Zu den Bernoullizahlen nach Nörlund und Adrian

Autor(en): **Paasche, Ivan**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **63 (1963)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966926

Zu den Bernoullizahlen nach Nörlund und Adrian

Von Ivan Paasche, München

Zusammenfassung

Der Verfasser gibt einige Hinweise zur Darstellung der Bernoullizahlen.

1. Die oszillierend stark ansteigenden Bernoullizahlen nach Nörlund mit der symbolischen Binomialentwicklung

$$B_n = (-1-B)^n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$B_n = 1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, 0, \ldots$$

(man setze nach der Entwicklung überall $B^\nu = B_\nu$) sind in der folgenden Formel merkwürdigerweise mit den monoton schwach sinkenden Stammbrüchen $A_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ vertauschbar:

$$0 = (A+B)^n = \binom{n}{0} A_n B_0 + \ldots + \binom{n}{n} A_0 B_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Der Beweis von (1) ergibt sich aus der bekannten Formel

$$(-1)^n B_n = n \int_0^{-1} (1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + \mu^{n-1})\, d\mu = \int_0^{-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} B_\nu \mu^{n-\nu}\, d\mu$$

durch Ausführung der Integration. – Aus (1) folgt eine Determinantendarstellung der B_n durch die A_ν (oder der A_n durch die B_ν):

$$B_n = D_n(A_0, \ldots, A_n), \quad A_n = D_n(B_0, \ldots, B_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die D_n sind vollständige homogene Polynome ihrer $n+1$ Argumente mit ganzrationalen Koeffizienten, z. B.

$$B_3 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_0 & \\ A_2 & 2A_1 & A_0 \\ A_3 & 3A_2 & 3A_1 \end{vmatrix} \qquad A_3 = -\begin{vmatrix} B_1 & B_0 & \\ B_2 & 2B_1 & B_0 \\ B_3 & 3B_2 & 3B_1 \end{vmatrix}.$$

2. Die Bernoullizahlen nach Adrian (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker *59* [1959], S. 199–206) haben $B_1 = 0$ statt des obigen $B_1 = -\frac{1}{2}$, stimmen aber sonst vollständig mit denen nach Nörlund überein. Die schöne, bequeme Formel (1) muss bei Adrian lauten

$$0 = (A+B)^n - \frac{n}{2} A_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Auch hier zeigt sich wieder der Vorteil der Nörlundschen Bezeichnung. Vgl. im übrigen die Rezension 91853 im Zentralblatt für Mathematik über die genannte Arbeit von Adrian.

3. Im Falle $A_n = n+1$ statt $\dfrac{1}{n+1}$ nebst $B_0 = 1$ ergeben sich aus (1) ganze Zahlen $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots = 1, -2, 5, -16, \ldots$ der Eigenschaft $B_n = (-1)^n - n B_{n-1}$ statt $(-1-B)^n$.

4. Die jahrhundertelange Unsicherheit in der Bezeichnungsweise der Bernoullizahlen beruht letztlich auf dem Fehlen eines Eigenvektors $\neq 0$ der Pascalmatrix: die kritische Koordinate $\pm B_1$ verhindert, dass die Folge der Bernoullizahlen Eigenvektor der Pascalmatrix ist. Für diesen Mangel wird man jedoch reichlich entschädigt durch das Bestehen z. B. der folgenden Identitäten, darin der binomische Satz und eine Partialbruchzerlegung:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & a^0 u_n & z^0 & z(z+0)^{-1} \\ B_1 & a^1 u_{n-1} & z^1 & -z(z+1)^{-1} \\ B_2 & a^2 u_{n-2} & z^2 & z(z+2)^{-1} \\ B_3 & a^3 u_{n-3} & z^3 & -z(z+3)^{-1} \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & b^0 u_n & (z+1)^0 & \binom{z+0}{0}^{-1} \\ -B_1 & b^1 u_{n+1} & (z+1)^1 & \binom{z+1}{1}^{-1} \\ B_2 & b^2 u_{n+2} & (z+1)^2 & \binom{z+2}{2}^{-1} \\ -B_3 & b^3 u_{n+3} & (z+1)^3 & \binom{z+3}{3}^{-1} \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Die B_n sind hier die Bernoullizahlen, die u_n irgendwelche Zahlen der Eigenschaft $u_n + a u_{n-1} = b u_{n+1}$, z. B. die Fibonaccizahlen (bei ihnen ist $a = b = u_0 + 1 = u_1 = 1$). Zu den obigen Identitäten gesellt sich noch, mit $\zeta = z(1-z)^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ & 1 & 2 & 3 & . \\ & & 1 & 3 & . \\ & & & 1 & . \\ & & & & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta^4 \\ . \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ & 1 & 2 & 3 & . \\ & & 1 & 3 & . \\ & & & 1 & . \\ & & & & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 2 & 3 & . & \\ 1 & 3 & . & & \\ 1 & . & & & \\ . & & & & \end{pmatrix}$$

und eine unabsehbare Fülle weiterer Formeln, z. B. mit der Stirlingmatrix 1. Art zugleich als Linksfaktor und Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 2 & -3 & 1 & & \\ -6 & 11 & -6 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & 2 & -3 & 1 & & \\ & -6 & 11 & -6 & 1 & \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Durch Inversion erhält man hieraus die Stirlingmatrix 2. Art zugleich als Rechtsfaktor und Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ 1 & 7 & 6 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 7 & 6 & 1 & \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Alle aufgeführten Identitäten stellen Verallgemeinerungen des Begriffs Eigenvektor dar.

Résumé

L'auteur donne quelques indications quant à la représentation des nombres de Bernoulli.

Summary

Some hints for the representation of the Bernoulli-numbers are given by the author.

Riassunto

L'autore dà alcune indicazioni relative alla rappresentazione dei numeri di Bernoulli.