Über eine einheitliche Darstellung der Verbleibs- und Ausscheidewahrscheinlichkeiten für eine beliebige Zeitdauer

Autor(en): **Nolfi, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **63 (1963)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966928

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über eine einheitliche Darstellung der Verbleibs- und Ausscheidewahrscheinlichkeiten für eine beliebige Zeitdauer

Von P. Nolfi, Zürich

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellung der Entwicklung eines Versichertenbestandes beliebiger Zusammensetzung unter Berücksichtigung mehrerer Ausscheideursachen. Die mathematischen Formeln werden unter allgemeinen Bedingungen hergeleitet. Alsdann wird auf die praktische Bedeutung verschiedener Spezialfälle und nebenbei auf ihre formale Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer wahrscheinlichkeitstheoretischer Probleme hingewiesen.

Einleitend sei hervorgehoben, dass bei den nachstehenden Ausführungen nicht die Meinung besteht, die abgeleiteten mathematischen Formeln seien neu; bei der stark anwachsenden Literatur über Wahrscheinlichkeitsrechnung ist durchaus anzunehmen, dass gleichlautende Ergebnisse bereits vorgebracht wurden. Das Ziel der vorliegenden Ausführungen war vielmehr, auf eine allgemeine Darstellungsmethode hinzuweisen, die in versicherungstechnischer Hinsicht gewisse Vorzüge besitzt. Diese zeigen sich:

Erstens einmal in der rein formal vermittelten Möglichkeit von Gesamtheitsbetrachtungen. Sie wird durch die gleichzeitige Erfassung sämtlicher Ursachen eines Austrittes aus einem Personenbestand bzw. eines Verbleibens erreicht.

Zweitens kommt hinzu, dass im Gegensatz zu vielen anderen mathematischen Darstellungen die vorliegende sich auf eine frei wählbare Zeitspanne bezieht und nicht bloss auf eine bestimmte Dauer, z. B. ein Jahr. Auf weitere Vorzüge soll später an Ort und Stelle hingewiesen werden.

Für die Leser der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker dürften die folgenden Ausführungen insofern gelegen kommen, als bereits im vorletzten Heft durch Herrn Prof. Aug. Urech eine Abhandlung unter der Überschrift: «Considérations sur la probabilité ${}_n p_{\overline{xyz \ldots w}}^{[r]}$ que, de m têtes, $xyz \ldots w$, r exactement soient en vie après n années» publiziert wurde. Wie nachstehend gezeigt wird, handelt es sich dabei um einen besonders interessanten Spezialfall.

1. Umfassende Darstellung; mehrere Ursachen

Angesichts der Tatsache, dass in der Lebensversicherung nicht nur eine Abgangsursache, sondern mehrere vorkommen, muss auch die Fragestellung entsprechend formuliert werden. D.h. gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, dass von m im Anfangsbestand vorhandenen Personen nach einer gewissen Zeit t m_1 infolge Todes, m_2 infolge Invalidität, m_3 infolge freiwilliger Aufgabe der Versicherung usw. ausgeschieden sind. Bezeichnet man mit m_0 die noch vorhandenen Versicherten zur Zeit t, so gilt allgemein:

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k,$$

worin k die Zahl der unterschiedlichen Abgangsursachen angibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für die angeführte Aufteilung des Bestandes nach Ursachen sei:

$$P^{m_0 + \ldots + m_k}_{(x_1, x_2 \ldots x_m)},$$

wobei die Alter der m unter Beobachtung stehenden Personen mit $x_1, x_2 \ldots x_m$ bezeichnet werden.

Zur expliziten Darstellung von $P^{m_0 \ldots m_k}_{(x_1 \ldots x_m)}$ führen wir die Grösse $v(i,j)$ ein, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Versicherte i infolge der Ursache j während der Zeit t aus dem Anfangsbestand ausscheidet, $i = (1 \ldots m)$ und $j = (1 \ldots k)$. Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir die Variable t jedoch weg. Die nachstehenden Formeln gelten somit für eine beliebige Zeit t, die jeweils vorgegeben werden kann. Mit $v(i,0)$ soll insbesondere die Verbleibswahrscheinlichkeit für den Versicherten i bezeichnet werden. Dann gilt allgemein:

$$v(i,0) + v(i,1) + \ldots + v(i,k) = 1, \tag{1}$$

weil vorausgesetzt wird, der i-te Versicherte werde entweder austreten oder dann in den Endbestand eingehen. Auf Grund dieser Festsetzungen kann die Wahrscheinlichkeit, dass $m_1, m_2 \ldots m_k$ Personen infolge der

Ursachen $j = (1 \ldots k)$ während der Zeit t ausscheiden, wie folgt geschrieben werden:

$$P_{(x_1 \ldots x_m)}^{m_0 \ldots m_k} = \sum v(i_1, j_1) \ldots v(i_m, j_k). \tag{2}$$

Das unter dem Summenzeichen stehende Produkt erfasst insgesamt m Wahrscheinlichkeiten $v(i,j)$, für jeden Versicherten eine. Die Summation erstreckt sich über sämtliche möglichen $\dfrac{m!}{m_0!\, m_1! \ldots m_k!}$ Produktbildungen, die man für die vorgegebenen Anzahlen $m_1 \ldots m_k$ formieren kann, wobei $m_0 + \ldots + m_k = m$ sein muss. Wie man weiter erkennt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_{(x_1 \ldots x_m)}^{m_0 \ldots m_k}$ ein bestimmtes Glied aus der Entwicklung:

$$\{v(1,0) + \ldots + v(1,k)\}\{v(2,0) + \ldots + v(2,k)\} \ldots \{v(m,0) + \ldots + v(m,k)\} = 1. \tag{3}$$

Hieraus folgt auch, dass die Summe sämtlicher Wahrscheinlichkeiten $P_{(x_1 \ldots x_m)}^{m_0 \ldots m_k}$ gleich 1 sein muss, weil gemäss (1) jeder einzelne Faktor gleich 1 ist. Weiter erkennt man, dass die Anzahl der Glieder in (3) gleich k^m wird.

Für die weitere Entwicklung der Formel (2) benützen wir die erzeugende Funktion, wie sie bereits von Laplace eingeführt wurde (fonction génératrice). Die für die Ursache j geltenden Wahrscheinlichkeiten $v(i,j)$ werden mit dem Faktor λ_j vereinigt. Formel (3) geht alsdann in die Produktbildung

$$\prod_{i=1}^{i=m} \{\lambda_0 v(i,0) + \lambda_1 v(i,1) + \ldots + \lambda_k v(i,k)\} \quad \text{über.} \tag{4}$$

Die Ausmultiplikation ergibt dann die Summe aller Produkte von der Form

$$\lambda_0^{m_0} \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_k^{m_k} P_{(x_1 \ldots x_m)}^{m_0 \ldots m_k}. \tag{5}$$

Man erreicht auf diesem Wege, dass die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für jede mögliche Aufteilung des Bestandes $m = m_0 + \ldots + m_k$ als Koeffizienten der λ mit den gleichnamigen Exponenten erscheinen.

Es sei daran erinnert, dass aus dieser Formel sich die Erwartungswerte in einfacher Weise herleiten lassen. So erhält man den Erwartungswert der Zahl der Personen, die infolge der Ursache j während der Zeit t ausscheiden, indem man (4) und (5) nach λ_j differenziert und nachher $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1$ setzt:

$$\sum m_j P_{(x_1 \ldots x_m)}^{m_j} = v(1,j) + v(2,j) + \ldots + v(m,j). \tag{6}$$

Die Summation auf der linken Seite von (6) erstreckt sich über sämtliche Möglichkeiten für m_j, insgesamt somit über $\binom{m}{m_j}$ unterschiedliche Werte. Für $j = 0$ erhält man aus (6) den Erwartungswert für ein Verbleiben, d.h. für ein Eingehen in den Endbestand. Er lautet:

$$\sum m_0 \, P^{m_0}_{(x_1 \ldots x_m)} = v(1,0) + v(2,0) + \ldots + v(m,0) \,. \qquad (7)$$

Durch Formel (7) wird die Zahl der Lebenden nach einer bestimmten Zeit t herausgegriffen, während die Formeln (2) und (5) die Wahrscheinlichkeiten bzw. die Erwartungswerte für sämtliche Kombinationen zu berechnen gestatten.

2. Spezialfall: Ursache und Gegenursache

Nach den getroffenen Festsetzungen ist die Wahrscheinlichkeit für den Versicherten x_i, infolge der Ursache j auszuscheiden, $v(i,j)$, insgesamt gibt es somit m solche Eigenwerte. Die Gegenwerte, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte x_i *nicht* infolge der Ursache j austritt, ist $1 - v(i,j)$. Wie durch (1) bestätigt wird, gilt:

$$\sum_{\alpha} v(i, \alpha \neq j) = 1 - v(i,j) \,. \qquad (8)$$

Die Summation erstreckt sich über sämtliche Werte von α mit Ausnahme von $\alpha = j$. Durch eine solche Zusammenfassung der Gegenursachen reduziert sich die Betrachtung auf zwei. Wir bezeichnen die Gegenursachen von j mit $-j$. Die Grundwahrscheinlichkeiten für den Versicherten i lauten dann

$$v(i,j) \text{ und } v(i,-j) = 1 - v(i,j) \,.$$

Dieser Spezialfall ist von besonderem Interesse und in der abgeleiteten Grundformel (2) enthalten. Setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise $m_j = r$, so erhält man:

$$P^{r}_{(x_1 \ldots x_m)} = \sum v(i_1, j) \ldots v(i_r, j) \, v(i_{r+1}, -j) \ldots v(i_m, -j) \,. \qquad (9)$$

Die Summe erstreckt sich nunmehr über sämtliche unterschiedlichen Gruppierungen der Versicherten zu r-Tupeln. Die Anzahl der überhaupt möglichen Glieder für ein vorgegebenes j ist in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Fall 2^m. Der Ausdruck (9) antwortet auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass genau r Personen infolge der Ursache j während einer vorgegebenen Zeitspanne t ausscheiden.

Fragt man einschränkend nach der Wahrscheinlichkeit, dass r *vorbestimmte* Versicherte und nur diese infolge der Ursache ausscheiden, z. B. $x_1, x_2 \ldots x_r$, so erhält man einen bestimmten Summanden von (9), nämlich

$$P(r,j) = v(1,j)\, v(2,j) \ldots v(r,j) \{1 - v(r+1,j\} \ldots \{1 - v(m,j)\}.$$

Die Ausmultiplikation auf der rechten Seite führt zu einer Summe von Produkten mit $r, r+1 \ldots m$ Faktoren von der Form $v(i,j)$. Was für *einen* Summanden in (9) gilt, muss auch für die übrigen gelten, da alle den gleichen Aufbau haben.

Man erkennt damit, dass (9) als eine Summe von Produkten mit r bis m Faktoren dargestellt werden kann. Wird die Summe aller Produkte von der Länge $r + \varDelta$ mit $K_\varDelta Z^j_{r+\varDelta}$ bezeichnet, so gewinnt man aus (9) die Reihe:

$$P^r_{(x_1 \ldots x_m)} = K_0 Z^j_r + K_1 Z^j_{r+1} + \ldots + K_{m-r} Z^j_m. \tag{10}$$

Hierin sind die Werte $K_\varDelta$ noch unbekannt. Um sie zu berechnen, bemerken wir, dass Gleichung (10) auch für den Fall gleichgrosser Wahrscheinlichkeiten: $v(i,j) = p$ für $i = (1 \ldots m)$ richtig sein muss. Das $(\varDelta + 1)$. Glied geht alsdann über in

$$Z^j_{r+\varDelta} = \binom{m}{r+\varDelta} p^{r+\varDelta}.$$

Anderseits geht (9) über in

$$P^r_{(x_1 \ldots x_m)} = \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r}. \tag{10a}$$

Durch die binomische Entwicklung von (10a) und Gleichsetzung der Koeffizienten der Potenzen von $p^{r+\varDelta}$ wird

$$K_\varDelta \binom{m}{r+\varDelta} = \binom{m}{r} \binom{m-r}{\varDelta} (-1)^\varDelta$$

und damit:

$$K_\varDelta = \binom{r+\varDelta}{r} (-1)^\varDelta.$$

In (10) eingesetzt, erhält man die für eine Ursache allgemein gültige Darstellung:

$$P^r_{(x_1 \ldots x_m)} = Z^j_r - \binom{r+1}{r} Z^j_{r+1} + - \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{r} Z^j_m. \tag{11}$$

Die in (11) angeführte Entwicklung vermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass r Personen unterschiedlichen Risikos während der Zeit t wegen der Ursache j aus dem Anfangsbestand ausscheiden. Setzt man in (11) insbesondere $j = 0$, so erhält man die *Verbleibswahrscheinlichkeit* für einen Endbestand von r Personen. Dieser Spezialfall $j = 0$ ist identisch mit der eingangs erwähnten, von Herrn *Urech* betrachteten und mit der von ihm unter Beschränkung auf elementare Hilfsmittel bewiesenen Grundformel. Es sei noch bemerkt, dass (11) sich auch auf anderen Wegen beweisen lässt, so z.B. durch Rekursion.

Die abgeleiteten Formeln in ihrer durch (10) und (11) gegebenen Gestalt erscheinen uns besonders deshalb von einiger Bedeutung, weil sie sich auf eine beliebig lange Zeitspanne beziehen. Dadurch gewinnt man einerseits einen grösseren Überblick und anderseits auch besser fundierte Unterlagen als bei Betrachtungen, die sich nur auf ein Jahr beschränken. Die Aussagekraft der Formeln wird erhöht.

Für den Erwartungswert und die Varianz erhält man die bekannten Grössen:

$$A_j = v(1,j) + \ldots + v(m,j); \quad \sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{m} v(i,j)\, v(i,-j)\,.$$

Sie erlauben, für jede beliebige Zahl ν von Beobachtungen die Ungleichung von Bienaymé-Tschebycheff anzuwenden,

$$W\left(\left|\nu - A_j\right| \geqq \varkappa\sigma_j\right) \leqq \frac{1}{\varkappa^2}\,, \tag{12}$$

hierbei ist $\varkappa$ in Streuungseinheiten auszudrücken. Wir haben diese gut bekannte Abschätzung hier angeführt, weil sie infolge ihrer Einfachheit verlässiger erscheint als verfeinerte Methoden, die unter idealisierteren Voraussetzungen gelten.

3. Hinweis auf Analogien

1. Fall. Es erscheint überraschend festzustellen, dass man formal zu gleichlautenden Ergebnissen gelangt bei ganz anders gearteten Problemen. So ergibt sich die gleiche Reihenentwicklung wie (11), wenn man unter allgemeinen Bedingungen nach der Wahrscheinlichkeit fragt, dass von m möglichen Ereignissen genau r auftreten. $Z_{r+\varDelta}$ ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $r + \varDelta$ der in Betracht fallenden Ereignisse.

Folgendes Beispiel erscheint in diesem Zusammenhang besonders amüsant. Gegeben sei ein Kartenspiel von 36 Jasskarten, die unter 4 Spieler verteilt werden. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Quadrupeln. Darunter versteht man vier gleichwertige Karten, z. B. vier Könige oder vier Damen usw. Bei 9 Handkarten eines Spielers können 0, 1 oder 2 Quadrupel gleichzeitig auftreten. Insgesamt gibt es 9 unterschiedliche Quadrupel. Die Wahrscheinlichkeiten von *mindestens* 0, 1, 2 Quadrupeln auf 9 Handkarten sind:

$$p_0 = \binom{36}{9}\binom{36}{9}^{-1} = 1; \quad p_1 = \binom{32}{5}\binom{36}{9}^{-1} \text{ und } p_2 = \binom{28}{1}\binom{36}{9}^{-1}.$$

Mehr als 2 Quadrupel sind nicht realisierbar, die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind Null. Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von genau 0, 1 oder 2 Quadrupeln sind:

$$P_0 = Z_0 - \binom{1}{0} Z_1 + \binom{2}{0} Z_2,$$

$$P_1 = Z_1 - \binom{2}{1} Z_2,$$

$$P_2 = Z_2 \qquad \text{mit } Z_r = \binom{h}{r}\binom{hs - sr}{h - sr}\binom{sh}{h}^{-1}.$$

Dabei ist h die Zahl der Handkarten und s die Zahl der Spieler. Für 36 Jasskarten gilt:

$$P_0 = 0{,}9807\ldots,$$
$$P_1 = 0{,}0192\ldots,$$
$$P_2 = 1{,}07 \cdot 10^{-6}.$$

2. Fall. Ein anderes amüsantes Beispiel, das ebenfalls zur Reihenentwicklung (11) führt, ist folgendes: Eine Sekretärin hat im Laufe eines Tages N Briefe und die dazugehörenden N Kuverts geschrieben. Da sie es beim Büroschluss sehr eilig hat, steckt sie die Briefe rein zufallsmässig in die Kuverts, ohne auf den Adressaten zu achten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau r Briefe richtig eingepackt hat? Die Wahrscheinlichkeit, dass auf N Briefe *wenigstens* r bestimmte Briefe richtig eingesteckt werden, ist $\frac{(N-r)!}{N!}$, die Zahl der unterschiedlichen Möglichkeiten ist $\binom{N}{r}$, und damit wird

$$Z_r = \frac{(N-r)!}{N!} \frac{N!}{(N-r)!\,r!} = \frac{1}{r!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle N Briefe richtig eingeordnet werden, ist somit $\frac{1}{N!}$; sie ist bereits für $N = 10$ sehr klein und erreicht nicht einmal ein Millionstel.

Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass exakt r Fälle auftreten vermittelst der Reihenentwicklung (11). Insbesondere wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau $(N-1)$ Fälle auftreten:

$$P_{N-1} = Z_{N-1} - \binom{N}{N-1} Z_N = 0,$$

wie es sein soll.

Man erkennt, dass der Formel (9) ganz allgemein und nicht nur in der Versicherungsmathematik Bedeutung zukommt. Interessante Erweiterungen ergeben sich aus der Betrachtung des allgemeinen Besetzungsproblemes.

4. Erweiterung von Formel (11) auf s Ursachen und Gegenursachen

Aus Formel (2) lassen sich noch weitere Spezialfälle herleiten. Sie gestatten, die Frage zu beantworten, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass genau

r_1 Personen infolge der Ursache j_1
r_2 Personen infolge der Ursache j_2
r_s Personen infolge der Ursache j_s

austreten, sofern die Zahl der Ursachen $s < k$ und

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_s = r < m \qquad \text{ist.}$$

Um diesen Fall kurz darzustellen, fassen wir alle mit $j_1, j_2 \ldots j_s$ nicht erfassten Ursachen mit $-j_s$ zusammen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann alsdann wie folgt ausgedrückt werden:

$$P^{r_1 \ldots r_s}_{(x_1 \ldots x_m)} = \sum v(i_1, j_1)\, v(i_2, j_1) \ldots v(i_r, j_s)\, v(i_{r+1}, -j_s) \ldots v(i_m, -j_s). \quad (13)$$

Hier erstreckt sich die Summation über sämtliche

$$\frac{m!}{r_1!\, r_2! \ldots r_s!\, (m-r)!}$$

Produktbildungen der Wahrscheinlichkeiten, die über den Versicherungsbestand $x_1 \ldots x_m$ gebildet werden können. $(m-r)$ bezeichnet die

Zahl der Personen, die infolge der nicht in Betracht gezogenen Ursachen, also infolge der Gegenursache $-j_s$, ausgeschieden sind. Der Übergang in den Endbestand – die Verbleibsursache j_0 – erscheint rein formal gleichgeordnet wie im Spezialfall.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte x_i *nicht* an den j_1 bis j_s betrachteten Ursachen stirbt, lässt sich berechnen. Sie lautet:

$$v(i,-j_s) = 1 - v(i,j_1) - \dots - v(i,j_s) . \tag{14}$$

Aus (13) geht hervor, dass im angeschriebenen Produkt $m-r$ Faktoren der Form (14) auftreten. Ihre Einsetzung und Ausmultiplikation lässt (13) in eine Summe von Produkten übergehen, in denen nur die direkten Wahrscheinlichkeiten $v(i,j)$ auftreten; (13) wird auf diese Weise in eine Summe von Produkten mit r, $r+1$ ... bis m Faktoren umgewandelt, wobei insgesamt

$$A = \frac{m!}{r_1!\,r_2! \dots r_s!\,(m-r)!} \; \frac{m-r!}{\Delta_1!\,\Delta_2! \dots \Delta_s!\,(m-r-\Delta)!}$$

$$A = \frac{m!}{r_1!\,r_2! \dots r_s!\,\Delta_1!\,\Delta_2! \dots \Delta_s!\,(m-r-\Delta)!} \tag{15}$$

Produkte mit $r+\Delta$ Faktoren auftreten, für $\Delta = (1, 2 \dots m-r)$. Wir fassen alle Produkte mit gleicher Anzahl Faktoren in einem Summanden zusammen und schreiben dafür

$$K_{\Delta_1 + \dots + \Delta_s} Z^{j_1 \dots j_s}_{r_1+\Delta_1 \dots r_s+\Delta_s} . \tag{16}$$

Dabei ist $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_s = \Delta$ und $K_{\Delta_1 + \dots + \Delta_s}$ eine Konstante, d.h. unabhängig von den Wahrscheinlichkeiten. Sie gibt die Anzahl der gleichlautenden Werte von $Z_{r_1+\Delta_1 \dots r_s+\Delta_s}$ an und kann aus (15) gerechnet werden, indem man die dort angeführte Zahl A durch die Anzahl der unterschiedlichen Werte B teilt, also durch

$$B = \frac{m!}{(r_1+\Delta_1)! \dots (r_s+\Delta_s)!\,(m-r-\Delta)!} . \tag{17}$$

Die Division ergibt:

$$\frac{A}{B} = K = \frac{(r_1+\Delta_1)! \dots (r_s+\Delta_s)!}{r_1! \dots r_s!\,\Delta_1! \dots \Delta_s!} = \binom{r_1+\Delta_1}{r_1} \binom{r_2+\Delta_2}{r_2} \dots \binom{r_s+\Delta_s}{r_s} .$$

Berücksichtigt man noch, dass (16) Produkte mit negativen Faktoren enthält, so kann man sich auf die Betrachtung von positiven Werten mit dem Vorzeichen $(-1)^{\Delta}$ beschränken. Damit geht (13) endgültig über in:

$$P^{r_1 \ldots r_s}_{(x_1 \ldots x_m)} = \sum (-1)^{\Delta} \binom{r_1 + \Delta_1}{r_1} \binom{r_2 + \Delta_2}{r_2} \ldots \binom{r_s + \Delta_s}{r_s} Z^{j_1 \ldots j_s}_{r_1+\Delta_1 \ldots r_s+\Delta_s}. \tag{18}$$

Die Summation erstreckt sich über den positiven ganzzahligen Wertvorrat der $\Delta_1 \ldots \Delta_s$ unter der Bedingung: $\Delta \leqq m - r$.

Gleichung (18) drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass genau r_j Versicherte an der Ursache j ausscheiden, mit $j = (1 \ldots s)$, wobei jedes einzelne Mitglied der in Betracht gezogenen Gesamtheit $x_1 \ldots x_m$ ein anderes von allen übrigen unterschiedliches Risiko darstellen kann. Es handelt sich somit bei Gleichung (18) um einen umfassenden Ausdruck; er gilt für einen gemischten Bestand mit beliebig vielen einander ausschliessenden versicherten Ereignissen.

Gleichung (18) lässt sich auf verschiedenem Wege verifizieren. Wird eine Ausscheideursache ausser acht gelassen, z. B. j_s, so erhält man wegen $r_s = 0$ *formal* den gleichen Ausdruck wie (18). Lässt man insbesondere alle Ausscheideursachen bis auf eine wegfallen, so erhält man Gleichung (11), die wir direkt bewiesen haben.

Die praktische Auswertung der Wahrscheinlichkeiten $P^{r_1 \ldots r_s}_{(x_1 \ldots x_m)}$ führt bereits bei einer kleinen Anzahl Personen unterschiedlichen Risikos auf eine kaum zu bewältigende Zahl von Rechenoperationen, so dass man auf Näherungsverfahren angewiesen ist.

Résumé

Le présent travail se propose de représenter, à l'aide de méthodes stochastiques, l'évolution d'une collectivité de personnes constituée d'une manière arbitraire et soumise à plusieurs causes d'extinction. Les formules sont établies sur la base d'hypothèses très générales. L'importance pratique de certains cas spéciaux est mise en évidence; en particulier, les résultats obtenus présentent une certaine analogie avec ceux provenant de problèmes stochastiques classiques.

Summary

The present paper deals with the evolution of any population of insured persons by applying the methods of the theory of probability and by taking into account several causes for withdrawal. The mathematical formulas are derived under general conditions. The practical significance of several special cases is outlined and their formal congruity with the results of other problems in the theory of probability is pointed out.

Riassunto

Questo lavoro si propone di presentare, mediante metodi stocastici, l'evoluzione di una collettività di assicurati costituita in maniera arbitraria, tenuto conto di numerose cause di estinzione. Le formule matematiche sono stabilite in base a condizioni generali. Inoltre è messa in evidenza l'importanza pratica di diversi casi speciali e in particulare la loro concordanza formale con risultati di altri problemi stocastici.