Einheitsquadrat

Wir betrachten das reine Schätzproblem zwischen N und M. Die Menge der reinen Strategien von N sei die durch Schranken $\underline{V}$ und $\overline{V}$ begrenzte Menge der richtigen Reservewerte. Als reine Strategien von M seien beliebige reelle Schätzwerte W zugelassen. Erleidet M durch die Wahl von W den Schaden $A(V, W) \geqq 0$, so wird er seine optimale Strategie so wählen, dass

$$A^* = A(V^*, W^*) = \min_{W} \max_{V} A(V, W).$$

Dabei kann er sich gemäss 231 auf Schätzwerte beschränken, für welche gilt:

$$\underline{V} \leqq W \leqq \overline{V}.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} V &= \alpha\overline{V} + (1-\alpha)\underline{V} = \underline{V} + \alpha(\overline{V} - \underline{V}), \\ W &= \beta\overline{V} + (1-\beta)\underline{V} = \underline{V} + \beta(\overline{V} - \underline{V}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei $A(V, W)$ übergeht in $A(\alpha, \beta)$, so bestehen die Mengen der reinen Strategien für beide Gegner aus Punkten des Einheitsintervalls $0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1$, und unser Schätzproblem reduziert sich auf ein Spiel über dem Einheitsquadrat, dessen Eigenschaften nur noch von der Struktur der Auszahlungsfunktion abhängig sind. Nach allgemeinen Sätzen der Spieltheorie existieren bei diesen Spielen sowohl Wert wie optimale Strategien, sofern $A(\alpha, \beta)$ in beiden Variabeln stetig ist. Diese optimalen Strategien werden im allgemeinen gemischte Strategien sein, d. h. Verteilungsfunktionen über dem Einheitsintervall.

Die Schadenfunktion ist durch (2.1) gegeben. Dabei sind zwei Typen von besonderer Bedeutung:

a) Lineare Schadenfunktion:

Sie besteht aus zwei Ebenen, die sich über der Diagonalen des Einheitsquadrats schneiden (Fig. 3). In diesem Fall lässt sich das Spiel auf ein endliches Spiel mit je zwei reinen Strategien zurückführen (vgl. 42).

b) Konvexe Auszahlungsfunktion:

Unter einer konvexen Auszahlungsfunktion versteht man im allgemeinen eine in β konvexe Funktion, d.h. $\dfrac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} \geqq 0$ [9]. Sie liefert

eine reine optimale Strategie für M. Ist die Funktion gleichzeitig konkav in α, so existiert ein Sattelpunkt, d.h. beide Spieler besitzen reine optimale Strategien. Ist $A(\alpha,\beta)$ hingegen in beiden Variabeln konvex, besteht die optimale Strategie für N in einer geeigneten Mischung der Extremalwerte $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$. Eine solche Funktion wird in Fig. 4 dargestellt und in 43 verwendet.

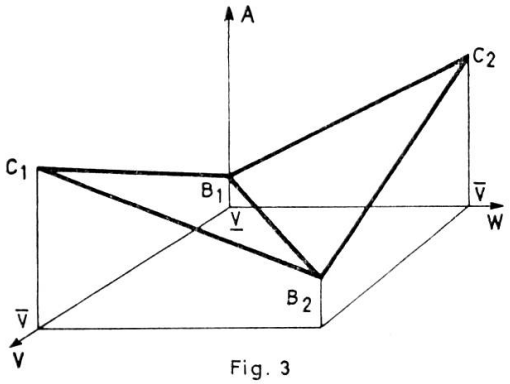

Fig. 3

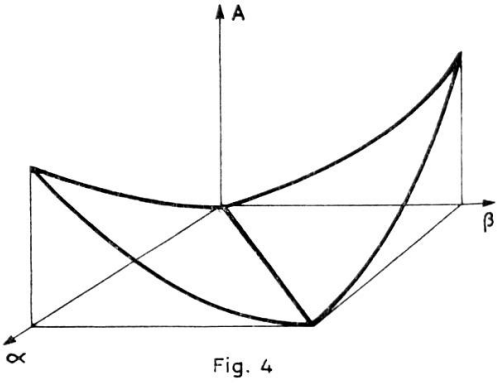

Fig. 4

Für die praktische Lösung von Spielen, wie sie in den folgenden Abschnitten durchgeführt werden soll, ist es oft vorteilhaft, auf die Transformation (4.1) zu verzichten, weil so die Auszahlungsfunktion in der Regel einfacher ist.

42 Schätzwerte bei linearer Auszahlungsfunktion

In ihrer allgemeinsten Form ist die lineare Auszahlungsfunktion durch folgende vier Punkte bestimmt (Fig. 3):

$$A(\underline{V},\underline{V}) = B_1, \quad A(\overline{V},\underline{V}) = C_1, \quad A(\overline{V},\overline{V}) = B_2, \quad A(\underline{V},\overline{V}) = C_2,$$
$$\text{wobei } C_i \geqq B_j \quad (i,j = 1, 2).$$

Damit lautet die Schadenfunktion

$$A(V,W) = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{V}-\underline{V}}\left[-(C_2-B_2)\,V+(C_2-B_1)\,W+(B_1\overline{V}-B_2\underline{V})\right] & (V < W), \\[2ex] \dfrac{1}{\overline{V}-\underline{V}}\left[(B_2-B_1)\,V+(B_1\overline{V}-B_2\underline{V})\right] & (V = W), \\[2ex] \dfrac{1}{\overline{V}-\underline{V}}\left[(C_1-B_1)\,V-(C_1-B_2)\,W+(B_1\overline{V}-B_2\underline{V})\right] & (V > W), \end{cases}$$

oder zusammengefasst

$$A(V,W) = \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\overline{V}-\underline{V}}\{\max[-(C_2-B_2)V+(C_2-B_1)W,(C_1-B_1)V-(C_1-B_2)W]+(B_1\overline{V}-B_2\underline{V})\}.$$

Der Wert des Spiels ist

$$\min_W \max_V A(V,W) = \frac{1}{\overline{V}-\underline{V}}\{\tilde{A}+(B_1\overline{V}-B_2\underline{V}\},$$

mit $\tilde{A} = \min_W \max_V \max[-(C_2-B_2)V+(C_2-B_1)W,(C_1-B_1)V-(C_1-B_2)W]$.

421 Lösung als konvexes Spiel

Lineare Auszahlungsfunktionen sind Grenzfälle der konvexen. Damit lassen sich auch die Lösungsverfahren der konvexen Spiele hier anwenden [9].

Wir bilden vorerst für jedes W das Maximum von $\tilde{A}$ bezüglich V und erhalten damit die obere Enveloppe der Auszahlungen von M an N. Das Minimum dieser Enveloppe ist gleich dem Wert des Spiels und liefert die optimale reine Strategie für M.

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \min_W \max_V \max[-(C_2-B_2)V+(C_2-B_1)W,(C_1-B_1)V-(C_1-B_2)W]\\ &= \min_W \max[-(C_2-B_2)\underline{V}+(C_2-B_1)W,(C_1-B_1)\overline{V}-(C_1-B_2)W].\end{aligned}$$

Das Minimum wird erreicht durch

$$-(C_2-B_2)\underline{V}+(C_2-B_1)W = (C_1-B_1)\overline{V}-(C_1-B_2)W,$$

woraus

$$W = W^* = \frac{(C_1-B_1)\overline{V}-(C_2-B_2)\underline{V}}{(C_1+C_2)-(B_1+B_2)}. \tag{4.3}$$

Damit wird

$$\tilde{A} = \frac{(C_2-B_1)(C_1-B_1)\overline{V}-(C_1-B_2)(C_2-B_1)\underline{V}}{(C_1+C_2)-(B_1+B_2)}$$

und

$$A^* = \min_W \max_V A(V,W) = \frac{C_1C_2-B_1B_2}{(C_1+C_2)-(B_1+B_2)}.$$

Die optimale Strategie für N ist eine Linearkombination aus $\underline{V}$ und $\overline{V}$, da für jedes W das Maximum von A durch $\underline{V}$ oder $\overline{V}$ erreicht wird.

Durch ein geeignetes Mischungsverfahren sorgt N dafür, dass M keine kleinere Auszahlung erzielen kann, auch wenn er das Mischungsverhältnis kennt.

Verwendet N die Mischung $\alpha\overline{V}+(1-\alpha)\underline{V}$, so wird, da $\underline{V}\leqq W\leqq\overline{V}$,

$$\tilde{A}=\alpha(C_1-B_1)\overline{V}-\alpha(C_1-B_2)W-(1-\alpha)(C_2-B_2)\underline{V}+(1-\alpha)(C_2-B_1)W,$$
$$=\alpha\left[(C_1-B_1)\overline{V}+(C_2-B_2)\underline{V}\right]-(C_2-B_2)\underline{V}-W\left[\alpha(C_1+C_2-B_1-B_2)-(C_2-B_1)\right]$$

α ist so zu wählen, dass der Wert des Spiels unabhängig von der Wahl von W erreicht wird, d.h. so, dass der Koeffizient von W verschwindet. Damit wird

$$\alpha=\frac{C_2-B_1}{(C_1+C_2)-(B_1+B_2)},\qquad 1-\alpha=\frac{C_1-B_2}{(C_1+C_2)-(B_1+B_2)}.$$

Mit diesem Verfahren haben wir allerdings nicht alle Strategien von M erhalten, indem dieser bei linearer Auszahlungsfunktion auch gemischte optimale Strategien besitzt. Da $A(V,W)$ linear ist, gilt

$$A\left[V,\beta W_1+(1-\beta)W_2\right]=\beta A(V,W_1)+(1-\beta)A(V,W_2). \quad (4.4)$$

M kann das Optimum daher mit einer geeigneten Mischung von zwei beliebigen reinen Strategien W_1 und W_2 erreichen, sofern $W_1\leqq W^*\leqq W_2$ mit W^* nach (4.3).

422 Lösung als diskretes Spiel

Wegen (4.4) spielt es für die Auszahlung von M an N keine Rolle, ob ein Spieler einen Mittelwert aus den Extremalwerten $\underline{V}$ und $\overline{V}$ wählt, oder ob er die Extremwerte im entsprechenden Verhältnis mischt. Deshalb nehmen wir nun an, jeder Spieler besitze nur zwei reine Strategien $\underline{V}$ und $\overline{V}$, womit wir ein diskretes Spiel mit der Auszahlungsmatrix

$$\begin{array}{cc|cc|}
 & & & N: \\
 & & \underline{V} & \overline{V} \\
\hline
M: & \begin{array}{c}\underline{V}\\ \overline{V}\end{array} & \begin{array}{c}B_1\\ C_2\end{array} & \begin{array}{c}C_1\\ B_2\end{array} \\
\hline
\end{array}$$

erhalten, dessen Lösung wir aus Fig. 5a und 5b ablesen können (vgl. z.B. [10]).

Sie lautet

$$\text{für } N: \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{C_2 - B_1}{C_1 - B_2}, \qquad \alpha = \frac{C_2 - B_1}{(C_1 + C_2) - (B_1 + B_2)},$$

$$\text{für } M: \quad \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{C_1 - B_1}{C_2 - B_2}, \qquad \beta = \frac{C_1 - B_1}{(C_1 + C_2) - (B_1 + B_2)}.$$

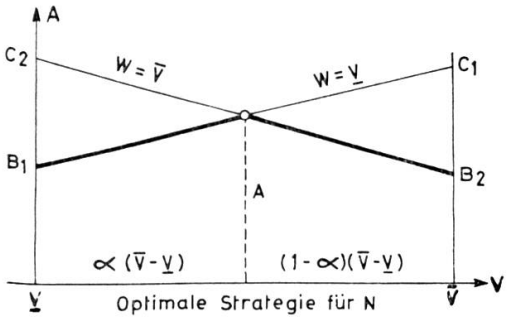

Fig. 5a

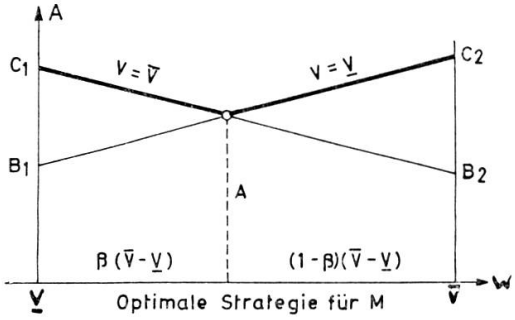

Fig. 5b

N wählt $\overline{V}$ und $\underline{V}$ im Verhältnis $\alpha : 1-\alpha$ und M im Verhältnis $\beta : 1-\beta$ Der Wert des Spiels ist wiederum gegeben durch

$$A^* = \frac{C_1 C_2 - B_1 B_2}{(C_1 + B_2) - (B_1 + B_2)}.$$

423 Spezialfälle

a) Nimmt man an, M erleide bei richtiger Schätzung keinen Schaden, so gilt $B_1 = B_2 = 0$, womit $\alpha : 1-\alpha = C_2 : C_1$ und $\beta : 1-\beta = C_1 : C_2$. Der Wert des Spiels beträgt dann $\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

b) Ist das Spiel symmetrisch, so gilt $C_1 = C_2 = C$, $B_1 = B_2 = B$ und damit $\alpha : 1-\alpha = \beta : 1-\beta = 1:1$. In diesem Fall wählt M das arithmetische Mittel zwischen den beiden Schranken oder zwei dazu symmetrische Werte mit gleicher Häufigkeit, und N beide Schranken mit gleicher Häufigkeit. Das Spiel hat den Wert $\dfrac{B+C}{2}$ resp. $\dfrac{C}{2}$ falls $B = 0$.

43 Separierbare Spiele

Ein Spiel heisst *separierbar*, wenn die Auszahlungsfunktion folgende Gestalt hat:

$$A(V,W) = \sum_i \sum_j a_{ij}\, r_i(V)\, s_j(W)\,. \tag{4.5}$$

Ist insbesondere $r_i(V) = V^i$ und $s_j(W) = W^j$, so handelt es sich um die Unterklasse der Polynomspiele.

Separierbare Spiele lassen sich auf endliche Spiele zurückführen, indem N einen Vektor $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ und M einen Vektor $\boldsymbol{s}$ so suchen, dass bei gegebener Auszahlungsmatrix $\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|$ gilt:

$$\max_{\boldsymbol{r}} \min_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{s} = \min_{\boldsymbol{s}} \max_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\,.$$

Dabei gehören $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ nicht, wie bei den Matrixspielen, einem Simplex an, sondern einer bestimmten konvexen Menge, die als konvexe Hülle der Raumkurve $r_i = r_i(V)$ resp. $s_j = s_j(W)$ gegeben ist.

Zur Lösung praktischer Beispiele eignet sich für separierbare Spiele in erster Linie die *Fixpunktmethode*. Ihre Anwendung ist um so einfacher, je kleiner die Dimensionen der Strategienräume sind.

431 Die Fixpunktmethode [9]

Es sei $R = \{\boldsymbol{r}\}$ die Strategienmenge von N und $S = \{\boldsymbol{s}\}$ die Strategienmenge von M. U sei die Abbildung von R in S mit $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}) = \min_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}$, und T die Abbildung von S in R mit $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{s}) = \max_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}$.

Die zusammengesetzte Abbildung TU ist eine Abbildung von R in sich, analog UT eine Abbildung von S in sich. Die Fixpunkte von TU in R sind die optimalen Strategien von N, die Fixpunkte von UT in S die optimalen Strategien für M. Die Existenz von Fixpunkten ist äquivalent mit der Existenz von optimalen Strategien.

Mit Hilfe dieser Methode betrachten wir im folgenden Spiele, deren Auszahlungsfunktion eine verallgemeinerte Fehlerfunktion bedeutet und die Form hat

$$A(V,W) = V^k(V-W)^2 \quad (k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Dabei sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

$k = -n$	$(n \geqq 3)$	$k = 0$	
$k = -2$		$k = n$	$(n \geqq 1)$.
$k = -1$			

432 Auszahlungsfunktion $A = (V - W)^2$

Das Spiel mit der Auszahlungsfunktion $A(V, W) = V^2 - 2VW + W^2$ ist äquivalent mit einem Spiel mit der Auszahlungsfunktion $A(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = r_2 - 2r_1 s_1 + s_2$, dessen Strategienräume Parabelsegmente darstellen; die reinen Strategien bilden den Parabelbogen

$$r_1 = V \qquad \text{resp.} \qquad s_1 = W$$

$$r_2 = V^2 \qquad\qquad s_2 = W^2$$

$$\underline{V} \leqq V \leqq \overline{V} \qquad\qquad \underline{V} \leqq W \leqq \overline{V},$$

die gemischten Strategien bilden sämtliche konvexen Kombinationen der reinen Strategien (Fig. 6a und 6b). Die Linien gleicher Auszahlung sind für jeden Spieler Geraden in seinem Diagramm, deren Steigung durch die Strategie des Gegners bestimmt wird.

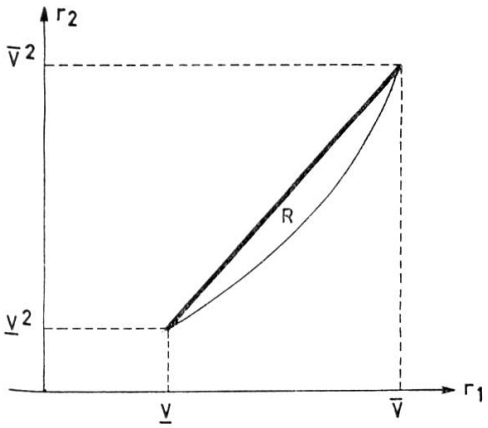

Fig. 6a

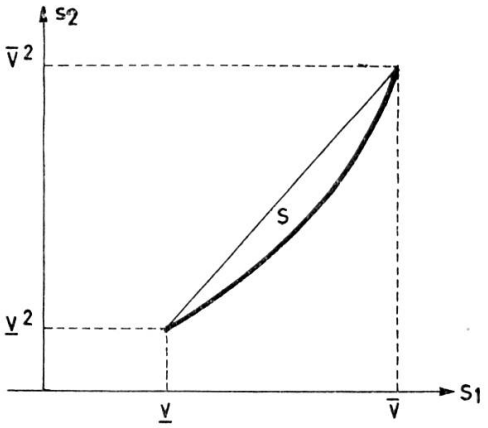

Fig. 6b

Wir betrachten zuerst die Abbildung U von R nach S. Jeder Punkt des Parabelsegments R wird in einen Punkt des Parabelastes von S abgebildet, da das Minimum von A durch grosse s_1 und kleine s_2 erreicht wird. Wählt N die Strategie $\boldsymbol{r}$, so haben die Geraden gleicher Auszahlung in S die Steigung $2r_1$, und die minimale Auszahlung wird auf der Tangente an den Parabelast erreicht, welche diesen im Punkt $(s_1, s_2) = (r_1, r_1^2)$ berührt. Damit werden alle Punkte von R mit der gleichen Abszisse r_1 in denselben Parabelpunkt von S mit der Abszisse $s_1 = r_1$ abgebildet.

Für die Abbildung T von S nach R gilt: Bei gegebenem $\mathbf{s}$ erreicht N eine maximale Auszahlung durch kleine r_1 und grosse r_2, also auf Punkten der das Segment abschliessenden Sehne, deren Steigung $\underline{V}+\overline{V}$ beträgt. Die Steigung der Geraden gleicher Auszahlung in R ist $2s_1$; damit werden alle Punkte von S mit $s_1 < \frac{1}{2}(\underline{V}+\overline{V})$ auf den Punkt $(\overline{V},\overline{V}^2)$ in R abgebildet, und S-Punkte mit $s_1 > \frac{1}{2}(\underline{V}+\overline{V})$ auf den R-Punkt $(\underline{V},\underline{V}^2)$. Punkte mit $s_1 = \frac{1}{2}(\underline{V}+\overline{V})$ schliesslich werden auf die ganze Sehne abgebildet.

Fixpunkt in R ist daher der Sehnenpunkt mit $r_1 = \frac{1}{2}(\underline{V}+\overline{V})$ und in S der Parabelpunkt mit $s_1 = \frac{1}{2}(\underline{V}+\overline{V})$. Dies bedeutet, dass M als optimale reine Strategie das arithmetische Mittel der beiden Schranken verwendet, während N eine gemischte optimale Strategie besitzt, die in einer Mischung der beiden Extremalwerte im Verhältnis $1:1$ besteht. Der Wert des Spiels beträgt

$$A = \tfrac{1}{4}(\overline{V}-\underline{V})^2.$$

433 Auszahlungsfunktion $\dfrac{(V-W)^2}{V}$

$$A(V,W) = V - 2W + \frac{W^2}{V},$$

$$A(\mathbf{r},\mathbf{s}) = r_1 - 2s_1 + r_2 s_2.$$

Der Strategienraum R ist ein Hyperbelsegment, aufgespannt durch

$$r_1 = V,$$

$$r_2 = \frac{1}{V},$$

der Strategienraum S ein Parabelsegment, erzeugt durch

$$s_1 = W,$$

$$s_2 = W^2.$$

Als Fixpunkte kommen in S Parabelpunkte, in R Sehnenpunkte in Frage, die der Gleichung genügen

$$r_2 = \frac{-1}{\overline{V}\,\underline{V}}(r_1 - \underline{V} - \overline{V}).$$

In S haben die Geraden gleicher Auszahlung die Steigung $\frac{2}{r_2}$ und damit werden die Sehnenpunkte (r_1, r_2) in den Parabelpunkt

$$s_1 = \frac{1}{r_2} = \frac{\underline{V}\overline{V}}{\overline{V} + \underline{V} - r_1} \qquad \text{abgebildet.}$$

In R haben die Linien gleicher Auszahlung die Steigung $\frac{-1}{s_2} = \frac{-1}{s_1^2}$ für Parabelpunkte von S, während die Steigung der Sehne $\frac{-1}{\overline{V}\underline{V}}$ beträgt. S-Punkte mit $s_1 = \sqrt{\underline{V}\overline{V}}$ werden daher auf die ganze Sehne von R abgebildet.

Fixpunkte existieren damit in S auf der Parabel für $s_1 = \sqrt{\underline{V}\overline{V}}$ und in R auf der Sehne für $r_1 = \overline{V} + \underline{V} - \sqrt{\underline{V}\overline{V}}$.

M besitzt daher eine reine optimale Strategie im geometrischen Mittel der beiden Schranken, während N die beiden Extremalwerte $\overline{V}$ und $\underline{V}$ im Verhältnis $\alpha : 1 - \alpha$ mischen muss mit

$$\alpha = \frac{\overline{V} - \sqrt{\underline{V}\overline{V}}}{\overline{V} - \underline{V}}.$$

Der Wert des Spiels beträgt

$$A = (\sqrt{\overline{V}} - \sqrt{\underline{V}})^2.$$

434 Auszahlungsfunktion $\left(\frac{V - W}{V}\right)^2$

$$A(V, W) = 1 - \frac{2W}{V} + \frac{W^2}{V^2},$$

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = 1 - 2r_1 s_1 + r_2 s_2.$$

Der Strategienraum R ist ein Parabelsegment, erzeugt durch

$$r_1 = \frac{1}{V},$$

$$r_2 = \frac{1}{V^2}.$$

Fixpunkte liegen in S auf dem Parabelbogen, in R auf der Sehne

$$r_2 = \frac{1}{\underline{V}\overline{V}}\left[(\underline{V}+\overline{V})\,r_1 - 1\right].$$

Sehnenpunkte (r_1, r_2) werden in S in den Berührungspunkt der Tangente mit der Steigung $\frac{2r_1}{r_2}$ abgebildet, d.h. in den Punkt

$$s_1 = \frac{r_1 \underline{V}\overline{V}}{(\overline{V}+\underline{V})\,r_1 - 1}, \qquad s_2 = s_1^2.$$

Parabelpunkte aus S werden in R auf die ganze Sehne abgebildet, wenn

$$\frac{2s_1}{s_2} = \frac{2}{s_1} = \frac{\underline{V}+\overline{V}}{\underline{V}\overline{V}}.$$

Fixpunkt in S ist damit der Parabelpunkt mit $s_1 = \frac{2\underline{V}\overline{V}}{\underline{V}+\overline{V}}$ und in R der Sehnenpunkt mit

$$r_1 = \frac{2}{\underline{V}+\overline{V}} = \frac{\alpha}{\overline{V}} + \frac{(1-\alpha)}{\underline{V}},$$

woraus

$$\alpha = \frac{\overline{V}}{\underline{V}+\overline{V}}.$$

Die optimale Strategie für M ist damit das harmonische Mittel aus den Schranken, während N die Extremalwerte im Verhältnis $\overline{V}:\underline{V}$ mischt. Der Wert des Spiels beträgt

$$A = \left(\frac{\overline{V}-\underline{V}}{\overline{V}+\underline{V}}\right)^2.$$

435 Auszahlungsfunktion $V^n(V-W)^2$, $(n \geqq 1)$

$$A(V,W) = V^{n+2} - 2V^{n+1}W + V^n W^2,$$
$$A(\mathbf{r},\mathbf{s}) = r_3 - 2r_2 s_1 + r_1 s_2.$$

Während der Strategienraum S derselbe ist wie in den früheren Beispielen, ist R nun dreidimensional, nämlich die konvexe Hülle der Kurve

$$r_1 = V^n,$$
$$r_2 = V^{n+1},$$
$$r_3 = V^{n+2}.$$

Das Spiel bleibt konvex bezüglich W, so dass Fixpunkte in S auf dem Parabelast liegen und M eine reine optimale Strategie besitzt. Hingegen ist A bezüglich V nicht mehr durchwegs konvex, so dass die optimalen Strategien von N nicht mehr durchwegs Mischungen der Extreme sind.

a) Wir betrachten vorerst die Abbildung von R nach S: Alle Punkte in R mit $r_2 = c r_1$ werden in den Parabelpunkt $s_1 = c$, $s_2 = c^2$ abgebildet.

b) Für die Abbildung von S nach R muss die Funktion

$$f(V) = V^{n+2} - 2V^{n+1}W + V^n W^2$$

untersucht werden. Bei vorgegebenem W ist das Maximum über dem Intervall $\underline{V} \leqq V \leqq \overline{V}$ festzulegen. $f(V)$ besitzt ein relatives Minimum bei $V = W$ (neben dem Trivialfall $V = 0$) und ein relatives Maximum bei $V = \frac{n}{n+2} W$. Ein relatives Maximum ist ferner $f(\overline{V})$ und, falls $\underline{V} > \frac{n}{n+2} W$, auch $f(\underline{V})$.

c) Wir betrachten den Fall $\underline{V} \leqq \frac{n}{n+2} W$ und vergleichen $f(\overline{V})$ mit $f\left(\frac{n}{n+2} W\right)$. Setzen wir ihre Differenz null, so bestimmt sich das kritische W aus

$$f\left(\frac{n}{n+2} W\right) - f(\overline{V}) = W^{n+2}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n+2} - 2W^{n+2}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n+1} + W^{n+2}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}$$
$$- \overline{V}^{n+2} + 2\overline{V}^{n+1} W - \overline{V}^n W^2 = 0.$$

Wir setzen $W = \frac{n+2}{n} \eta \overline{V}$ $\left(0 \leqq \eta \leqq \frac{n}{n+2}\right)$ und erhalten

$$\eta^{n+2} - \frac{(n+2)^2}{4} \eta^2 + \frac{n(n+2)}{2} \eta - \frac{n^2}{4} = 0.$$

Eine Doppellösung dieser Gleichung ist $\eta = 1$. Nach einer Division mit $(\eta - 1)^2$ ergibt sich

$$\eta^n + 2\eta^{n-1} + 3\eta^{n-2} + \ldots + n\eta - \frac{n^2}{4} = 0. \tag{4.6}$$

y sei die (einzige) positive reelle Wurzel dieser Gleichung.

Es gilt dann $f\left(\frac{n}{n+2}W\right) \gtreqless f(\overline{V})$ wenn $W \gtreqless \frac{n+2}{n} y\overline{V}$.

Unter der Bedingung, dass $\underline{V} \leqq \frac{n}{n+2}W$ erhalten wir damit folgende Abbildung von S nach R:

für $W > \frac{n+2}{n} y\overline{V}$: auf den Punkt $V = \frac{n}{n+2}W$,

für $W < \frac{n+2}{n} y\overline{V}$: auf den Punkt $V = \overline{V}$,

für $W = \frac{n+2}{n} y\overline{V}$: auf die Verbindungsgerade dieser zwei Punkte.

Dabei ist $\underline{V} \leqq \frac{n}{n+2}W$ für $\underline{V} \leqq y\overline{V}$, womit wir die Gültigkeitsgrenze erhalten.

d) Für den zweiten Fall $\underline{V} \geqq \frac{n}{n+2}W$ vergleichen wir $f(\underline{V})$ mit $f(\overline{V})$ und erhalten für den kritischen Wert

$$W = \frac{\overline{V}^{n+1} - \underline{V}^{n+1} - (\overline{V} - \underline{V})\sqrt{\overline{V}^n \underline{V}^n}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} = W_1. \tag{4.7}$$

Damit erhalten wir folgende Abbildung:

für $W > W_1$: auf den Punkt $\underline{V}$,
für $W < W_1$: auf den Punkt $\overline{V}$,
für $W = W_1$: auf die Verbindungsgerade der zwei Punkte.

Zur Abgrenzung der Gültigkeit für diesen Fall setzen wir $\underline{V} - \frac{n}{n+2}W_1 = 0$ und erhalten mit $\underline{V} = \lambda\overline{V}$ die Gleichung

$$\lambda^{n+1} - n\lambda^{\frac{n+2}{2}} + n\lambda^{\frac{n}{2}} - (n+2)\lambda + n = 0.$$

Diese lässt sich auf die Form (4.6) bringen, wenn man von den Triviallösungen $|\lambda| = 1$ absieht, und hat somit die Lösung $\lambda = y$. Also gilt für $W = W_1$

$$\underline{V} \geqq \frac{n}{n+2}W \quad \text{wenn} \quad \underline{V} \geqq y\overline{V},$$

womit die Abgrenzung verifiziert ist.

e) Wir gelangen damit zur Konstruktion der Fixpunkte:

1. Fall: $\underline{V} \geqq y\overline{V}$:

$$W^* = W_1 = \frac{\overline{V}^{n+1} - \underline{V}^{n+1} - (\overline{V} - \underline{V})\sqrt{\overline{V}^n \underline{V}^n}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n}.$$

Die Projektion der Sehne zwischen $\underline{V}$ und $\overline{V}$ auf die r_3-Ebene lautet:

$$r_2 = \frac{\overline{V}^{n+1} - \underline{V}^{n+1}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} r_1 - \frac{\overline{V}^n \underline{V}^n}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} (\overline{V} - \underline{V}).$$

Diese Punkte werden abgebildet auf $s_1 = \dfrac{r_2}{r_1}$ und somit erhalten wir in R einen Fixpunkt mit

$$\frac{\overline{V}^{n+1} - \underline{V}^{n+1}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} - \frac{\overline{V}^n \underline{V}^n (\overline{V} - \underline{V})}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} \frac{1}{r_1} = \frac{\overline{V}^{n+1} - \underline{V}^{n+1} - (\overline{V} - \underline{V})\sqrt{\underline{V}^n \overline{V}^n}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} = W_1,$$

d. h. $r_1 = \sqrt{\underline{V}^n \overline{V}^n} = \alpha \overline{V}^n + (1-\alpha)\underline{V}^n$ mit $\alpha = \dfrac{\sqrt{\overline{V}^n \underline{V}^n} - \underline{V}^n}{\overline{V}^n - \underline{V}^n}$.

Durch Einsetzen erhalten wir den Wert des Spiels zu

$$A = \overline{V}^n \underline{V}^n (\overline{V} - \underline{V})^2 \frac{\left(\sqrt{\overline{V}^n} - \sqrt{\underline{V}^n}\right)^2}{(\overline{V}^n - \underline{V}^n)^2}.$$

2. Fall: $\underline{V} \leqq y\overline{V}$:

$$W^* = \frac{n+2}{n} y\overline{V}.$$

Die Sehne zwischen $\overline{V}$ und $y\overline{V}$ (projiziert auf die r_3-Ebene) gehorcht der Gleichung

$$r_2 = \frac{1 - y^{n+1}}{1 - y^n} \overline{V} r_1 - \frac{1 - y}{1 - y^n} y^n \overline{V}^{n+1}.$$

Den Fixpunkt in R erhalten wir mit $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{n+2}{n} y\overline{V}$, woraus, unter Berücksichtigung, dass y (4.6) erfüllt, folgt:

$$r_1 = \frac{2 y^{n+1} \overline{V}^n}{n - (n+2) y} = \alpha \overline{V}^n + (1-\alpha) y^n \overline{V}^n$$

mit

$$\alpha = \frac{(n+4) y^{n+1} - n y^n}{(1 - y^n)\left[n - (n+2) y\right]}.$$

Der Wert des Spiels ist gegeben durch

$$A = \overline{V}^{n+2}\left(1 - \frac{n+2}{n}\,y\right)^2.$$

Wir beachten, dass im 2. Fall der Wert von $\underline{V}$ keine Rolle mehr spielt.

1. Spezialfall: $n = 1$:

$$A(V, W) = V(V - W)^2,$$

$$\frac{n}{n+2} = \tfrac{1}{3},$$

$$y = \tfrac{1}{4},$$

$$W_1 = \overline{V} + \underline{V} - \sqrt{\overline{V}\,\underline{V}}\,.$$

Falls $\underline{V} \geqq \frac{1}{4}\overline{V}$, so ist $W = W_1$ optimale Strategie für M, und eine Mischung der Extremalwerte $\overline{V}$ und $\underline{V}$ im Verhältnis $(\sqrt{\underline{V}\,\overline{V}} - \underline{V}) : (\overline{V} - \sqrt{\underline{V}\,\overline{V}})$ optimal für N. Der Wert des Spiels beträgt $\overline{V}\,\underline{V}\left(\sqrt{\overline{V}} - \sqrt{\underline{V}}\right)^2$.

Falls $\underline{V} \leqq \frac{1}{4}\overline{V}$, so ist $W = \frac{3}{4}\underline{V}$ optimal für M, und eine Mischung der Werte $\overline{V}$ und $\frac{1}{4}\overline{V}$ im Verhältnis $1:2$ optimal für N. Der Wert des Spiels beträgt $\dfrac{\overline{V}^3}{16}$.

2. Spezialfall: $n = 2$:

$$A(V, W) = V^2(V - W)^2,$$

$$\frac{n}{n+2} = \tfrac{1}{2},$$

$$y = \sqrt{2} - 1,$$

$$W_1 = \frac{\overline{V}^2 + \underline{V}^2}{\overline{V} + \underline{V}}\,.$$

Falls $\underline{V} \geqq \left(\sqrt{2} - 1\right)\overline{V}$, so ist $W = W_1$ optimal für M, und eine Mischung von $\overline{V}$ und $\underline{V}$ im Verhältnis $\underline{V} : \overline{V}$ optimal für N. Der Wert des Spiels beträgt $\overline{V}^2\,\underline{V}^2\left(\dfrac{\overline{V} - \underline{V}}{\overline{V} + \underline{V}}\right)^2$.

Falls $\underline{V} \leqq \left(\sqrt{2} - 1\right)\overline{V}$, so ist $W = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\overline{V}$ optimal für M und eine Mischung von $\overline{V}$ und $\left(\sqrt{2} - 1\right)\overline{V}$ im Verhältnis $\left(\sqrt{2} - 1\right) : 1$ optimal für N. Der Wert des Spiels ist $\overline{V}^4\left(\sqrt{2} - 1\right)^4$.

436 Auszahlungsfunktion $V^{-n}(V-W)^2$, $(n \geqq 3)$

a) An Stelle der Funktion $f(V)$ ist nun

$$g(V) = V^{-(n-2)} - 2\,W\,V^{-(n-1)} + W^2\,V^{-n}$$

zu diskutieren, die ein Minimum für $V = W$ und ein Maximum für $V = \frac{n}{n-2}\,W$ aufweist. Ein relatives Minimum über dem vorgegebenen Intervall nimmt sie ferner an in $\underline{V}$ und, falls $\frac{n}{n-2}\,W > \overline{V}$, in $\overline{V}$.

b) Im Falle $\frac{n}{n-2}\,W \leqq \overline{V}$ erhalten wir das kritische W aus der Gleichung

$$g\left(\frac{n}{n-2}\,W\right) - g(\underline{V}) = W^{-(n-2)}\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n}\right\}$$
$$- \underline{V}^{-(n-2)} + 2\,\underline{V}^{-(n-1)}\,W - \underline{V}^{-n}\,W^2 = 0$$

und mit $m = n-2$ sowie $W = \frac{m}{m+2}\,\frac{\underline{V}}{\eta}$ transformiert sich diese auf (4.6) mit der Lösung y.

Somit ergibt sich die Abbildung

für $W < \frac{m}{m+2}\,\frac{\underline{V}}{y}$: auf den Punkt $\frac{n}{n-2}\,W$,

für $W > \frac{m}{m+2}\,\frac{\underline{V}}{y}$: auf den Punkt $\underline{V}$,

für $W = \frac{m}{m+2}\,\frac{\underline{V}}{y}$: auf die Verbindungsgerade der beiden Punkte.

Dabei ist $\overline{V} \geqq \frac{n}{n-2}\,W$ wenn $\underline{V} \leqq y\,\overline{V}$.

c) Im Fall $\frac{n}{n-2}\,W \geqq \overline{V}$ bestimmt sich der kritische W-Wert aus der Gleichung $g(\underline{V}) = g(\overline{V})$ zu

$$W = W_2 = \frac{\underline{V}\,\overline{V}\,(\overline{V}^{n-1} - \underline{V}^{n-1}) + (\overline{V} - \underline{V})\sqrt{\overline{V}^n\,\underline{V}^n}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} \tag{4.8}$$

und damit lautet die Abbildung

für $W > W_2$: auf den Punkt $\underline{V}$,

für $W < W_2$: auf den Punkt $\overline{V}$,

für $W = W_2$: auf die Verbindungsgerade der zwei Punkte.

Dabei ist $\frac{n}{n-2} W_2 \geqq \overline{V}$ wenn $\underline{V} \geqq y\overline{V}$.

d) Wir konstruieren daher die Fixpunkte wie folgt:

1. Fall: $\underline{V} \geqq y\overline{V}$:

Fixpunkt in S:

$$W^* = W_2 = \frac{\underline{V}\overline{V}(\overline{V}^{n-1} - \underline{V}^{n-1}) + (\overline{V} - \underline{V})\sqrt{\overline{V}^n \underline{V}^n}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n}.$$

Fixpunkte in R liegen auf der Sehne

$$r_2 = \frac{\underline{V}\overline{V}(\overline{V}^{n-1} - \underline{V}^{n-1})}{\overline{V}^n - \underline{V}^n} r_1 + \frac{\overline{V} - \underline{V}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n};$$

Die Setzung $\frac{r_2}{r_1} = W_2$ ergibt

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\overline{V}^n \underline{V}^n}} = \frac{\alpha}{\overline{V}^n} + \frac{1-\alpha}{\underline{V}^n}$$

womit

$$\alpha = \frac{\overline{V}^n - \sqrt{\overline{V}^n \underline{V}^n}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n}.$$

Der Wert des Spiels beträgt

$$A = \left(\frac{\overline{V} - \underline{V}}{\overline{V}^n - \underline{V}^n}\right)^2 \left(\sqrt{\overline{V}^n} - \sqrt{\underline{V}^n}\right)^2,$$

2. Fall: $\underline{V} \leqq y\overline{V}$:

Fixpunkt in S:

$$W^* = \frac{n-2}{ny} \underline{V}.$$

Fixpunkte in R liegen auf der Sehne

$$r_2 = \frac{\underline{V}(y^{n-1} - 1)}{y^n - 1} r_1 - \frac{y^{n-1}(1-y)}{\underline{V}^{n-1}(y^n - 1)}.$$

Aus $\frac{r_2}{r_1} = \frac{n-2}{n\,y}\,\underline{V}$ folgt

$$r_1 = \frac{2\,y^n}{(n-2)-n\,y}\,\frac{1}{\underline{V}^n} = \frac{\alpha}{\underline{V}^n} + \frac{(1-\alpha)\,y^n}{\underline{V}^n}$$

womit

$$\alpha = \frac{y^n\left[n\,y-(n-4)\right]}{\left[(n-2)-n\,y\right](1-y^n)}\,.$$

Wert des Spiels:

$$A = \frac{1}{\underline{V}^{n-2}}\left[\frac{n\,y-(n-2)}{n\,y}\right]^2.$$

437 Zusammenstellung

Mit Ausnahme der drei Entartungsfälle $n = 0, -1, -2$, ist das Verhältnis zwischen unterer und oberer Schranke für die optimalen Strategien massgebend. Ist es kleiner als y, so sind sowohl die optimalen Strategien, wie auch der Wert des Spiels nur von der einen Schranke abhängig. Die kritische Grösse y bestimmt sich aus einer algebraischen Gleichung und ist dieselbe für n und $-(n+2)$. Sie wächst mit wachsendem Betrag von n. Ihre ersten Werte lauten:

n	$-(n+2)$	y
1	—3	0,250
2	—4	0,414
3	—5	0,521
4	—6	0,596
5	—7	0,651

Ist das Verhältnis zwischen Minimum und Maximum grösser als y, zu welchen Fällen wir auch die drei Entartungsfälle rechnen können, besteht die optimale Strategie von M in einem verallgemeinerten Mittelwert der beiden Schranken, während N die Extremalwerte in einem bestimmten Verhältnis mischt, wie dies bei konvexen Spielen allgemein der Fall ist. Die für die Praxis am bedeutsamsten Fälle sind die drei Entartungsfälle $n = 0, -1, -2$:

a) $n = 0$: Auszahlung gleich dem Quadrat des absoluten Fehlers, optimaler Mittelwert: Arithmetisches Mittel;

b) $n = -1$: Auszahlung gleich Produkt aus relativem und absolutem Fehler,
optimaler Mittelwert: Geometrisches Mittel;

c) $n = -2$: Auszahlung gleich dem Quadrat des relativen Fehlers, optimaler Mittelwert: Harmonisches Mittel.

Damit erhalten wir eine spieltheoretische Deutung dieser Mittelwerte. Ferner ist zu beachten, dass die Mittelwerte für gleichen Betrag von n symmetrisch zum arithmetischen Mittel liegen.

Wenn diese Überlegungen vom theoretischen Standpunkt aus interessante Zusammenhänge aufdecken, so ist die praktische Verwendbarkeit doch beschränkt, da unserem Problem bekanntlich folgende Tatsachen zugrunde liegen:

1. Die Auszahlungsfunktion ist symbolisch.
2. Die Mittelwerte werden so bestimmt, dass das maximale Risiko minimal wird.
3. Wir nehmen an, N könne jede Strategie mit gleicher Berechtigung verwenden, d.h. die beiden Schranken seien wirklich die einzige Information, die M besitzt.

Damit wird wiederum die Bedeutung einer guten Abschätzung unterstrichen.

Literaturverzeichnis

Im Sinne einer möglichst gedrängten Dokumentation zitieren wir in erster Linie zusammenfassende Publikationen und verweisen auf die dort enthaltenen weiteren Literaturangaben.

[1] *Benjamin, S.* und *Bennett, C.W.:* The Application of Elementary Linear Programming to Approximate Valuation. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 84, 1958.

[2] *Bierlein, D.:* Optimalmethoden für die Summenapproximation in Jecklins F-Methode. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 2, 1955.

[3] – Spieltheoretische Modelle für Entscheidungssituationen des Versicherers. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 3, 1958.

[4] *Blackwell, D.* und *Girshick, M.A.:* Theory of Games and Statistical Decisions. New York-London 1954.

[5] *Cacace, F.:* Il calcolo per gruppi delle riserve matematiche. Genova 1956.

[6] *Frischknecht, M.:* Approximative Reservenberechnung mit Hilfe der linearen Programmierung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 60, 1960.

[7] *Gass, S.:* Linear Programming. New York-Toronto-London 1958.

[8] *Jecklin, H.:* Reserveberechnung nach t-Gruppen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 57, 1957.

[9] *Karlin, S.:* Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics. 2 Bde. London-Paris 1959.

[10] *McKinsey, J.:* Introduction to the Theory of Games. New York-Toronto-London 1952.

[11] *Meier, J.:* Kombinierte Einzel- und Gruppenrechnung zur Bestimmung des Bilanzdeckungskapitals in der Lebensversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 43, 1943.

[12] *Nolfi, P.:* Hinweise auf die Ergebnisse und Bedeutung der Spieltheorie. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 57, 1957.

[13] – Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 59, 1959.

[14] *Pöttker, W.:* Methoden zur summarischen Berechnung der Prämienreserve ohne Gruppierung des Versicherungsbestandes. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 1, 1950.

[15] – Eine Methode zur summarischen Berechnung der Prämienreserve ohne Hilfszahlen. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 1, 1953.

[16] *Stiefel, E.:* Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart 1961.

[17] *Wald, A.:* Statistical Decision Functions. New York-London 1950.

[18] *Wünsche, G.:* Reserveermittlung durch Stichproben in der Lebensversicherung. Mitteilungsblatt für mathematische Statistik, Jg. 3, 1951.

[19] *Zwinggi, E.:* Versicherungsmathematik. 1. Aufl. Basel 1945.

Résumé

L'auteur présente un modèle basé sur la théorie des jeux pour le calcul des réserves mathématiques et en examine les possibilités d'application pratique. Un chapitre spécial est consacré à la détermination des limites à l'aide de la programmation linéaire et un autre au choix optimum des valeurs moyennes qui répondent à la théorie des jeux, pour des limites préétablies.

Summary

For the calculation of mathematical reserves the author gives a model, based on the theory of games, and discusses the possibilities of practical application. He devotes a special chapter to the determination of limits with the aid of linear programming and another to the optimal choice of mean values within given limits by use of the theory of games.

Riassunto

L'autore presenta un modello dedotto dalla teoria dei giuochi per il calcolo di riserve matematiche e ne esamina le possibilità d'applicazione pratica. Egli dedica un capitolo speciale sia alla determinazione dei limiti con l'aiuto della programmazione lineare, sia alla scelta ottima, nel senso della teoria dei giuochi, di valori medi con limiti prescritti.