

# Über Zusammenhänge zwischen einfachen Funktionalgleichungen und elementaren Mittelwerten

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **63 (1963)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966924>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Wissenschaftliche Mitteilungen

---

### Über Zusammenhänge zwischen einfachen Funktionalgleichungen und elementaren Mittelwerten

Von H. Jecklin, Zürich

Meinem lieben Kollegen Prof. P. Nolfi,  
dem jugendlichen Sechziger, in Freundschaft gewidmet

#### Zusammenfassung

In Ergänzung eines früheren Aufsatzes wird das gewogene Potenzmittel zweier fester Grössen in Funktion der Gewichte geometrisch interpretiert und gezeigt, dass bei den sich ergebenden Flächen die durch Schnitt mit bestimmten Ebenen entstehenden Kurven gerade jene Funktionen liefern, welche die einzige Lösung von erweiterten einfachsten Funktionalgleichungen darstellen.

Die nachfolgenden Ausführungen bilden gewissermassen eine Ergänzung zum Aufsatz «Über eine Anwendung gewogener geometrischer Mittelwerte<sup>1)</sup>». Dort findet sich auf Seite 23 die Aussage: Bildet man aus zwei  $n$ -dimensionalen ähnlichen Körpern mit den Volumina  ${}_{(n)}V_1$  und  ${}_{(n)}V_2$  einen mittleren Körper, ausgehend von arithmetischer Mittelbildung einander entsprechender linearer Gebilde, so ist das Volumen  ${}_{(n)}V_3$  des mittleren Körpers gegeben durch die Formel

$${}_{(n)}V_3 = \frac{1}{2^n} \sum_k^n \binom{n}{k} \sqrt[n]{{}_{(n)}V_1^{n-k} {}_{(n)}V_2^k}.$$

Es ist dies eine geometrische Einkleidung der einfachen Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2^n} (f^{1/n}(x) + f^{1/n}(y))^n = \frac{1}{2^n} \sum_k^n \binom{n}{k} (f^{n-k}(x) f^k(y))^{1/n}, \quad (\text{I})$$

hier gültig für die Funktion  $f(x) = cx^n$ ,  $c > 0$  konst.,  $n > 0$  ganz, und

---

<sup>1)</sup> «Mitteilungen» Bd. 62, Heft 1.

es erhebt sich die Frage, ob ausser dieser einfachen Potenzfunktion noch andere Funktionen die Funktionalgleichung (I) erfüllen können.

Wir erinnern an das Faktum<sup>1)</sup>, dass die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\text{II})$$

nur erfüllt wird durch  $f(x) = cx$ ,  $c$  konst., und dass die Gleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad (\text{III})$$

nur erfüllt wird durch die lineare Funktion  $f(x) = a + bx$ , wobei  $a$  und  $b$  konst. Die erste dieser beiden Funktionalgleichungen ist bekannt unter der Bezeichnung Cauchysche Gleichung, die zweite ist die Jensensche Gleichung.

Betrachten wir nun vorerst die Potenzfunktion

$$g(x) = cx^n = (bx)^n = (f(x))^n,$$

wobei  $b^n = c$ ,  $bx = (g(x))^{1/n} = f(x)$ ,  $c = \text{konst.}$  und für gerades  $n$  positiv,  $n > 0$  ganz. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= [g(x+y)]^{1/n} = g^{1/n}(x) + g^{1/n}(y), \\ g(x+y) &= [g^{1/n}(x) + g^{1/n}(y)]^n = \sum_0^n \binom{n}{k} [g^{n-k}(x) g^k(y)]^{1/n}. \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Für  $n = 1$  resultiert der einfache Ausgangsfall (II).

Nunmehr nehmen wir die Funktion

$$g(x) = cx^{1/n} = (bx)^{1/n} = (f(x))^{1/n},$$

wobei  $b = c^n$ ,  $bx = (g(x))^n = f(x)$ ,  $c = \text{konst.}$  und  $> 0$ ,  $n > 0$  ganz.

Es folgt:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= [g(x+y)]^n = g^n(x) + g^n(y), \\ g(x+y) &= [g^n(x) + g^n(y)]^{1/n}. \end{aligned} \quad (\text{V})$$

Für  $n = 1$  resultiert wieder Ausgangsgleichung (II).

Aus (IV) und (V) folgt demnach: Für die Funktion  $f(x) = cx^n$ ,  $c > 0$ ,  $n > 0$ , gilt, gleichviel, ob  $n$  ganz oder gebrochen,

$$f(x+y) = [f^{1/n}(x) + f^{1/n}(y)]^n. \quad (\text{VI})$$

<sup>1)</sup> J. Aczél: Ein Blick auf Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.)

Nun bilden wir mit  $m > 0$  auf Basis von (VI) die folgende Funktionalgleichung

$$f[m(x+y)] = [m(bx+by)]^n = m^n(bx+by)^n = m^n[f^{1/n}(x) + f^{1/n}(y)]^n. \quad (\text{VII})$$

Hiemit ist offenbar eine allgemeine Inter- und Extrapolation für  $f(x) = cx^n$ ,  $c > 0$ , gegeben. Für  $m = \frac{1}{2}$  insbesondere folgt hieraus:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2^n} [f^{1/n}(x) + f^{1/n}(y)]^n = \frac{1}{2^n} \sum_k^n \binom{n}{k} (f^{n-k}(x) f^k(y))^{1/n},$$

womit, ausgehend von (II), die Gleichung (I) gewonnen und gezeigt ist, dass auch sie für gebrochenes  $n > 0$  gilt. Dagegen ist noch nicht gesagt, ob auch andere Funktionen als  $cx^n$  die Gleichung (I) erfüllen können.

Wir betrachten nunmehr die Funktion  $g(x) = (a+bx)^n$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $n > 0$  ganz. Es ist also  $(a+bx) = (g(x))^{1/n} = f(x)$ , und es folgt

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left[g\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^{1/n} = \frac{1}{2} (g^{1/n}(x) + g^{1/n}(y)), \quad (\text{VIII})$$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} (g^{1/n}(x) + g^{1/n}(y))\right]^n = \frac{1}{2^n} \sum_k^n \binom{n}{k} (g^{n-k}(x) g^k(y))^{1/n}.$$

Für  $a = 0$  haben wir, mit  $b^n = c$ , wieder Ausgangsgleichung (I).

Nehmen wir dagegen die Funktion  $g(x) = (a+bx)^{1/n}$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $n > 0$  ganz, so ist  $(a+bx) = (g(x))^n = f(x)$ , und es folgt

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left[g\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^n = \frac{1}{2} (g^n(x) + g^n(y)), \quad (\text{IX})$$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} (g^n(x) + g^n(y))\right]^{1/n}.$$

Aus (VIII) und (IX) folgt mithin: Für die Funktion  $f(x) = (a+bx)^n$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $n > 0$ , gilt, gleichviel, ob  $n$  ganz oder gebrochen,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} (f^{1/n}(x) + f^{1/n}(y))\right]^n. \quad (\text{X})$$

Ausser  $f(x) = (a+bx)^n$  gibt es keine andere Funktion, die diese Funktionalgleichung erfüllt. Dies ist zu folgern aus den Darlegungen in dem neuen Lehrbuch über Funktionalgleichungen von Aczél<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> J. Aczél: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Verlag Birkhäuser, Basel 1961, S. 49–51.

Wenn wir in (X) den folgenden Ansatz machen:  $f(x) = x > 0$  und  $1/n = p$ ,  $p \geq 0$  ganz, so haben wir die Formel für das gewöhnliche Potenzmittel zweier positiver Grössen  $x$  und  $y$ , nämlich

$$P = \left( \frac{x^p + y^p}{2} \right)^{1/p} \quad (\text{XI})$$

Für  $p = 2$  insbesondere ist dies das quadratische Mittel, für  $p = 1$  das gewöhnliche arithmetische Mittel, und für  $p = 0$  repräsentiert (XI) das geometrische Mittel<sup>1)</sup>. Das gewöhnliche Potenzmittel ist ein Spezialfall des gewogenen Potenzmittels

$$P = \left( \frac{mx^p + ny^p}{m+n} \right)^{1/p} \quad (\text{XII})$$

wobei  $m > 0$  und  $n > 0$  die Gewichte darstellen.

Wir wollen nun im folgenden die beiden zu mittelnden Grössen als fest gegeben betrachten und bezeichnen sie daher mit  $a$  und  $b$ . Die Gewichte dagegen seien variabel, daher mit  $x$  und  $y$  bezeichnet. Somit haben wir für das gewogene Potenzmittel formelmässig

$$z = \left( \frac{xa^p + yb^p}{x+y} \right)^{1/p} \quad (\text{XIII})$$

$a$  und  $b > 0$ ,  $p \geq 0$  ganzzahlig, und wir fragen uns, welche Fläche durch diese Formel repräsentiert wird.

Für  $p = 1$  haben wir das gewogene arithmetische Mittel

$$z = \frac{xa + yb}{x+y}, \quad (\text{XIV})$$

woraus  $zx + zy - ax - by = 0$ .

Letztere Gleichung geht durch die Substitution

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x),$$

$$z' = z - \frac{1}{2}(a+b)$$

über in  $z'x' + \frac{1}{2}(a-b)y' = 0$ .

---

<sup>1)</sup> «Mitteilungen» Bd. 47, Heft 1, S. 43/44.

Nach Durchführung der weiteren Substitution

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' - x'),$$

$$y'' = y',$$

$$z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + z')$$

erhalten wir  $\frac{1}{2}(z''^2 - x''^2) + \frac{1}{2}(a - b)y'' = 0$

oder

$$\frac{z''^2}{\frac{1}{2}(a - b)} - \frac{x''^2}{\frac{1}{2}(a - b)} + 2y'' = 0, \quad (\text{XV})$$

welche Gleichung die Normalform eines hyperbolischen Paraboloides ist. Das gewogene arithmetische Mittel zweier Grössen, in Funktion der Gewichte dargestellt, ergibt somit die Fläche eines hyperbolischen Paraboloides, d. h. der bekannten Sattelfläche zweiten Grades.

Um den allgemeinen Fall des Potenzmittels  $p$ . Grades zu betrachten, schreiben wir die Ausgangsgleichung (XIII) in der Gestalt

$$z^p = \frac{xa^p + yb^p}{x + y}, \quad (\text{XVI})$$

woraus

$$y(z^p - b^p) = x(a^p - z^p),$$

$$y = x \frac{a^p - z^p}{z^p - b^p},$$

und nach Durchführung der Substitution

$$\bar{z}^p = \frac{a^p - z^p}{z^p - b^p}$$

erhalten wir die einfache Formel

$$y = x\bar{z}^p. \quad (\text{XVII})$$

In dieser Form ist die Diskussion der Potenzmittelgleichung denkbar einfach:

Für  $\bar{z} = c = \text{konst.}$ , d. h. Schnitt mit einer  $(x, y)$ -Ebene, ist

$$y = xc^p = xC, \quad \text{d. h. eine Gerade.}$$

Für  $y = c = \text{konst.}$ , d. h. Schnitt mit einer  $(x, \bar{z})$ -Ebene, ist

$$x = \frac{c}{\bar{z}^p}.$$

Für  $x = c = \text{konst.}$ , d. h. Schnitt mit einer  $(y, \bar{z})$ -Ebene, ist

$$y = c\bar{z}^p,$$

d. h. diese Schnittkurve erfüllt für  $c > 0$  die Funktionalgleichungen (VI) und (VII).

Wie ersichtlich, handelt es sich stets um Regelflächen, enthaltend für  $p \neq 1$  eine Geradenschar, für  $p = 1$  deren zwei (hyperbol. Paraboloid). Für ungerades  $p$  sind diese Regelflächen zugleich Sattelflächen,

$$\begin{aligned} \text{denn für } p = 2k + 1, k \geq 0 \text{ ganz, ist } y = x\bar{z}^p &= (-x)(-\bar{z})^p \geq 0, \\ y = (-x)\bar{z}^p &= x(-\bar{z})^p \leq 0, \end{aligned}$$

für gerades  $p$  dagegen liegen keine Sattelflächen vor,

$$\begin{aligned} \text{denn für } p = 2k, k \geq 0 \text{ ganz, ist } y = x\bar{z}^p &= x(-\bar{z})^p \geq 0, \\ y = (-x)\bar{z}^p &= (-x)(-\bar{z})^p \leq 0. \end{aligned}$$

Die Flächenstücke über bzw. unter den Quadranten der  $x$ - und  $y$ -Achsen sind Wendelflächenstücke. So ist

$$\bar{z} = \left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}, \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

ein Wendelflächenstück, das erzeugt wird, indem eine zur  $(x, y)$ -Grundebene parallele Gerade auf der  $z$ -Achse und gleichzeitig auf einer Schnittkurve  $y = c\bar{z}^p$ ,  $c = \text{konst.}$ , gleitet. Diese Schnittkurve haben wir vorhin erwähnt, und Stufenhöhen auf dieser Wendelfläche können daher nach Funktionalgleichung (VII) interpoliert werden.

Eine spezielle Betrachtung verdient der Fall  $p = 0$ , welcher das gewogene geometrische Mittel darstellt. Formel (XVI) geht hier über in

$$z = (a^x b^y)^{\frac{1}{x+y}},$$

woraus

$$z^x z^y = a^x b^y,$$

$$x \ln \left( \frac{z}{a} \right) = y \ln \left( \frac{b}{z} \right),$$

$$y = x \frac{\ln z - \ln a}{\ln b - \ln z},$$

oder nach Durchführung der Substitution

$$\ln \bar{z} = \frac{\ln z - \ln a}{\ln b - \ln z},$$

$$y = x \ln \bar{z},$$

$$e^y = \bar{z}^x.$$

Für  $\bar{z} = c = \text{konst.}$ , d. h. Schnitt mit einer  $(x,y)$ -Ebene, ist wieder

$$y = x \ln c = xC, \text{ d.h. eine Gerade.}$$

Im nachstehenden sei Formel (XVI) für die beiden festen Werte  $a$  und  $b$  abgekürzt wie folgt bezeichnet

$$\left( \frac{x a^p + y b^p}{x + y} \right)^{1/p} = f(x,y). \quad (\text{XVIII})$$

Vorerst sieht man ohne weiteres, dass

$$f(kx,ky) = f(x,y), \quad (k > 0 \text{ konst.}),$$

d. h. die Punkte einer vom Nullpunkt in der  $(x,y)$ -Grundebene ausgehenden Geraden sind Fusspunkte gleichen Funktionswertes. Daraus erhellt wieder, dass es sich um Regelflächen handelt. Sodann verifiziert man durch Ausmultiplizieren die Gültigkeit der Relation

$$f(x,y) = \left\{ \frac{1}{2} (f^p(x+k, y-k) + f^p(x-k, y+k)) \right\}^{1/p}, \quad (\text{XIX})$$

oder in Worten: Das gewogene Potenzmittel  $f(x,y)$  ist das gewöhnliche Potenzmittel gleicher Art zwischen den gewogenen Potenzmitteln  $f(x+k, y-k)$  und  $f(x-k, y+k)$ . Formel (XIX) hat verdächtige Ähnlichkeit mit der Funktionalgleichung (X). Wenn wir die Potenzmittelfläche  $f(x,y)$  zum Schnitt bringen mit einer Ebene  $x + y = c = \text{konst.}$ ,



d.h. einer Ebene, die senkrecht steht zur Ebene mit der Spur  $x = y$  (Quadrantenhalbierende), so gehorcht die Schnittkurve der Gleichung

$$f(x) = \left( \frac{x a^p + (c-x) b^p}{x + (c-x)} \right)^{1/p} = \left( x \frac{a^p - b^p}{c} + b^p \right)^{1/p} = (A x + B)^{1/p}. \quad (\text{XX})$$

Dies ist aber die Funktion, welche Funktionalgleichung (IX) erfüllt. Auf den Flächenlinien mit Spurgeraden  $x + y = c = \text{konst.}$  kann also nach jener Funktionalgleichung interpoliert werden.

Damit ist ein organischer Zusammenhang einfacher Funktionalgleichungen mit Potenzmitteln und deren geometrischer Interpretation aufgezeigt.

---

### Résumé

En complément à une publication précédente, l'auteur interprète géométriquement une moyenne pondérée de puissances de deux grandeurs fixes en fonction des poids. Il montre que les courbes d'intersection des surfaces obtenues par des plans bien déterminés représentent justement les fonctions qui sont la seule solution d'équations fonctionnelles élargies les plus simples.

### Summary

Supplementing a previous paper the weighed mean of power for two fixed values is geometrically denoted as a function of the weights and it is shown that for the resulting planes an intersection with determinate planes furnishes exactly those functions which describe the only solution of amplified, most simple functional equations.

### Riassunto

A complemento di una pubblicazione precedente, l'autore interpreta geometricamente una media ponderata di potenze di due dimensioni fisse in funzione di peso e mostra che le curve d'intersezione delle superfici ottenute per mezzo di piani ben determinati forniscono giustamente le funzioni che sono l'unica soluzione di semplici equazioni funzionali generalizzati.

## Zur Charakterisierung von Makehams Gesetz durch eine Funktionalgleichung

Von Ernst Rufener, Zürich

Herrn Prof. Dr. G. Grimm zum 60. Geburtstag

### Zusammenfassung

Um die Entwicklung einer Gesamtheit von Lebenden zu verfolgen, wird ein nur vom Alter  $x$  abhängiges Ausscheidemass  $M(x)$  eingeführt. Diese Grösse wird mit Hilfe des Mittelwertes

$$Q(x, y) = M^{-1}[\alpha M(x) + \beta M(y)], \quad \alpha + \beta = 1$$

durch die Relation

$$Q(x + t, y + t) = Q(x, y) + t$$

definiert, in der sich das Altern der Gesamtheit während der Zeit  $t$  äussere. Diese Funktionalgleichung wird auf eine ganzrationale Funktionalgleichung für  $M(x)$  zurückgeführt, welche die einzigen stetigen und streng monotonen Lösungen  $M(x) = a + bx$  und  $M(x) = A + BC^x$  hat.

1. In einer Gesamtheit von Lebenden lasse sich das altersabhängige Ausscheiden durch eine Funktion  $M(x)$  erfassen.  $Q(x, y)$  bezeichne den über das Ausscheidemass  $M(x)$  gebildeten quasiaarithmetischen Mittelwert [1]

$$Q(x, y) = M^{-1}[\alpha M(x) + \beta M(y)], \quad \alpha + \beta = 1. \quad (1)$$

Das während der Zeit  $t$  eingetretene Altern der Gesamtheit lasse sich in dem von uns betrachteten Modell durch die Verschiebung

$$Q(x + t, y + t) = Q(x, y) + t \quad (2)$$

des Mittelwertes (1) darstellen. Die Alterungsrelation (2), eine Funktionalgleichung für  $M(x)$ , definiert diese Funktion und kann unter schwachen Regularitätsvoraussetzungen durch Zurückführen auf Hamelsche Funktionalgleichungen nach ihr gelöst werden. Von der reellwertigen Lösungsfunktion  $M(x)$  werde Eindeutigkeit, Stetigkeit und streng monotoner Verlauf gefordert.

2. Unter Berücksichtigung von (1) und mit Hilfe des inversen Funktionspaares

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= M(x+t), \\ \chi(x) &= M^{-1}(x)-t, \quad \Phi\chi \equiv 1, \quad (3)\end{aligned}$$

geht die Alterungsrelation (2) in die  $t$  nicht mehr explizit enthaltende Beziehung

$$\chi(\alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)) = M^{-1}(\alpha M(x) + \beta M(y)) \quad (4)$$

über. Mit

$$\begin{aligned}M(x) &= \xi, & x &= M^{-1}(\xi), \\ M(y) &= \eta, & y &= M^{-1}(\eta)\end{aligned}$$

folgt weiter

$$\chi(\alpha\Phi M^{-1}(\xi) + \beta\Phi M^{-1}(\eta)) = M^{-1}(\alpha\xi + \beta\eta)$$

und nach linksseitiger Multiplikation mit  $\Phi$

$$\Phi\chi(\alpha\Phi M^{-1}(\xi) + \beta\Phi M^{-1}(\eta)) = \Phi M^{-1}(\alpha\xi + \beta\eta),$$

eine verallgemeinerte Hamelsche Funktionalgleichung für die durch

$$\Psi \equiv \Phi M^{-1} \quad (5)$$

definierte Funktion  $\Psi$ :

$$\Psi(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\Psi(\xi) + \beta\Psi(\eta). \quad (6)$$

3. Durch Spezialisieren der Variablen erhält man

$$\begin{aligned}\text{für} & \qquad \qquad \qquad \text{aus (6)} \\ \xi = \frac{x}{\alpha}, \eta = 0: & \quad \Psi(x) = \alpha\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \beta\Psi(0), \\ \xi = 0, \eta = \frac{y}{\beta}: & \quad \Psi(y) = \alpha\Psi(0) + \beta\Psi\left(\frac{y}{\beta}\right), \\ \xi = \frac{x}{\alpha}, \eta = \frac{y}{\beta}: & \quad \Psi(x+y) = \alpha\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \beta\Psi\left(\frac{y}{\beta}\right),\end{aligned}$$

drei Gleichungen, in denen  $\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$  und  $\Psi\left(\frac{y}{\beta}\right)$  eliminierbar sind:

$$\Psi(x) + \Psi(y) - \Psi(x+y) = (\alpha + \beta)\Psi(0) = \Psi(0) = \gamma. \quad (7)$$

Für 
$$F(x) = \Psi(x) - \gamma \tag{8}$$

resultiert aus (7) die Hamelsche Funktionalgleichung

$$F(x) + F(y) = F(x + y). \tag{9}$$

(9) hat, falls  $F(x)$  stetig, die einzige (triviale) Lösung [2], [3]

$$F(x) = Cx,$$

woraus nach (8)

$$\Psi(x) = Cx + \gamma, \tag{10}$$

mit  $C = C(t)$ ,  $\gamma = \gamma(t)$  folgt. (10) erfüllt (6), ist mithin ihre allgemeine Lösung.

4. Da

$$(5) \quad \Psi(\xi) = \Phi M^{-1}(\xi) = C(t) \xi + \gamma(t),$$

erhält man

$$\Phi(x) = M(x + t) = C(t) M(x) + \gamma(t)$$

und aus

$$\Phi(x) - \Phi(0) = M(x + t) - M(t) = C(t) [M(x) - M(0)]$$

nach der Substitution

$$M(x) - M(0) = N(x), \tag{11}$$

$$N(x + t) = C(t) N(x) + N(t). \tag{12}$$

Diese Gleichung lässt auf die Natur von  $N(x)$  und in Verbindung mit (11) auf die gesuchte Funktion  $M(x)$  schliessen:

4.1 (12) enthält die triviale Lösung

$$N(x) \equiv 0, \quad \text{d.h.} \quad M(x) \equiv M(0) = a$$

und gibt Anlass zur Fallunterscheidung

4.2  $C(t) \equiv 1$ :

$N(x)$  ist Lösung der Hamelschen Gleichung

$$N(x) + N(t) = N(x + t),$$

mithin

$$N(x) = bx,$$

d.h.

$$M(x) = M(0) + bx = a + bx. \tag{13}$$

4.3  $C(t) \neq 1$ :

Vertauscht man in (12) die Veränderlichen, so wird

$$N(x + t) =$$

$$C(t) N(x) + N(t) = C(x) N(t) + N(x)$$

nach den Variablen separierbar:

$$\frac{C(x) - 1}{N(x)} = \frac{C(t) - 1}{N(t)} = k, \quad (k \neq 0).$$

Durch Einsetzen von

$$C(x) = k N(x) + 1$$

in (12) ergibt sich für  $N(x)$  das ganzrationale Additionstheorem

$$N(x+t) = k N(x) N(t) + N(x) + N(t). \quad (14)$$

Seine Produktform

$$k N(x+t) + 1 = [k N(x) + 1] [k N(t) + 1]$$

ist für

$$G(x) = k N(x) + 1$$

eine Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(x+t) = G(x) G(t)$$

mit der Lösung [3]

$$G(x) = e^{cx}.$$

Es folgt

$$N(x) = \frac{1}{k} (e^{cx} - 1)$$

und

$$M(x) = \frac{1}{k} (e^{cx} - 1) + a = A + B e^{cx} = A + B C^x. \quad (15)$$

*Satz:* In einer Gesamtheit von Lebenden lasse sich das Altern durch die Mittelwertrelation

$$(2) \quad Q(x+t, y+t) = Q(x, y) + t$$

mit

$$(1) \quad Q(x, y) = M^{-1}(\alpha M(x) + \beta M(y)), \quad \alpha + \beta = 1$$

darstellen. Dann sind

$$M(x) = \begin{cases} a + bx, & (b \neq 0) \\ A + B e^{cx} = A + B C^x, & (B \neq 0, c \neq 0, C \neq 1) \end{cases}$$

die einzigen stetigen und streng monotonen Lösungsfunktionen von (2).

5. Die Funktion  $M(x)$  ist mit Hilfe einer Mittelwertoperation durch die Alterungsgleichung (2) definiert worden. Indem  $M(x)$  nachträglich mit den für eine Lebendengesamtheit üblichen Sterbemassen identifiziert wird, erhält man für die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit

$$q_x = \begin{cases} a + bx, & (b \neq 0) \\ A + BC^x, & (B \neq 0, C \neq 1) \end{cases}$$

und in

$$\mu(x) = \begin{cases} a + bx, & (b \neq 0) \\ A + BC^x, & (B \neq 0, C \neq 1) \end{cases}$$

Sterbensintensitäten, welche die Überlebensordnungen von Gauss und Makeham charakterisieren.

### Literaturhinweise

- [1] *Jecklin, H.*: «Quasiarithmetische Mittelwerte», Elemente der Mathematik, Band IV/5 und 6 (1949).  
 [2] *Hamel, G.*: «Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ », Math. Annalen, 60 (1905), 459–462.  
 [3] *Cauchy, A.L.*: «Analyse algébrique», (Paris 1821), 103.

---

### Résumé

Pour suivre l'évolution d'une collectivité de personnes, l'auteur introduit la notion de mesure d'extinction  $M(x)$  qui ne dépend que de l'âge  $x$ . Cette mesure est définie à l'aide de la valeur moyenne

$$Q(x, y) = M^{-1}[\alpha M(x) + \beta M(y)], \quad \alpha + \beta = 1$$

et par la relation

$$Q(x + t, y + t) = Q(x, y) + t$$

qui exprime l'effet du vieillissement auquel est soumise la collectivité au cours de la période  $t$ . Cette équation fonctionnelle peut être ramenée à une équation fonctionnelle de la mesure  $M(x)$  du type rationnel entier qui admet comme seules solutions continues et intégralement monotones les expressions  $M(x) = a + bx$  et  $M(x) = A + BC^x$ .

## Summary

To trace the evolution in a population of lives a standard for withdrawal  $M(x)$  depending only on the age  $x$  is denoted. This standard is defined by means of the average

$$Q(x,y) = M^{-1}[\alpha M(x) + \beta M(y)], \quad \alpha + \beta = 1$$

and by using the relation

$$Q(x+t, y+t) = Q(x,y) + t$$

which designates the aging of the population with the time  $t$ . This functional equation is reverted to a rational functional equation for  $M(x)$  which has the only continuous and strictly monotonous solutions  $M(x) = a + bx$  and  $M(x) = A + BC^x$ .

## Riassunto

Per seguire l'evoluzione di una collettività di persone, l'autore introduce la nozione di misura di estinzione  $M(x)$  che dipende soltanto dall'età  $x$ . Questa misura è definita con l'ausilio del valore medio

$$Q(x,y) = M^{-1}[\alpha M(x) + \beta M(y)], \quad \alpha + \beta = 1$$

e con la relazione

$$Q(x+t, y+t) = Q(x,y) + t$$

che esprime l'effetto d'invecchiamento a cui è sottoposta la collettività durante il periodo  $t$ . Questa equazione funzionale è portata a un'equazione della misura  $M(x)$  di tipo razionale intero che ammette come uniche soluzioni continue e integralmente monotone le espressioni  $M(x) = a + bx$  e  $M(x) = A + BC^x$ .