

Über eine Anwendung gewogener geometrischer Mittelwerte

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **62 (1962)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555007>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über eine Anwendung gewogener geometrischer Mittelwerte

Von *H. Jecklin, Zürich*

Zusammenfassung

Ausgehend von der Frage, ob es der Natur möglich sei, einen mittleren Menschen hervorzubringen, wird gezeigt, wie sich bei der Mittelbildung von ähnlichen Figuren und von ähnlichen Körpern die Anwendung gewogener geometrischer Mittelwerte ergibt. Anschliessend wird das Problem der Bildung von medizinischen Konstitutionsindizes kurz gestreift.

In dem schönen Aufsatz über Mittelwerte, den P. Nolfi dem Verfasser zum 60. Geburtstag widmete ¹⁾, zitiert er ein amüsanter Beispiel, das Josef Bertrand gegeben hat um darzulegen, dass es der Natur nicht möglich ist, einen Menschen mit mittleren Körpermassen zu produzieren. Gemeint ist hiebei offenbar, dass bei demselben alle verschiedenen Körpermasse Mittelwerte gleicher Art, nämlich arithmetische Mittel, aus den bezüglichen Massen der Einzelindividuen einer menschlichen Gesamtheit sein sollten. Um die Fragestellung auf ein vereinfachtes Modell zu übertragen, werden zwei geometrische Kreiszyylinder betrachtet. Der eine hat eine Grundfläche von einem Quadratmeter und eine Höhe von einem Meter, der andere je doppelt so viel. In arithmetischer Mittelung weist dann der mittlere Zylinder eine Grundfläche von $1,5 \text{ m}^2$ und eine Höhe von $1,5 \text{ m}$ auf. Sein Volumen beträgt $2,25 \text{ m}^3$, während das arithmetische Mittel aus den Inhalten der beiden andern Zylinder $2,5 \text{ m}^3$ beträgt. Bestehen die drei Zylinder aus gleichem Material, so gelangt man für den mittleren derart auch zu zwei verschiedenen Gewichten, wobei offensichtlich das durch arithmetische Mittelbildung aus den Gewichten der beiden andern Zylinder erhaltene Resultat falsch ist.

¹⁾ Neue Zürcher Zeitung Nr. 2322 vom 20. Juni 1961.

An sich ist das Beispiel durchaus zweckentsprechend und ausserdem zeigt es, dass man auch in scheinbar einfach gelagerten Fällen mit der unüberlegten Verwendung eines Durchschnittswertes vorsichtig sein muss. Deshalb mag das Beispiel Anlass zu einigen Überlegungen geben. Da wäre vorerst auf einen gewissen Schönheitsfehler hinzuweisen, indem der mittlere Zylinder gewonnen wird durch arithmetische Mittelbildung aus den Grundflächen der beiden gegebenen Zylinder einerseits und aus deren Höhen andererseits. Es werden also zweidimensionale und eindimensionale Elemente in gleicher Behandlung zusammen verwendet, was einiges Misstrauen erwecken kann. Und hieraus resultiert sofort die Frage, ob es denn angemessen ist, durchwegs mit dem arithmetischen Mittel zu operieren.

Wir wollen von einem noch einfacheren Beispiel ausgehen. Es seien zwei Quadrate gegeben, das eine mit Seitenlänge a , das andere mit Seitenlänge b , wobei $a \neq b$. Dann ist die Fläche F_3 des Quadrates mit Seitenlänge $\frac{1}{2}(a+b)$ offenbar

$$F_3 = \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + ab \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{F_1 + F_2}{2} + \sqrt{F_1 F_2} \right), \quad (\text{I})$$

wenn wir die Flächen der beiden gegebenen Quadrate mit F_1 , resp. F_2 bezeichnen. Es ist also die Fläche eines Quadrates, dessen Seite das arithmetische Mittel der Seiten zweier anderer Quadrate ist, gleich der Hälfte von arithmetischem Mittel plus geometrischem Mittel der Flächen dieser zwei Quadrate. Nachdem jedoch das geometrische Mittel kleiner ist als das arithmetische Mittel, ist sicher

$$F_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{F_1 + F_2}{2} + \sqrt{F_1 F_2} \right) < \frac{F_1 + F_2}{2}, \text{ für } a \neq b. \quad (\text{II})$$

Man wird sich sofort fragen, ob die einfache Beziehung (I) in der allgemeinen Fassung

$$F_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{F_1 + F_2}{2} + \sqrt{F_1 F_2} \right) \quad (\text{III})$$

auch für andere Figuren als Quadrate gilt. Alle Quadrate sind bekanntlich ähnliche Figuren, und so liegt die Vermutung nahe, dass die Beziehung (III) für ähnliche Figuren schlechthin zutrifft, was leicht zu zeigen ist. Zwei ebene Figuren sind ähnlich, wenn der Abstand zweier beliebiger Punkte der einen Figur und der Abstand der zwei entsprechen-

den Punkte der andern Figur durchwegs ein konstantes Verhältnis k aufweisen. Daraus ist zu folgern, dass bei ähnlichen Figuren alle einander entsprechenden linearen Gebilde (Strecken, Seiten, Umfang usw.) ein konstantes Verhältnis k haben. Weiter folgt, dass die Flächen oder entsprechende Teilflächen ähnlicher ebener Figuren im konstanten Verhältnis k^2 stehen. Nehmen wir als Beispiel zwei Kreise:

Radius	$r_1 = a$	$r_2 = b$	$r_1/r_2 = a/b = k$
Umfang	$u_1 = 2a\pi$	$u_2 = 2b\pi$	$u_1/u_2 = a/b = k$
Viertelssehne	$s_1 = \sqrt{2a^2}$	$s_2 = \sqrt{2b^2}$	$s_1/s_2 = a/b = k$
Fläche	$F_1 = a^2\pi$	$F_2 = b^2\pi$	$F_1/F_2 = a^2/b^2 = k^2$.

Nunmehr ist der Beweis von Gleichung (III) einfach. Gegeben seien zwei ebene ähnliche Figuren. Als Funktionen linearer Gebilde ist die Fläche der ersten Figur darstellbar als $F_1 = a \cdot af$, und ist b in der zweiten Figur das dem Gebilde a der ersten Figur entsprechende Gebilde, so ist die Fläche der zweiten Figur $F_2 = b \cdot bf$. (Beim vorherigen Kreisbeispiel ist also $f = \pi$.) Die auf Basis des Durchschnitts $\frac{1}{2}(a + b)$ gebildete ähnliche mittlere Figur hat offenbar die Fläche

$$F_3 = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{af+bf}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\frac{a^2+b^2}{2} + fab\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_1+F_2}{2} + \sqrt{F_1F_2}\right),$$

was zu zeigen war. Im Hinblick auf (II) können wir somit festhalten: Das arithmetische Mittel der Flächen zweier ähnlicher ebener Figuren ist grösser als die aus dem arithmetischen Mittel einander entsprechender linearer Gebilde gewonnene mittlere Fläche.

Die Übertragung auf den Raum ist unschwer. Körper sind ähnlich, wenn alle einander entsprechenden linearen Gebilde in konstanter Proportion k stehen. Einander entsprechende Flächen stehen dann im konstanten Verhältnis k^2 , und die Volumen oder einander entsprechende Volumenteile im konstanten Verhältnis k^3 . Oder umgekehrt: Zwei Körper mit den Volumen V_1 und V_2 sind ähnlich, wenn entsprechende Volumenteile im konstanten Verhältnis V_1/V_2 stehen, einander entsprechende Flächen im konstanten Verhältnis $\sqrt[3]{V_1^2}/\sqrt[3]{V_2^2}$, und einander entsprechende lineare Gebilde im konstanten Verhältnis $\sqrt[3]{V_1}/\sqrt[3]{V_2}$.

Haben wir zwei ähnliche Körper, so sind deren Volumen V_1 und V_2 offenbar wie folgt darstellbar

$$\begin{aligned} V_1 &= a \cdot af \cdot ag = a^3fg, \\ V_2 &= b \cdot bf \cdot bg = b^3fg. \end{aligned}$$

Bilden wir nun einen mittleren Körper auf Basis arithmetischer Mittelbildung einander entsprechender linearer Gebilde, so ist dessen Volumen V_3 darstellbar

$$\begin{aligned} V_3 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{af+bf}{2}\right)\left(\frac{ag+bg}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 fg = \\ &= \frac{fg}{8}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \frac{1}{8}(V_1 + 3\sqrt[3]{V_1^2 V_2} + 3\sqrt[3]{V_1 V_2^2} + V_2). \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

In Verallgemeinerung auf n Dimensionen haben wir gemäss binomialer Entwicklung: Sind gegeben zwei n -dimensionale ähnliche Körper mit den Voluminen ${}_{(n)}V_1$ und ${}_{(n)}V_2$ und bildet man einen mittleren Körper, ausgehend von arithmetischer Mittelbildung einander entsprechender linearer Gebilde, so hat der mittlere Körper das Volumen

$${}_{(n)}V_3 = \frac{1}{2^n} \sum_k^n \binom{n}{k} \sqrt[{}]{{}_{(n)}V_1^{n-k} {}_{(n)}V_2^k}. \quad (\text{V})$$

Für $n = 1$ entspricht dies dem arithmetischen Mittel.

Kehren wir nun zum anfänglichen Beispiel von Kreiszyklindern zurück, aber wählen diese so, dass sie ähnlich sind. Der erste habe einen Radius der Grundfläche von $r_1 = 1$ und eine Höhe $h_1 = 1$, sein Volumen V_1 ist also $r_1^2 \pi h_1 = \pi$. Der zweite habe einen Radius $r_2 = 2$ und die Höhe $h_2 = 2$, sein Volumen V_2 ist mithin $r_2^2 \pi h_2 = 8\pi$. Bilden wir nun einen mittleren Zylinder mit Radius $r_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 1,5$ und Höhe $h_3 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = 1,5$, so ist sein Volumen V_3 offenbar $r_3^2 \pi h_3 = 3,375 \pi$. Nach unseren Darlegungen muss aber auch gelten:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{8}(V_1 + 3\sqrt[3]{V_1^2 V_2} + 3\sqrt[3]{V_1 V_2^2} + V_2) = \\ &= \frac{\pi}{8}(1 + 3\sqrt[3]{8} + 3\sqrt[3]{64} + 8) = \frac{\pi}{8}(1 + 6 + 12 + 8) = 3,375 \pi. \end{aligned}$$

Erstreckt sich die Mittelbildung auf mehr als zwei ähnliche Körper, so erhalten wir zu (V) analoge Mittelwerte auf Basis polynomialer Entwicklung. Prinzipiell ist es also möglich, ein dimensionsabhängiges Mittelwertsystem aufzustellen, bei dem sich bei Konstruktion eines mittleren Körpers bei sinngemässer Mittelwertzuordnung kein scheinbarer Widerspruch ergibt. Aber auch unter Beizug eines solchen Mittelwertsystems würde die Konstruktion eines mittleren Menschen scheitern an der Tatsache, dass die Menschen in geometrischer Sicht nicht ähnlich sind, von andern unterschiedlichen Eigenschaften ganz zu schweigen.

Trotzdem hat unser Problem möglicherweise einen gewissen Zusammenhang mit der Risikotarifizierung in der Lebensversicherung. Durch die sogenannten Konstitutionstabellen wird bekanntlich das normale menschliche Körpergewicht in Funktion von linearen Körpermassen (und eventuell des Alters) angegeben. Im allgemeinen sind diese Schätzformeln eine lineare Funktion mehrerer Variablen, also wenn a, b, c, \dots Konstanten

$$g = a + bx + cy + dz + \dots \quad (\text{VI})$$

Eine der neuesten derartigen Tafeln ist von H. Döring publiziert worden ¹⁾. Daneben gibt es auch einfachere Schätzfunktionen. Bekannt ist die allzu einfache Regel: Gewicht in Kilo gleich Körperhöhe in cm minus 100. Hiernach würde einem cm Längendifferenz ein Kilo Gewichts-differenz entsprechen. Döring nennt als besseren einfachsten Ansatz

$$g(x) = 0,793x - 60,83, \quad (\text{VII})$$

wenn $g =$ Gewicht in kg, $x =$ Körperhöhe in cm. Bei Zunahme der Körperhöhe um ein cm erhöht sich hier also das Gewicht um 0,793 kg. Im Falle der Annahme gewöhnlicher linearer Beziehung gilt natürlich, dass das Gewicht einer aus x_1 und x_2 gemittelten Körperlänge gleich dem gemittelten Gewicht ist, nämlich

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x_1) + g(x_2)).$$

¹⁾ H. Döring: Zur Bestimmung des Körpergewichts mit Hilfe von Körpermassen. (Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. IV, Heft 2, April 1959.)

Auf Basis der Annahme einer in erster Näherung zulässigen geometrischen Ähnlichkeit der Probanden müsste sich für die Beziehung zwischen Gewicht und Körperlänge nach vorherigen Ausführungen jedoch eher ein kubischer Ansatz eignen, etwa

$$g(x) = ax^3. \quad (\text{VIII})$$

Dies ist für $x > 0$ eine monoton wachsende konkave Funktion, also

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(g(x_1) + g(x_2)).$$

Sollte sich mit dem kubischen Ansatz gegenüber der einfachsten linearen Schätzfunktion eine wesentliche Verbesserung ergeben, so würde daraus z. B. folgen, dass bei Normalgrösse Übergewicht strenger zu beurteilen ist, als dies auf Basis linearer Schätzfunktion geboten erscheint. Doch seien keine voreiligen Schlüsse gezogen. Die Annahme der geometrischen Ähnlichkeit ist ja nicht haltbar, denn es trifft sicher nicht zu, dass mit einer Änderung der menschlichen Körperlänge durchschnittlich eine proportionale Änderung der Körperradien (z. B. des Brustkorbes) einhergeht. Es ist darum nicht erstaunlich, wenn die bekannte Schätzformel von Davenport mit quadratischem Ansatz für die Beziehung zwischen Gewicht und Länge (also gewissermassen eine mittlere Wahl zwischen linearem und kubischem Ansatz) sich als gut geeignet erweist. Für europäische männliche Individuen gilt hiernach

$$g = x^2(24 \pm 3), \quad (\text{IX})$$

g = Gewicht in Kilo, x = Länge in Metern. Der Quotient aus Gewicht und Längenquadrat ist also eine fixe Indexzahl.

Wenn man bedenkt, dass lineare Schätzfunktionen für das Körpergewicht auf geographisch oder rassisch beschränkte Gebiete anzuwenden sind und wirklich befriedigende Resultate nur liefern, wenn als Bezugsgrössen ausser der Körperlänge noch Alter, Brustumfang und Bauchumfang beigezogen werden, so scheint es doch eine wertvolle Aufgabe zu sein, Indexzahlen der Art $J = g/x^p$ nach Geschlecht, Rasse und Konstitutionstypus zu berechnen. Dabei wäre statistisch noch zu sondieren, ob für die Körperlänge x besser ein quadratischer oder ein kubischer Ansatz zu wählen ist.

Résumé

En partant de la question de savoir si la nature est en mesure de créer un homme de constitution moyenne, l'auteur montre que l'établissement de moyennes entre des figures semblables et des corps semblables conduit à des moyennes géométriques pondérées. Pour terminer, le problème de la recherche d'indices médicaux relatifs à la constitution humaine est abordé.

Summary

Starting from the question whether it is possible to nature to produce a middle human being, it is shown how the taking of averages for similar forms and bodies results in an application of weighted geometrical means. Subsequently the problem of forming medical constitution indices is briefly discussed.

Riassunto

Prendendo avvio dalla questione se è possibile alla natura creare un essere umano medio, l'autore mostra come nella determinazione di un valore medio per analoghe figure e per analoghi corpi trovano applicazione valori geometrici medi ponderati. Infine tratta brevemente il problema della fissazione di inizi di natura costituzionale.