

# Un aspect du problème du risque

Autor(en): **Capt, Edmond**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **61 (1961)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966741>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Un aspect du problème du risque

*Par Edmond Capt, Zurich*

### Résumé

Comme on sait, la théorie de l'assurance-vie est basée sur l'hypothèse que les événements aléatoires (sinistres) sont mutuellement indépendants. Comme cette hypothèse n'est pas toujours réalisée, spécialement pas en cas de guerre ou d'épidémies, il peut arriver que les sinistres effectifs dépassent largement l'espérance mathématique théorique. On ne peut toutefois pas en conclure que les bases théoriques sont inutiles. L'auteur croit cependant qu'une étude plus approfondie des distributions empiriques de sinistres permettrait d'évaluer plus exactement le risque de grandes fluctuations des sinistres.

La notion d'«assurance» impliquant automatiquement celle de «risque», l'étude du risque et des problèmes qui s'y rattachent apparaît immédiatement comme étant l'une des bases de la science actuarielle. Mais cette étude, qui s'appuie sur le calcul des probabilités, peut-elle toujours apporter à l'actuaire une réponse pratiquement utilisable? Dans le présent exposé, nous nous proposons d'examiner un aspect de ce vaste problème, en nous fondant, entre autres travaux présentés au IX<sup>e</sup> congrès international des actuaires, tenu à Stockholm en 1930, sur celui de Monsieur S. Dumas.

#### **1<sup>o</sup> Le risque dans un grand nombre d'épreuves identiques et indépendantes les unes des autres**

Nous reprendrons tout d'abord, en suivant la théorie des probabilités, le problème du risque dans un jeu dit «équitable», c'est-à-dire où l'espérance mathématique de réaliser un gain est égale à celle de subir une perte, et nous envisagerons directement le cas du risque dans un grand nombre d'épreuves identiques et indépendantes les unes des autres.

Soient donc un événement  $F$  et sa probabilité d'être réalisé  $p$  (avec  $q = 1 - p$ ). On paie au joueur un montant  $A$  chaque fois que cet événement se réalise; l'enjeu sera par conséquent  $E = pA$ . Quel sera le risque de gain ou de perte si l'on procède à un grand nombre  $s$  d'épreuves identiques, c'est-à-dire portant toutes sur l'événement  $F$ ?

La probabilité de voir  $F$  se réaliser  $(sp + l)$  fois et ne pas se réaliser  $(sq - l)$  fois est donnée par:

$$P_{(sp+l)} = \frac{s!}{(sp+l)!(sq-l)!} p^{sp+l} q^{sq-l},$$

que l'on peut transformer, en utilisant la formule de Stirling, valable lorsque  $s$  est grand, pour obtenir l'expression approchée suivante:

$$P_{(sp+l)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{l^2}{2spq}}. \quad (1)$$

Dans ce cas, on paie  $(sp + l)A$ , alors que le montant total des enjeux n'était que de  $sE = spA$ ; la perte est donc de  $lA$ . Le risque absolu  $R'$  s'obtiendra dès lors en faisant la somme, pour tous les  $l$  positifs, des produits:

$$P_{(sp+l)} lA = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} lA e^{-\frac{l^2}{2spq}},$$

somme que l'on peut remplacer, avec une précision suffisante, par l'intégrale:

$$R' = \frac{A}{\sqrt{2\pi spq}} \int_0^{\infty} l e^{-\frac{l^2}{2spq}} dl.$$

En posant  $t = \frac{l}{\sqrt{2spq}}$ , nous obtiendrons finalement pour le risque absolu:

$$R' = A \sqrt{\frac{2spq}{\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt = A \sqrt{\frac{spq}{2\pi}}. \quad (2)$$

Quant au risque relatif, nous le calculerons en divisant le risque absolu par le montant total des enjeux, soit:

$$r = \frac{R'}{spA} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{q}{sp}} = 0,39894 \sqrt{\frac{q}{sp}}. \quad (3)$$

On voit, en examinant les expressions (2) et (3), que le risque absolu croît proportionnellement au montant  $A$  du prix et à la racine carrée du nombre des épreuves  $s$ , alors que le risque relatif décroît proportionnellement à cette dernière valeur  $\sqrt{s}$ .

Il convient encore, dans le cadre de cet aperçu théorique, d'exprimer la probabilité que l'écart, positif ou négatif, entre le montant à payer et le montant le plus probable  $spA$  soit inférieur à  $k$  fois le risque absolu. Selon le théorème de Bernoulli, la probabilité que l'événement  $F$  se réalise un nombre de fois compris entre  $(sp-l)$  et  $(sp+l)$  est donnée, avec une approximation suffisante, par l'expression :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2spq}}} e^{-t^2} dt. \quad (4)$$

C'est également la probabilité que le montant à payer soit compris entre  $(spA-lA)$  et  $(spA+lA)$ . Etant donné que  $l$  est un nombre entier, la relation :

$$lA = kR' = kA \sqrt{\frac{spq}{2\pi}}$$

ne pourra pas toujours être satisfaite,  $k$  étant aussi un nombre entier. Nous considérerons alors  $l$  comme une variable continue et écrirons :

$$\frac{l}{\sqrt{2spq}} = \frac{k}{2\sqrt{\pi}}.$$

Nous aurons ainsi, pour la probabilité cherchée, l'expression :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt = \Phi\left(\frac{k}{2\sqrt{\pi}}\right). \quad (5)$$

C'est en particulier la probabilité que, pour autant qu'on subisse une perte, celle-ci ne dépasse pas  $k$  fois le risque absolu.

## 2° Exemple I

Lorsque du IX<sup>e</sup> Congrès international des actuaires, l'un des sujets traités avait pour titre «Le problème du risque» et était formulé de la façon suivante : «La pratique de l'assurance sur la vie peut-elle espérer

quelque avantage des recherches théoriques soit sur le risque mathématique, soit sur d'autres questions analogues?» Monsieur S. Dumas s'est penché sur ce sujet et a présenté au dit Congrès un rapport succinct, mais qui présente l'avantage de s'appuyer sur un exemple pratique et particulièrement intéressant que nous reprendrons ci-dessous.

Monsieur Dumas relève tout d'abord que jusqu'à maintenant, en matière d'assurance sur la vie, l'étude mathématique du risque a toujours eu pour base le théorème de Bernoulli, partant ainsi de l'hypothèse que les décès étaient indépendants les uns des autres. Or il est clair qu'une telle hypothèse est erronée. On sait en effet que la mortalité peut varier, par exemple, selon l'état-civil; dans d'autres cas, les décès ont une cause commune bien définie, comme une guerre ou une épidémie. On ne peut alors logiquement affirmer qu'il s'agit d'événements indépendants. Il est toutefois intéressant d'admettre un instant cette indépendance et d'examiner quelles en sont les conséquences numériques, en appliquant à un cas pratique les développements théoriques — en particulier la formule (4) — figurant dans la première partie de cet exposé.

Monsieur Dumas a alors considéré l'épidémie de grippe de 1918 en Suisse. L'événement sous le risque étant le décès, les calculs ont été quelque peu simplifiés en ne faisant, dans la détermination de la probabilité annuelle de décès, aucune distinction d'âge ou de sexe; il s'agit donc d'une probabilité moyenne, calculée sur l'ensemble de la population suisse. Les principales valeurs numériques relatives à cet exemple sont les suivantes:

$$\begin{aligned} q &= \text{probabilité annuelle de décès (période 1911-1920)} &= & 0,01478, \\ p &= 1 - q = \text{probabilité annuelle de survie} \dots\dots\dots &= & 0,98522, \\ s &= \text{population suisse en 1918 (évaluation)} \dots\dots\dots &= & 3\,879\,610. \end{aligned}$$

Partant de ces valeurs, le nombre présumé de décès en 1918 était de 57 341; mais en réalité, par suite de l'épidémie de grippe, il fut de 75 034. La différence, soit l'écart  $l$ , fut donc de 17 693. A l'aide du théorème de Bernoulli, c'est-à-dire de la formule (4), nous pouvons alors calculer la probabilité que l'écart en valeur absolue soit supérieur ou égal à 17 693; nous trouvons:

$$p = 4,1 \cdot 10^{-1206}.$$

Cette probabilité est si petite qu'il est impossible de se la représenter.

On pourrait éventuellement, pour être plus précis, tenir compte encore de l'âge et du sexe des personnes sous le risque, mais il est clair que cela ne modifierait pas nos conclusions. Ainsi donc, le résultat obtenu ci-dessus montre de façon indéniable que l'hypothèse selon laquelle les décès sont indépendants les uns des autres conduit à un résultat erroné et inadmissible.

Malheureusement il n'existe pas de théorème analogue à celui de Bernoulli, mais s'appliquant à des événements dépendants les uns des autres. C'est pourquoi nous ne pouvons pas à l'heure actuelle résoudre par des méthodes scientifiques le problème du risque dans l'assurance sur la vie. Nous savons cependant que les réserves destinées à couvrir le risque des fluctuations de la mortalité doivent être très élevées. A l'appui de cette affirmation, nous relèverons simplement qu'en 1918 l'extinction des capitaux par décès en Suisse a été, pour l'ensemble des sociétés d'assurances soumises à la surveillance de la Confédération, de 50–100 % supérieure aux années 1916–1917 et 1919–1920. D'autre part, au cours de cette même année, dans les grandes assurances en cas de décès, les sinistres se sont montés à :

Décès dus à la grippe . . . . .	fr. 6 316 123
Décès dus à la guerre . . . . .	» 103 571
Décès dus à d'autres causes . . . . .	» 5 951 314
	<u>soit au total à fr. 12 371 008</u>

On voit ainsi que plus de la moitié des sommes versées se rapporte aux décès dus à la grippe. Toutefois les sociétés d'assurances ont pu faire face aux conséquences financières de cette énorme mortalité parce qu'elles disposaient de très fortes réserves libres, destinées justement à couvrir ce risque, indéterminable scientifiquement, des fluctuations de la mortalité.

### 3° Exemple II

Afin de donner une portée plus générale à notre exposé, il nous a paru intéressant d'appliquer personnellement cette même théorie à deux autres exemples.

Nous avons tout d'abord considéré la mortalité par tuberculose parmi la population suisse de moins de 20 ans en 1943 <sup>1)</sup>. La proba-

---

<sup>1)</sup> Cf. Bulletin de l'Association des actuaires suisse, 1950: «L'infection et la mortalité par tuberculose» par MM. E. et A. Urech.

bilité de décès que nous indiquons ci-dessous est une probabilité moyenne calculée sur l'ensemble des enfants de moins de 20 ans, sans distinction d'âge ou de sexe. Partant alors des valeurs numériques suivantes:

$q^{tbc}$ = probabilité annuelle de décès par tuberculose des enfants de moins de 20 ans (période 1940 à 1946) . . . . .	0,000276
$1 - q^{tbc}$ = probabilité annuelle de ne pas décéder par tuberculose des enfants de moins de 20 ans .	0,999724
$s$ = population suisse de moins de 20 ans en 1943 (évaluation) . . . . .	1 390 000,

le nombre présumé de décès en 1943 était de 384. Il fut en réalité de 356; l'écart  $l$  fut donc de 28. A l'aide du théorème de Bernoulli, nous avons alors calculé la probabilité que l'écart en valeur absolue soit supérieur ou égal à 28 et obtenu :

$$p = 0,153.$$

Ce résultat, contrairement au précédent, a une valeur pratique certaine. Cela provient d'une part du fait que l'écart  $l$  est plus petit et d'autre part de ce que les décès sont ici moins dépendants les uns des autres. Il ne s'agit en effet plus d'une épidémie, mais d'une maladie dont les effets se firent sentir avec une certaine régularité durant la période observée.

### 4<sup>o</sup> Exemple III

Comme dernier exemple, nous avons pris l'invalidité dans la Caisse de pensions et de secours des chemins de fer fédéraux en 1922<sup>1)</sup>. Nous sommes parti également d'une probabilité moyenne de devenir invalide et avons fait nos calculs sur la base des valeurs numériques suivantes:

$i$ = probabilité annuelle de devenir invalide (période 1915–1925) . . . . .	0,032
$1 - i$ = probabilité annuelle de ne pas devenir invalide . .	0,968
$s$ = nombre d'assurés à la Caisse de pensions en 1922 .	22 156

---

<sup>1)</sup> Cf. Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1930: «Sur les bases techniques de l'assurance collective» par M. A. Urech.

Le nombre présumé de nouveaux invalides en 1922 était donc de 709, mais il fut effectivement de 1571, d'où un écart  $l$  de 862. A l'aide du théorème de Bernoulli, nous obtenons comme probabilité que l'écart en valeur absolue soit supérieur ou égal à 862 :

$$p = 1,9 \cdot 10^{-237}.$$

Comme dans l'exemple I, ce résultat ne saurait être admis. La cause en est que les nouveaux cas d'invalidité n'étaient nullement indépendants les uns des autres et étaient dus avant tout à des raisons d'ordre économique, social et administratif. En effet, en août 1921, les statuts de la Caisse de pensions étaient révisés et les rentes améliorées. Dès lors nombre d'assurés, contraints de travailler pour assurer leur existence, se déclarèrent invalides, les nouvelles rentes leur permettant de vivre. Quant à l'administration, par suite d'une crise des transports, elle n'avait aucun motif d'enrayer cette réduction de personnel.

### 5° Considérations sur la théorie du risque et ses applications

Que déduire de la confrontation des exemples ci-dessus et de la théorie présentée en première partie de notre exposé? Nous nous trouvons en présence d'une part d'une théorie purement mathématique, donnant — sous certaines hypothèses qui ne sont pas nécessairement réalisées dans la pratique — une solution scientifique au problème du risque, et d'autre part d'exemples tirés de l'expérience et dans lesquels est appliquée la théorie en question.

Ces exemples montrent que cette théorie peut conduire à des résultats inadmissibles. Faut-il en conclure qu'elle est fautive? Certainement pas. Mais il y a parfois incompatibilité, en ce sens que la théorie du risque, rigoureuse sur le plan scientifique, n'est pas toujours adéquate sur le plan pratique; elle conduit, dans certains cas, à des probabilités absurdes, qui rendent impossible la détermination convenable des primes de risque ou des réserves de risque correspondantes. La raison en est simple: pour établir une théorie du risque, on est obligé de simplifier beaucoup, d'adopter des hypothèses qui s'écartent trop de la réalité; les conclusions s'en ressentent à tel point qu'elles doivent parfois être rejetées.

La théorie s'appuie en effet sur l'hypothèse que les événements en cause sont indépendants les uns des autres, hypothèse qui, de toute



évidence, n'est pas réalisée dans la pratique où il existe toujours une certaine dépendance entre les événements assurés. Pour y remédier, il faudrait, comme nous l'avons déjà relevé, pouvoir s'appuyer sur un théorème analogue à celui de Bernoulli. mais s'appliquant à des événements dépendants les uns des autres. Le calcul des probabilités, et partant la théorie du risque, doit encore beaucoup progresser de ce côté-là, car il n'existe pas actuellement de théorème semblable. D'ailleurs, même s'il y en avait un, il subsisterait un obstacle important à surmonter lors de son application. En effet, il faudrait encore mesurer l'interdépendance des événements sous le risque et le calcul numérique se heurterait à la difficulté qu'il y aurait à déterminer les coefficients donnant la mesure de la dépendance, cela faute de statistiques suffisamment nombreuses et détaillées pour tenir compte de tous les facteurs pouvant intervenir.

Il ne faudrait cependant pas déduire de ce qui précède que toute théorie mathématique des assurances repose sur des bases inutiles. La théorie actuarielle, qui s'appuie sur l'expérience et l'observation directe, est basée sur celle des probabilités, avec laquelle elle est étroitement liée. Et les méthodes dont nous disposons actuellement donnent malgré tout dans nombre de cas des résultats suffisamment exacts pour être utilisés, que ce soit par exemple dans le calcul des primes ou dans la détermination des réserves mathématiques; en revanche, dans d'autres circonstances, ces résultats doivent souvent être rejetés parce que les erreurs qu'ils comportent les rendent inadmissibles, comme dans le problème plus difficile du risque, qui n'a pas encore trouvé sur le plan pratique de solution convenable. C'est d'ailleurs là un fait courant dans les mathématiques appliquées.

Mais, bien que le calcul des probabilités conduise à des conclusions qui ne sont jamais absolues, les exemples concrets pouvant parfois les contredire, on ne saurait nier la valeur du calcul appliqué aux questions de hasard, et l'utilité des recherches théoriques nous paraît incontestable. En outre, lorsqu'on entreprend une étude théorique, on ignore souvent quelle en sera finalement la portée pratique. Ainsi le raisonnement de Gompertz relatif au taux instantané de mortalité, bien que peu concluant en soi, a été à l'origine de la formule de Makeham dont les applications sont aujourd'hui nombreuses et d'une grande utilité pour l'actuaire; il en est de même des travaux de Moser dans l'assurance en cas de maladie, en ce qui concerne le facteur de réduction.

Les recherches théoriques sont donc d'une valeur certaine, à condition de s'efforcer d'en dégager des directives toujours plus précises.

C'est le cas notamment de l'étude du risque dans l'assurance. On ne peut en particulier éliminer actuellement, dans l'assurance sur la vie, l'influence des fluctuations de la mortalité, car l'on ne connaît pas encore la loi exacte des écarts de mortalité. On admet donc que ceux-ci suivent la loi de Gauss et jusqu'ici rien n'a infirmé cette hypothèse. Mais une comparaison des écarts réels aux écarts théoriques devrait pouvoir fournir les éléments d'une étude plus approfondie permettant de dégager une loi de répartition plus conforme à la réalité que celle de Gauss. Il serait alors possible d'utiliser des méthodes de calcul plus efficaces contre les risques inhérents aux variations de grande amplitude.

D'autre part, nous voyons dans les recherches théoriques sur le risque un dernier avantage, qui n'est certes pas le moins important. La théorie des probabilités permet en effet de savoir jusqu'à quel point on peut affirmer vraie une loi vérifiée un grand nombre de fois. Et l'actuaire, qui est constamment appelé à appliquer cette théorie, aura tout intérêt à se familiariser avec l'étude du risque, même s'il en ignore l'utilité immédiate ou s'il doit souvent en simplifier les données, car il pourra en tirer des enseignements précieux pour les cas plus compliqués et acquérir ainsi cette formation particulière que donne l'étude du hasard.

Pour conclure, nous ajouterons que les considérations présentées ci-dessus, que ce soit sur la théorie du risque et ses applications ou sur la valeur des recherches théoriques dans ce domaine, reflètent d'ailleurs l'opinion de plusieurs auteurs qui ont traité cette question lors du IX<sup>e</sup> Congrès international des actuaires à Stockholm.

## Zusammenfassung

Die Theorie der Lebensversicherung fusst bekanntlich auf der Hypothese, dass die zufälligen Schadenereignisse voneinander unabhängig sind. Da diese Annahme nicht stets zutreffend ist, besonders nicht in Kriegs- und Epidemiezeiten, können sich in der Praxis Schadenwerte ergeben, welche die theoretischen Erwartungswerte weit übertreffen. Es kann daraus jedoch keineswegs geschlossen werden, dass die theoretischen Grundlagen nutzlos sind. Verfasser glaubt aber, dass ein genaueres Studium der empirischen Schadenverteilungen dazu führen könnte, das Risiko grosser Schadenamplituden rechnermässig besser zu erfassen.

## Summary

As is known, the theory of life assurance is based on the assumption of mutually independent random events (claims). Since this assumption is not always true, especially not in times of war and epidemics, the actual claims could in reality exceed the theoretically expected values to a large extent. This should nevertheless not lead to the conclusion that the theoretical bases are useless. The author believes, however, that a closer study of the empirical loss distributions may lead to a more accurate evaluation of the risk arising from large claim fluctuations.

## Riassunto

La teoria dell'assicurazione vita si basa, come è noto, sull'ipotesi che i sinistri individuali rappresentano degli eventi aleatorii indipendenti l'uno dall'altro. Siccome questa ipotesi non è sempre giusta, particolarmente in tempo di guerra o di epidemia, può darsi il caso che in pratica i sinistri superano largamente la speranza matematica teorica. Ciò non deve indurre a concludere che le basi teoriche siano prive di utilità. L'autore crede però, che uno studio più approfondito della distribuzione empirica dei sinistri potrebbe condurre ad un miglior calcolo del rischio nel caso di grande ampiezza di sinistri.