

# Nomographische Darstellung statistischer Prüfverfahren

Autor(en): **Wenger, Alfred**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **63 (1963)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966933>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Nomographische Darstellung statistischer Prüfverfahren

*Von Alfred Wenger, Bern*

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Lösen einiger Gleichungen statistischer Prüfverfahren mittelst Fluchtlinientafeln. Für jedes aufgeführte Prüfverfahren wird ein anders aufgebautes Nomogramm gesucht, um die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten zu betonen. Zu den einzelnen Gleichungen werden die zugehörigen nomographischen Grundformen gesucht. Jede dieser Formen hat ihre Nomogrammskalen, die in kartesischen Koordinaten ausgedrückt unmittelbar die Fluchtlinientafeln bestimmen. Da in der Praxis sich nur einfache Formen der Tafeln bewähren, wird diesem Postulat grösste Wichtigkeit beigemessen. Gerade unter diesem Gesichtspunkt erhält die Anwendung des Netzes mit festbleibendem Dreieck und des Skelettes auf einer Ellipse ihre entscheidende Bedeutung.

## 1. Einleitung

Nomogramme dienen zur graphischen Lösung von funktionalen Zusammenhängen mehrerer Veränderlicher. Als neues Element gegenüber der gewöhnlichen graphischen Darstellung treten Funktionsleitern auf, und die Analyse wechselseitiger Bindungen variabler Grössen führt auf sogenannte Rechentafeln. In der Technik sowie in der Praxis der verschiedensten Wissensgebiete finden Nomogramme vielfach Anwendung.

In der vorliegenden Abhandlung soll nachgewiesen werden, wie sich einige bekannte Prüfverfahren der mathematischen Statistik durch Nomogramme darstellen lassen. Dem Leser sollen Anregungen vermittelt werden zur Herstellung von Nomogrammen, die seinen Bedürfnissen angepasst sind.

Am Beispiel des  $t$ -Testes wird gezeigt, dass sich für ein und dieselbe Ausgangsgleichung mehrere Tafeln entwerfen lassen. Dies dürfte für die statistische Praxis äusserst wertvoll sein, kann doch mit der nomographischen Lösung den besonderen Verhältnissen von Fall zu Fall angemessen Rechnung getragen werden.

Um Nomogramme richtig zu entwerfen, bedarf es der Kenntnis der massgebenden Grundlagen. In den Wesenszügen werden in meiner Dissertation die Theorie und die Methoden zur Konstruktion von Nomogrammen aufgezeigt. Die Anwendung des Netzes mit festbleibendem Dreieck oder des Skelettes auf einer Ellipse gestattet, beliebige Fluchtlinientafeln rein nach geometrischen Erwägungen umzuformen. Dadurch wird die bestmögliche Gestalt der gewünschten Tafel erreicht.

## 2. Prüfen von Häufigkeiten

Will man beobachtete Häufigkeiten  $z_i$  einer statistischen Verteilung mit den unter einer bestimmten Annahme erwarteten theoretischen Häufigkeiten  $\varphi_i$  vergleichen, so bedient man sich des  $\chi^2$ -Testes

$$\chi^2 = S_{i=1}^N \frac{(z_i - \varphi_i)^2}{\varphi_i}.$$

Der errechnete  $\chi^2$ -Wert wird der Sicherheitsgrenze  $\chi_{P,n}^2$  gegenübergestellt, und aus

$$\chi^2 \geq \chi_{P,n}^2$$

folgt man alsdann die Signifikanz der Abweichungen zwischen beobachteten und theoretisch erwarteten Häufigkeiten. Dabei hängt die Sicherheitsgrenze sowohl von der Sicherheitsschwelle  $P$  als auch von der Zahl der Freiheitsgrade  $n$  ab; letztere entsprechen der Zahl der voneinander linear unabhängigen Unterschiede  $(z_i - \varphi_i)$ .

Um eine dieses Problem lösende Fluchtlinientafel zu konstruieren, müssen wir eine funktionale Abhängigkeit finden, die einer nomographischen Grundform entspricht.

Die Näherung von *Fisher*

$$\chi_{P,n}^2 = \frac{1}{2} (Z_{2P} + \sqrt{2n-1})^2$$

schlägt die Brücke zur Sicherheitsgrenze der standardisierten Normalverteilung und liefert die  $\chi^2$  mit genügender Genauigkeit. Durch die Umformung

$$\sqrt{2} \chi_{P,n} = Z_{2P} + \sqrt{2n-1}$$

erhalten wir die Grundform  $f_3 = f_1 + f_2$  mit

$$f_3 = \sqrt{2} \chi, \quad f_2 = Z_{2P}, \quad f_1 = \sqrt{2n-1}.$$

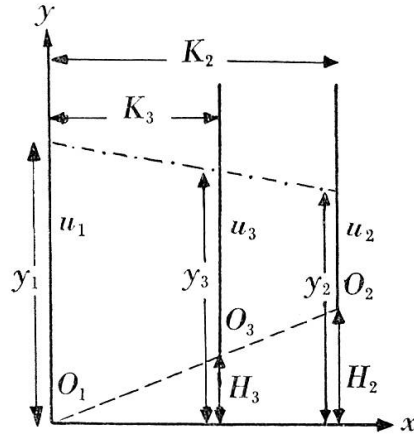
Diese Grundform lässt sich durch ein Nomogramm mit parallelen Skalen lösen. Gleichungen der Nomogrammskalen

Skala  $n$ :  $x_1 = 0, \quad y_1 = \mu_1 f_1$

Skala  $Z_{2P}$ :  $x_2 = K_2, \quad y_2 = \mu_2 f_2 + H_2$

Skala  $\chi$ :  $x_3 = K_3, \quad y_3 = \mu_3 f_3 + H_3$

mit  $\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad K_3 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} K_2.$



Wir fordern die Variabilität

$$\begin{aligned} 1 \leq n \leq 30 &\rightarrow 1 \leq f_1 \leq 8 \\ -3 \leq Z_{2P} \leq 3 &\rightarrow -3 \leq f_2 \leq 3 \\ 0 \leq \chi \leq 7 &\rightarrow 0 \leq f_3 \leq 10 \end{aligned}$$

Um die Graphik 1 rationell auszunützen, setzen wir

$$\mu_1 = \mu_2 = 30 \quad \text{und} \quad K_2 = 140;$$

aus den Nebenbedingungen werden

$$\mu_3 = 15 \quad \text{und} \quad K_3 = 70.$$

Damit  $A_1 = \min f_1(n)$  und  $A_2 = \min f_2(Z_{2P})$  auf der gleichen Höhe liegen, muss  $H_2 = 120$  gewählt werden; nach Strahlensatz wird alsdann  $H_3 = 60$ . Die Gleichungen der Nomogrammskalen lauten demnach

Skala  $n$ :  $x_1 = 0, \quad y_1 = 30 \sqrt{2n-1}$

Skala  $Z_{2P}$ :  $x_2 = 140, \quad y_2 = 30 Z_{2P} + 120$

Skala  $\chi$ :  $x_3 = 70, \quad y_3 = 15 \sqrt{2} \chi + 60$

Eine Doppelleiter liefert auf dem Träger der Skala  $\chi$  die Werte von  $\chi_{P,n}^2$ . In der Praxis ist nicht die Bindung zu  $Z_{2P}$  gesucht, sondern zu der Sicherheitsschwelle  $P$ ; wenn wir den Träger der Skala  $Z_{2P}$  ebenfalls zu einer Doppelleiter machen, gelingt es direkt aus  $P$ , bei gegebenem  $n$ , den Wert für  $\chi^2$  zu bestimmen.

### 3. Vergleich eines Durchschnittes mit seinem theoretischen Wert

Gegeben sei der Durchschnitt  $\bar{x}$  aus  $N$  Werten. Wollen wir die Hypothese prüfen, ob die  $N$  Elemente umfassende Wertereihe als eine zufällige Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem Durchschnitt  $\mu$  und unbekannter mittlerer quadratischer Abweichung aufgefasst werden könne, mit andern Worten ob  $\bar{x}$  zufällig oder signifikant von  $\mu$  abweiche, so ist die Prüfgrösse

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{N},$$

$$\text{mit } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{zu berechnen.}$$

Die Signifikanz wird mit Hilfe des Kriteriums

$$t \geq t_{P,n}$$

beurteilt; dabei ist die Sicherheitsgrenze von zwei Parametern abhängig, von der Sicherheitsschwelle  $P$  einerseits und der Zahl der Freiheitsgrade  $n = N - 1$  anderseits.

Wir suchen eine nomographische Lösung für die zu errechnenden  $t$ -Werte. Die Gleichung enthält vier Variable und verlangt ein zusammengesetztes Nomogramm. Durch die Umformung

$$\frac{0 - (-t)}{d - 0} = \frac{0 - (-\sqrt{N})}{s - 0}, \quad \text{mit } d = \bar{x} - \mu$$

erhalten wir die nomographische Grundform der Kreuzfluchttafel,

$$\frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} = \frac{f_4 - f_3}{g_4 - g_3}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad f_1 &= 0, & g_1 &= -t \\ f_2 &= d, & g_2 &= 0 \\ f_3 &= -\sqrt{N}, & g_3 &= 0 \\ f_4 &= 0, & g_4 &= s \end{aligned}$$

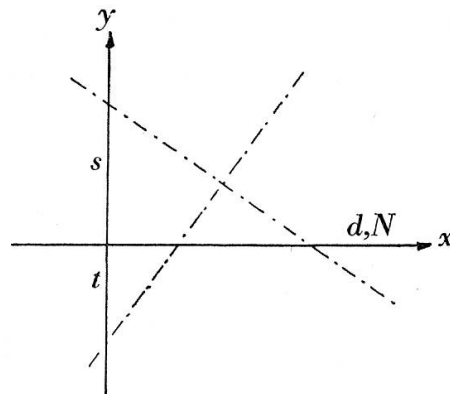
Gleichung der Nomogrammskalen

$$\begin{aligned} \text{Skala } t: & \quad x_1 = f_1, & \quad y_1 = g_1 \\ \text{Skala } d: & \quad x_2 = f_2, & \quad y_2 = g_2 \\ \text{Skala } N: & \quad x_3 = -f_3, & \quad y_3 = g_3 \\ \text{Skala } s: & \quad x_4 = -f_4, & \quad y_4 = g_4 \end{aligned}$$

Die Verbindung mit den vier Skalen oder Leitern wird durch ein Rechtwinkelmkreuz hergestellt.

Wir können demnach schreiben

$$\begin{aligned} \text{Skala } t: & \quad x_1 = 0, & \quad y_1 = -t \\ \text{Skala } d: & \quad x_2 = d, & \quad y_2 = 0 \\ \text{Skala } N: & \quad x_3 = \sqrt{N}, & \quad y_3 = 0 \\ \text{Skala } s: & \quad x_4 = 0, & \quad y_4 = s \end{aligned}$$



Diese Gleichungen der Nomogrammskalen befriedigen uns nicht. Zunächst liegen die Skalen  $t$  und  $s$  auf dem gleichen Träger ( $y$ -Achse) und stellen daher bei genügend grossem Massstab ein zu kleines Intervall dar. Da ferner alle Skalen den gleichen Massstab eins aufweisen, werden bei einer Vergrösserung eines bestimmten Intervalles die andern drei gleichzeitig mitwachsen. Um diesen Mängeln zu begegnen, müssen wir in die Gleichungen der Skalen der Kreuzfluchttafel für den allgemeinen Fall eingehen:

$$\begin{aligned} \text{Skala } t: & \quad X_1 = a_1 f_1 + a_2 g_1 + b_1, & \quad Y_1 = a_3 f_1 + a_4 g_1 + b_2 \\ \text{Skala } d: & \quad X_2 = a_1 f_2 + a_2 g_2 + b_1, & \quad Y_2 = a_3 f_2 + a_4 g_2 + b_2 \\ \text{Skala } N: & \quad X_3 = k(-a_4 f_3 - a_3 g_3) + b_3, & \quad Y_3 = k(a_2 f_3 + a_1 g_3) + b_4 \\ \text{Skala } s: & \quad X_4 = k(-a_4 f_4 - a_3 g_4) + b_3, & \quad Y_4 = k(a_2 f_4 + a_1 g_4) + b_4 \end{aligned}$$

Die Werte der Parameter sind nur durch die Bedingung beschränkt

$$(a_1 a_4 - a_2 a_3) \neq 0.$$

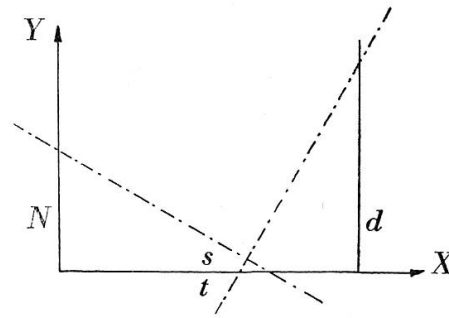
In unserem Fall lautet die Skalengleichung

$$\begin{aligned} \text{Skala } t: & \quad X_1 = -a_2 t + b_1, & \quad Y_1 = -a_4 t + b_2 \\ \text{Skala } d: & \quad X_2 = a_1 d + b_1, & \quad Y_2 = a_3 d + b_2 \\ \text{Skala } N: & \quad X_3 = k a_4 \sqrt{N} + b_3, & \quad Y_3 = -k a_2 \sqrt{N} + b_4 \\ \text{Skala } s: & \quad X_4 = -k a_3 s + b_3, & \quad Y_4 = k a_1 s + b_4 \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Parameter derart, dass eine Fluchtlinientafel von nebenstehender Form resultiert

$$a_1 = a_4 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

Der Parameter  $b_1$  misst den Abstand zwischen den beiden parallelen Skalen  $N$  und  $d$  und beträgt 200.



Fordern wir noch die Variabilität

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 20, & & 0 \leq N \leq 500 \\ 0 \leq d \leq 30, & & 0 \leq s \leq 50 \end{aligned}$$

so folgt für die resultierenden Parameter

$$a_2 = 10, \quad a_3 = 5, \quad k = -0,75.$$

Die endgültigen Gleichungen der Nomogrammskalen lauten demzufolge

$$\begin{aligned} \text{Skala } t: & \quad X_1 = -10t + 200, & Y_1 = 0 \\ \text{Skala } d: & \quad X_2 = 200, & Y_2 = 5d \\ \text{Skala } N: & \quad X_3 = 0, & Y_3 = 7,5\sqrt{N} \\ \text{Skala } s: & \quad X_4 = 3,75s, & Y_4 = 0 \end{aligned}$$

Ein Vorteil bei dieser Fluchtlinientafel (Graphik 2) sind die drei regulären Skalen  $t, d, s$ . Dagegen ist ungünstig, dass gerade die viel vorkommenden Werte von  $t$  und  $d$  nahe beisammen liegen und in diesen Fällen die Ungenauigkeit relativ gross wird.

Wir wollen nun versuchen, in einer anderen Fluchtlinientafel die beanstandeten Mängel zu beheben und zugleich das Intervall für  $N$  zu vergrössern. Die Umformung laute nunmehr

$$\frac{\log t - \log d}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{2} \log N - \log s}{1 - 0};$$

um die Bindung zur Grundform  $\frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} = \frac{f_4 - f_3}{g_4 - g_3}$

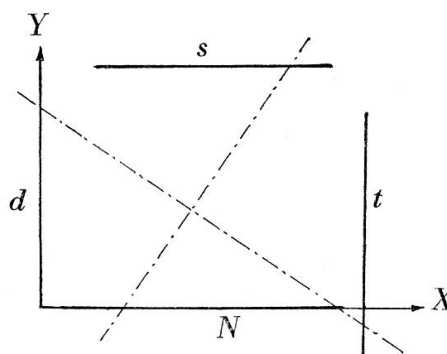
der Kreuzfluchttafel herzustellen, setzen wir

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & g_1 &= \log d \\ f_2 &= 1, & g_2 &= \log t \\ f_3 &= \log s, & g_3 &= 0 \\ f_4 &= \frac{1}{2} \log N, & g_4 &= 1 \end{aligned}$$

Nach der allgemeinen Form unter Beachtung der Vertauschung der Argumente folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \text{Skala } d: X_1 &= a_2 \log d + b_1, & Y_1 &= a_4 \log d + b_2 \\ \text{Skala } t: X_2 &= a_1 + a_2 \log t + b_1, & Y_2 &= a_3 + a_4 \log t + b_2 \\ \text{Skala } s: X_3 &= k(-a_4 \log s) + b_3, & Y_3 &= k(a_2 \log s) + b_4 \\ \text{Skala } N: X_4 &= k(-a_4 \frac{1}{2} \log N - a_3) + b_3, & Y_4 &= k(a_2 \frac{1}{2} \log N + a_1) + b_4 \end{aligned}$$

Wir wollen eine Kreuzfluchttafel erhalten, in der  $d$  und  $t$  einerseits und  $s$  und  $N$  anderseits parallel zueinander sind. Zugleich sollen die Leitern  $d$ ,  $t$  und  $s$ ,  $N$  paarweise aufeinander senkrecht stehen.



Der Abstand zwischen zwei Parallelen sei 160, um in der nebenliegenden Graphik die Fläche rationell auszunutzen. Damit sind folgende Parameterwerte gebunden

$$a_2 = b_1 = 0, \quad k a_1 + b_4 = 0, \quad a_1 = b_4 = 160, \quad k = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Skala } d: X_1 &= 0, & Y_1 &= a_4 \log d + b_2 \\ \text{Skala } t: X_2 &= 160, & Y_2 &= a_3 + s_4 \log t + b_2 \\ \text{Skala } s: X_3 &= a_4 \log s + b_3, & Y_3 &= 160 \\ \text{Skala } N: X_4 &= a_4 \frac{1}{2} \log N + a_3 + b_3, & Y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Der Parameter  $a_4$  tritt als Massstabsfaktor auf, und die von uns geforderte Variabilität der Veränderlichen

$$\begin{aligned} 1,5 \leq t \leq 100, & \quad 1 \leq N \leq 5000 \\ 0,5 \leq d \leq 50, & \quad 0,1 \leq s \leq 100 \end{aligned}$$

wobei  $s$  die grösste Länge mit drei logarithmischen Einheiten aufweist, lässt ihn zu  $a_4 = 80$  werden.

Die restlichen drei Parameter  $a_3$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  ermöglichen, die Skalen so auf ihre Träger zu legen, dass die Verteilung der Werte ein möglichst symmetrisches Bild ergibt; hierzu sollten die Argumente der Mitten der Leitern auch auf die Mitten ihrer Träger fallen. In unserem Falle müssen



die Argumente  $t = 15$  und  $d = 5$  auf der Höhe  $Y = 80$  liegen, und die Argumente  $N = 100$  und  $s = 3$  auf dem Abszissenwert  $X = 80$ .

$$\begin{aligned} 80 \log 5 + b_2 &= 80, & a_3 + 80 \log 15 + b_2 &= 80 \\ 80 \log 3 + b_3 &= 80, & 40 \log 100 + a_3 + b_3 &= 80 \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Parameterwerte  $a_3 = -40$ ,  $b_2 = 24$ ,  $b_3 = 40$ , wobei an Stelle von  $b_2 = 24$  der angenäherte Wert  $b_2 = 20$  gewählt wird.

Die Gleichungen der Nomogrammskalen lauten schliesslich

$$\begin{aligned} \text{Skala } d: & X_1 = 0, & Y_1 &= 80 \log d + 20 \\ \text{Skala } t: & X_2 = 160, & Y_2 &= 80 \log t - 20 \\ \text{Skala } s: & X_3 = 80 \log s + 40, & Y_3 &= 160 \\ \text{Skala } N: & X_4 = 40 \log N, & Y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir erfassen mit dieser Fluchtlinientafel (Graphik 3) relativ grosse Intervalle und erzielen eine gute Genauigkeit, vor allem bei kleinen Werten  $d$ ,  $t$ ,  $s$ , weil die sich entsprechenden Grössen immer weit voneinander sind.

Die Fluchtlinientafeln sind nicht an die Voraussetzungen gebunden, dass die Skala  $t$  die Lösung liefern muss; irgendeine der vier Skalen kann zur Lösungsleiter werden.

Die beiden soeben erörterten Nomogramme können für drei praktische Anwendungen gebraucht werden, wobei die Streuung  $s^2$  stets als bekannt vorausgesetzt wird.

a) Aufsuchen des  $t$ -Wertes zur Beurteilung der Signifikanz

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{N}.$$

b) Aufsuchen des erforderlichen Umfanges  $N$  bei vorgeschriebener Genauigkeit ( $t_{P,n}$ ,  $\bar{x} - \mu$ )

$$\sqrt{N} = \frac{t_{P,n} s}{\bar{x} - \mu}.$$

c) Aufsuchen von Grenzdifferenzen bei Vorgabe von  $t_{P,n}$  und  $N$

$$\bar{x} - \mu = \frac{t_{P,n} s}{\sqrt{N}}.$$

#### 4. Vergleich zweier Durchschnitte

Soll der Unterschied  $\bar{x}_1. - \bar{x}_2.$  zwischen zwei Durchschnitten geprüft werden, so lässt sich die  $t$ -Verteilung erneut benutzen. Die Testgrösse lautet jetzt

$$t = \frac{\bar{x}_1. - \bar{x}_2.}{s_{\bar{x}_1. - \bar{x}_2.}} \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}},$$

mit  $\bar{x}_1. = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} x_{1k}, \quad \bar{x}_2. = \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} x_{2k}$

und  $s_{\bar{x}_1. - \bar{x}_2.}^2 = \frac{1}{N_1 + N_2 - 2} \left( \sum_{k=1}^{N_1} (x_{1k} - \bar{x}_1.)^2 + \sum_{k=1}^{N_2} (x_{2k} - \bar{x}_2.)^2 \right).$

Der Nachweis signifikanter Abweichungen zwischen den beiden zu prüfenden Durchschnitten erfolgt vermöge des Kriteriums

$$t \geq t_{P, n} \quad \text{mit } n = N_1 + N_2 - 2 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Wir lösen diese Gleichung mit fünf Variablen mit einem zusammengesetzten Nomogramm, und zwar durch Fluchtlinientafeln mit Zapfenlinie. Durch die Einführung von 2 Hilfsvariablen ist eine Gleichung mit 5 Veränderlichen in drei Gleichungen separierbar

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= \lambda_1 \\ f_3 \lambda_2 &= \lambda_1 \\ f_4 + f_5 &= \lambda_2 \end{aligned}$$

Für die vorliegende Gleichung lauten die einzelnen Tafeln

$$\frac{1}{s^2} d^2 = k, \quad \text{mit } d = \bar{x}_1. - \bar{x}_2.$$

$$t^2 \frac{2}{N} = k,$$

$$\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_1} = \frac{2}{N}.$$

Die Skalen  $k$  und  $N$  ergeben die beiden Zapfenlinien. Die zwei ersten Gleichungen weisen die Grundform  $f_1 = f_2 f_3$  auf, die letzte die Grundform  $f_3 = f_1 + f_2$ .

Wir wollen für die beiden ersten Gleichungen ein Nomogramm auf einem Netz mit festbleibendem Dreieck konstruieren und führen ein

geradliniges Netz  $(\xi, \eta)$  sowie Umformungsparameter  $\alpha, \beta$  ein; zudem soll für die Koordinaten  $(\xi, \eta)$  gelten

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \alpha, \\ \eta &= \eta_0 + \beta.\end{aligned}$$

Diesem Ansatz entspricht eine Verschiebung aller Punkte um eine Grösse  $\alpha$  längs der Linien  $\eta = \text{konst.}$  und um eine Grösse  $\beta$  längs der Linien  $\xi = \text{konst.}$

Die Linien des Netzes stellen zwei Geradenbüschel dar. Sie haben ihre Zentren in den Basispunkten des festbleibenden Dreiecks  $MNP$ .

Büschel  $\xi = \text{konst.}$  und

$$\bar{\xi} = \text{konst. im Punkt } N,$$

Büschel  $\eta = \text{konst.}$  und

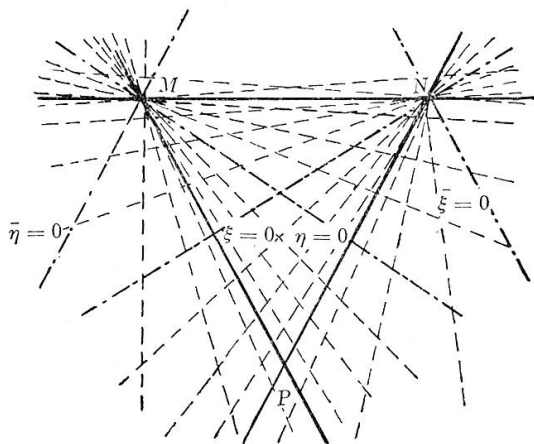
$$\bar{\eta} = \text{konst. im Punkt } M.$$

Die Geraden der Büschel, die auf die Seiten des festbleibenden Dreiecks  $MNP$  fallen, haben in den Koordinaten des Netzes  $(\xi, \eta)$  die Gleichungen:

$$\eta = \infty \text{ für die Geraden } MP,$$

$$\xi = \infty \text{ für die Geraden } NP,$$

$$\eta = \xi = -\infty \text{ für die Geraden } MN.$$

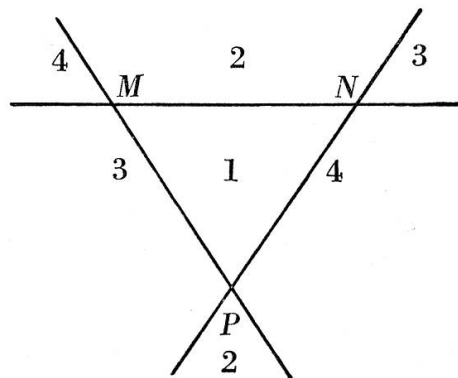


Gegen diese invarianten Grenzlagen liegen die Linien der Büschel immer dichter und fallen praktisch bald einmal mit der betreffenden Dreiecksseite zusammen.

Die Geraden  $\xi = 0$  und  $\eta = 0$  haben eine spezielle Lage, sie werden zu den Seitenhalbierenden des festbleibenden Dreiecks.

Die Geraden  $\bar{\xi} = 0$  und  $\bar{\eta} = 0$  schneiden die gegenüberliegende invariante Gerade im Unendlichen, sind daher parallel zu dieser.

Die invarianten Geraden, auf denen die Dreiecksseiten liegen, teilen die Ebene in vier gesonderte Gebiete. Bei Änderung der Umformungsparameter  $\alpha, \beta$  verschieben sich die Punkte der Ebene immer nur in ein und demselben Gebiet der Ebene. In jedem Teilgebiet wiederholen sich die Werte der Koordinaten.



Für die verschiedenen Gebiete der Ebene gelten nachstehende Kombinationen der Koordinaten

Kombination der Koordinaten	Flächenteil			
	1	2	3	4
	$\xi, \eta$	$\bar{\xi}, \bar{\eta}$	$\bar{\xi}, \eta$	$\xi, \bar{\eta}$

Wir legen auf das Netz  $(\xi, \eta)$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $(x, y)$ , in dem die festen Dreieckspunkte folgende Koordinaten aufweisen sollen

$$M(-S, L), \quad N(S, L), \quad P(0, 0).$$

Die Gleichungen der Linienscharen nehmen in kartesischen Koordinaten die folgende Gestalt an:

$$\text{Linienschar } \xi = \text{konst.} \quad \frac{x}{S} + \frac{L-y}{L} (1 + 2 \cdot 10^{-\xi}) = 1,$$

$$\text{Linienschar } \eta = \text{konst.} \quad \frac{x}{S} - \frac{L-y}{L} (1 + 2 \cdot 10^{-\eta}) = -1,$$

$$\text{Linienschar } \bar{\xi} = \text{konst.} \quad \frac{x}{S} + \frac{L-y}{L} (1 - 2 \cdot 10^{-\bar{\xi}}) = 1,$$

$$\text{Linienschar } \bar{\eta} = \text{konst.} \quad \frac{x}{S} - \frac{L-y}{L} (1 - 2 \cdot 10^{-\bar{\eta}}) = -1.$$

Wir wollen den Fall für ein Nomogramm annehmen, das der Gleichung

$$f_1(u_1) f_3(u_3) + f_2(u_2) g_3(u_3) + h_3(u_3) = 0 \quad \text{genügt.}$$

Gleichungen der Nomogrammskalen in den Koordinaten  $(\xi, \eta)$

$$\text{Skala } u_1: \xi_1 = \log |f_1(u_1) - A_1| + \log p, \quad \eta_1 = \infty$$

$$\text{Skala } u_2: \xi_2 = \infty, \quad \eta_2 = \log |f_2(u_2) - A_2| + \log q$$

$$\text{Skala } u_3: \xi_3 = \log \left| \frac{h_3(u_3) + A_1 f_3(u_3) + A_2 g_3(u_3)}{-f_3(u_3)} \right| + \log p,$$

$$\eta_3 = \log \left| \frac{h_3(u_3) + A_1 f_3(u_3) + A_2 g_3(u_3)}{-g_3(u_3)} \right| + \log q$$

$$\text{mit } p = \frac{1}{m_1 + A_1}, \quad q = \frac{1}{m_2 + A_2}, \quad \text{wobei } A_i = \min f_i(u_i).$$

Im obigen Ansatz sind nur noch  $p$  und  $q$  variabel. Wollen wir demnach die Werte der Koordinaten der Ausgangslage  $(\xi_0, \eta_0)$  des Nomogrammes erhalten, muss

$$\log p = 0 \quad \text{und} \quad \log q = 0 \quad \text{gesetzt werden.}$$

Mit diesen Überlegungen lassen sich die Gleichungen im Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  in bezug auf die Ausgangslage  $(\xi_0, \eta_0)$  und die Parameter

$$\alpha = \log p \quad \text{und} \quad \beta = \log q$$

in der gewünschten Form

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \alpha \\ \eta &= \eta_0 + \beta \end{aligned} \quad \text{darstellen.}$$

Gleichung der Nomogrammskalen in den Koordinaten  $(x, y)$

$$\text{Skala } u_1: \quad x_1 = \frac{K_1}{1 + \frac{1}{m_1} f_1(u_1)}, \quad y_1 = \frac{H_1}{1 + \frac{1}{m_1} f_1(u_1)}$$

$$\text{Skala } u_2: \quad x_2 = \frac{K_2}{1 + \frac{1}{m_2} f_2(u_2)}, \quad y_2 = \frac{H_2}{1 + \frac{1}{m_2} f_2(u_2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Skala } u_3: \quad x_3 &= \frac{m_1 K_1 f_3(u_3) + m_2 K_2 g_3(u_3)}{m_1 f_3(u_3) + m_2 g_3(u_3) - h_3(u_3)}, \\ y_3 &= \frac{m_1 H_1 f_3(u_3) + m_2 H_2 g_3(u_3)}{m_1 f_3(u_3) + m_2 g_3(u_3) - h_3(u_3)} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \frac{1}{m_i} = \frac{\mu_i}{m} \quad (i = 1, 2),$$

wobei die für das festbleibende Dreieck massgebenden Grössen

$$L = \frac{H_1}{1 + \frac{1}{m_1} A_1} = \frac{H_2}{1 + \frac{1}{m_2} A_2}$$

$$S = \frac{-K_1}{1 + \frac{1}{m_1} A_1} = \frac{K_2}{1 + \frac{1}{m_2} A_2}$$

sind.

Das Hauptanliegen ist, für die Werte  $1,9 \leq t \leq 5$  in unserem Gleichungssystem möglichst gute Resultate zu erhalten; wir gehen daher von der zweiten Gleichung aus

$$f_1 = f_2 f_3, \quad \text{mit } f_1 = k, f_2 = t^2, f_3 = \frac{2}{N}.$$

Setzen wir in die Gleichung  $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$

$$f_1 \rightarrow f_2, \quad f_2 \rightarrow f_1, \quad g_3 = -1, \quad h_3 = 0,$$

folgt die Grundform  $f_1(u_1) = f_2(u_2) f_3(u_3)$ .

In der Ausgangslage  $(\xi_0, \eta_0)$  werden die Parameter  $\alpha = \beta = 0$  gesetzt, und wir erhalten die Nomogrammskalen in den Koordinaten  $(\xi, \eta)$

Skala  $k$ :  $\xi_{01} = \infty, \quad \eta_{01} = \log |k|$

Skala  $t$ :  $\xi_{02} = \log |t^2 - 3,61|, \quad \eta_{02} = \infty$

Skala  $N$ :  $\xi_{03} = \log |-3,61|, \quad \eta_{03} = \log \left| \frac{7,22}{N} \right|;$

dabei wird nach der Beziehung  $A_i = \min f_i(u_i)$

$$A_2 = \min t^2 = (1,9)^2 = 3,61;$$

für  $A_1$  soll gelten  $A_1 = \min k = 0$ .

Bei der Skala  $N$  entspricht der Numerus von  $\xi_{03}$  dem absoluten Betrag einer negativen Grösse und jener von  $\eta_{03}$  dem absoluten Betrag einer positiven Grösse; die Skala  $N$  kommt in den Flächenteil 3 zu liegen. Die Lage des Netzes auf dem Nomogramm soll durch einige ausgewählte Argumente dargestellt werden.

$k$	$\eta$		$t$	$\xi$		$N$	$\eta$		$\bar{\xi}$	
	1. Var.	2. Var.		1. Var.	2. Var.		1. Var.	2. Var.	1. Var.	2. Var.
0	$-\infty$	$-\infty$	1,9	$-\infty$	$-\infty$	7,2	0	0,3	0,56	0,3
0,5	-0,30	0	2	-0,41	-0,67	9	-0,10	0,20	0,56	0,3
1	0	0,30	2,5	0,42	0,16	10	-0,16	0,14	0,56	0,3
2	0,30	0,60	3	0,73	0,47	15	-0,32	-0,02	0,56	0,3
5	0,70	1,00	4	1,09	0,83	20	-0,44	-0,14	0,56	0,3
10	1,00	1,30	5	1,33	1,08	50	-0,85	-0,55	0,56	0,3
20	1,30	1,60	6	1,51	1,25	70	-1,00	-0,70	0,56	0,3
30	1,48	1,78				100	-1,16	-0,86	0,56	0,3

Die erste Variante mit  $\alpha = \beta = 0$  ist ungenügend, da die Skala  $N$  zu stark zusammengedrückt ist und die Skala  $t$  bei den untern Werten zu sehr auseinandergezogen wird. In der zweiten Variante wählen wir die Parameter  $\alpha = -0,26$ , und  $\beta = 0,3$ . Mit  $\alpha = -0,26$  wird die Skala  $t$  nach unten hin verdichtet, wogegen wir die Skala  $N$  strecken und ihr zugleich eine senkrechte Lage geben, was ihre Eignung in der Konstruktion als Zapfenlinie zur dritten Gleichung wesentlich erhöht. Mittels der Setzung  $\beta = 0,3$  wird die Skala  $N$  wesentlich gestreckt, ohne dass ihr Träger seine Lage ändern würde. Wir erhalten die endgültige Lage des Nomogrammes im Netz  $(\xi, \eta)$ ; eine wesentlich bessere Darstellung ist schwer zu finden, weil die Skala  $k$  als Zapfenlinie zur ersten Gleichung auch den Bedingungen, die an diese Fluchtlinientafel gestellt werden, genügen muss. Die Konstruktion der Fluchtlinientafel auf dem Netz  $(\xi, \eta)$  ist zu wenig genau, wir müssen daher die Leitern in kartesischen Koordinaten darstellen. Wir kennen die Parameter  $\alpha, \beta, A_1, A_2$  im Netz und erhalten die Parameter

$$m_1 = 0,5, \quad m_2 = -1,81,$$

$$H_1 = L, \quad H_2 = -L, \quad K_1 = K_2 = S.$$

Für die Ausmasse des Dreieckes erwies sich die Wahl von  $S = 60$  und  $L = 200$  am vorteilhaftesten. Die Gleichungen der Nomogrammskalen in den Koordinaten  $(x, y)$  lauten demnach

$$(a) \text{ Skala } k: \quad x_1 = \frac{60}{1 + 2k}, \quad y_1 = \frac{200}{1 + 2k}$$

$$\text{Skala } t: \quad x_2 = \frac{60}{1 - 0,554t^2}, \quad y_2 = \frac{-200}{1 - 0,554t^2}$$

$$\text{Skala } N: \quad x_3 = 60, \quad y_3 = -200 + \frac{400}{1 + 3,6 \frac{2}{N}}$$

Jetzt gehen wir über zur ersten Gleichung

$$f_1 = f_2 f_3,$$

$$\text{mit } f_1 = k, \quad f_2 = \frac{1}{s^2}, \quad f_3 = d^2.$$

Nomogrammskalen in den Koordinaten  $(\xi, \eta)$

Skala  $k$ :  $\xi_{01} = \infty, \quad \eta_{01} = \log |k|$

Skala  $s$ :  $\xi_{02} = \log \left| \frac{1}{s^2} - 0,028 \right|, \quad \eta_{02} = \infty$

Skala  $d$ :  $\xi_{03} = \log |-0,028|, \quad \eta_{03} = \log |0,028 d^2|,$

dabei ist bereits  $A_1 = \min k = 0$  bestimmt;

$A_2$  sei durch die Setzung

$$A_2 = \min \frac{1}{s^2} = \frac{1}{6^2} = 0,028 \text{ gegeben.}$$

Die Skala  $d$  kommt in den Flächenteil 3 zu liegen. Wiederum sollen einige ausgewählte Argumente in einer Tabelle aufzeigen, wie das Nomogramm auf dem Netz liegt.

$s$	$\xi$		$d$	$\eta$		$\bar{\xi}$	
	1. Var.	2. Var.		1. Var.	2. Var.	1. Var.	2. Var.
1	-0,01	1,69	0	$-\infty$	$-\infty$	-1,55	0,15
2	-0,66	1,04	1	-1,25	-1,25	-1,55	0,15
3	-1,08	0,62	2	-0,65	-0,65	-1,55	0,15
4	-1,46	0,24	3	-0,30	-0,30	-1,55	0,15
5	-1,92	-0,22	4	-0,05	-0,05	-1,55	0,15
6	$-\infty$	$-\infty$	5	0,15	0,15	-1,55	0,15

Diese erste Variante mit  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0,3$  befriedigt gar nicht, da die Skala  $d$  fast waagrecht wird. Wir sind beim Transformieren stark eingengt, da die Skala  $k$  mit  $\beta = 0,3$  bereits fest ist. Wir müssen nun  $\alpha$  so stark variieren, bis die Skala  $d$  eine Neigung aufweist, die flache Schnitte mit der Fluchtgeraden möglichst ausschliesst und trotzdem ein vernünftiges Intervall für die Skalen  $d$  und  $s$  ergibt. Unser Parameter  $\alpha$  wird dadurch zu 1,7. Die resultierenden Intervalle

$$0,5 \leq d \leq 5, \quad 1 \leq s \leq 6$$

sind ziemlich klein, aber der Forderung nach grossen Intervallen steht diejenige nach guter Genauigkeit vor allem für kleine  $s$  und  $d$  gegenüber.



Für die Darstellung in kartesischen Koordinaten finden wir als zugehörige Parameter

$$m_1 = 0,5, \quad m_2 = -0,008,$$

$$H_1 = 200, \quad H_2 = -500, \quad K_1 = 60, \quad K_2 = 150,$$

und erhalten schliesslich die Gleichungen der Nomogrammskalen

(b) Skala  $k$ :  $x_1 = \frac{60}{1 + 2k}, \quad y_1 = \frac{200}{1 + 2k}$

Skala  $s$ :  $x_2 = \frac{150}{1 - 125 \frac{1}{s^2}}, \quad y_2 = -\frac{500}{1 - 125 \frac{1}{s^2}}$

Skala  $d$ :  $x_3 = 150 + \frac{-90}{1 + 0,016d^2}, \quad y_3 = -500 + \frac{700}{1 + 0,016d^2}$

Für die dritte Gleichung

$$f_3 = f_2 + f_1, \quad \text{mit } f_1 = \frac{1}{N_1}, \quad f_2 = \frac{1}{N_2}, \quad f_3 = \frac{2}{N}$$

müssen wir in der Gleichung  $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$

$$h_3 \rightarrow f_2, \quad f_2 \rightarrow f_3, \quad f_3 = 1, \quad g_3 = -1 \quad \text{setzen.}$$

In (a) hatten wir als Parameterdarstellung für die Leiter  $N$

$$x_3 = 60, \quad y_3 = -200 + \frac{400}{1 + 3,6 \frac{2}{N}};$$

damit der Nullpunkt des Koordinatensystems in den Punkt mit dem Argument  $f_3 = \infty$  fällt, müssen wir die Transformation

$$\bar{x} = x - 60, \quad \bar{y} = y + 200$$

ansetzen, die auf

$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{y}_3 = \frac{400}{1 + 3,6 \frac{2}{N}} \quad \text{führt.}$$

Wegen der formalen Gleichheit von  $f_1$  und  $f_2$  folgt unmittelbar

$$m_1 = m_2.$$

Wenn wir zudem die Forderung stellen, dass die  $f_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) mit einem Abstand von 50 von der  $y$ -Achse und auf einer Höhe von 400 liegen, lassen sich  $H_i$  und  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) bestimmen

$$H_1 = H_2 = 400, \quad K_1 = -K_2 = 50.$$

Die Gleichungen der Nomogrammskalen lauten

$$\begin{aligned} \text{(c) Skala } N_1: \quad \bar{x}_1 &= \frac{50}{1 + \frac{7,2}{N_1}}, & \bar{y}_1 &= \frac{400}{1 + \frac{7,2}{N_1}} \\ \text{Skala } N_2: \quad \bar{x}_2 &= \frac{50}{1 + \frac{7,2}{N_2}}, & \bar{y}_2 &= \frac{400}{1 + \frac{7,2}{N_2}} \\ \text{Skala } N: \quad \bar{x}_3 &= 0, & \bar{y}_3 &= \frac{400}{1 + \frac{7,2}{N}} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (a), (b) und (c) ergeben zusammen die Fluchtlinientafeln (Graphik 4) für die fünf Variablen  $t, d, s, N_1, N_2$  mit den beiden Zapfenlinien  $k$  und  $N$ , wobei  $k$ , da ohne praktische Bedeutung, nicht graduiert ist.

*Anmerkung:* Wenn  $N_1 = N_2$ , wird die Zapfenlinie  $N$  zur Leiter des Umfanges  $N$ . Dadurch kann die vorliegende Fluchtlinientafel wiederum drei praktischen Anwendungen genügen; sie gestattet demnach den  $t$ -Wert, den erforderlichen Umfang  $N$  oder die Grenzdifferenz  $d$  zu suchen.

## 5. Vergleich einer Streuung mit ihrem theoretischen Wert

Gegeben sei die Streuung  $s^2$  aus  $N$  Werten. Wollen wir die Hypothese prüfen, ob die Wertereihe aus  $N$  Elementen eine zufällige Stichprobe bilde aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der Streuung  $\sigma^2$ , so dient als Masszahl der Ansatz

$$\chi^2 = (N-1) \frac{s^2}{\sigma^2}, \quad \text{mit } s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Vermöge des Kriteriums

$$\chi^2 \geq \chi_{P,n}^2,$$

wo sich die Zahl der Freiheitsgrade zu  $n = N-1$  bemisst, wird über signifikante Abweichungen zwischen beobachteter ( $s^2$ ) und erwarteter Streuung ( $\sigma^2$ ) befunden.

Wenn wir im obigen Ansatz die Wurzel ziehen, erhalten wir

$$\chi = \sqrt{N-1} \frac{s}{\sigma},$$

die Grundform  $f_1 = f_2 f_3$ , mit

$$f_1 = \chi, \quad f_2 = \sqrt{N-1}, \quad f_3 = \frac{s}{\sigma}.$$

Da sowohl  $s^2$  wie  $\sigma^2$  bei jedem Vergleich bekannt sind, können wir den Quotienten  $\frac{s}{\sigma}$  als die dritte Variable betrachten.

Die Gleichung  $f_1 = f_2 f_3$  lässt sich durch die  $N$ - oder  $Z$ -Tafel lösen.

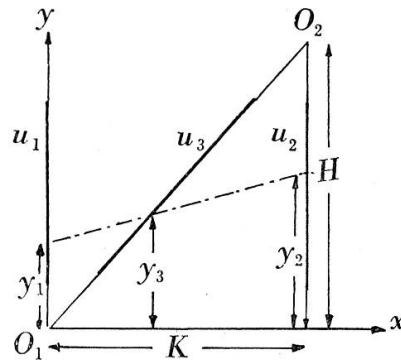
Gleichungen der Nomogrammskalen

Skala  $u_1$ :  $x_1 = 0, \quad y_1 = \mu_1 f_1(u_1)$

Skala  $u_2$ :  $x_2 = K, \quad y_2 = H - \mu_2 f_2(u_2)$

Skala  $u_3$ :  $x_3 = K - \frac{K}{1 + \frac{1}{m} f_3(u_3)},$

$$y_3 = H - \frac{H}{1 + \frac{1}{m} f_3(u_3)} \quad \text{mit } m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



Skalenargumente im Punkt  $O_1$ :  $f_1(u_1) = 0, \quad f_3(u_3) = 0$

Punkt  $O_2$ :  $f_2(u_2) = 0, \quad f_3(u_3) = \infty$

Den positiven Werten  $f_3(u_3)$  entspricht der innere Teil des Abschnittes  $O_1 O_2$ .

Wir fordern die Variabilität

$$0 \leq \chi^2 \leq 50 \rightarrow 0 \leq f_1 \leq 7$$

$$2 \leq N \leq 50 \rightarrow 1 \leq f_2 \leq 7$$

$$0,01 \leq \frac{s^2}{2} \leq 100 \rightarrow 0,1 \leq f_3 \leq 10$$

Durch die Setzung  $m = 1$  erhält die Skala  $\frac{s}{\sigma}$  das Aussehen einer logarithmischen Funktionsleiter.

Mit der Nebenbedingung  $m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ , folgt  $\mu_1 = \mu_2$ .

Ist nun  $\mu_1 = \mu_2 = 30$ ,  $K = 140$  und  $H = 210$ , so ist die Fläche der Graphik 5 am besten ausgenützt.

Die Gleichungen der Nomogrammskalen lauten nunmehr

Skala  $\chi$ :  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 30\chi$

Skala  $N$ :  $x_2 = 140$ ,  $y_2 = 210 - 30\sqrt{N-1}$

Skala  $\frac{s}{\sigma}$ :  $x_3 = 140 - \frac{140}{1 + \frac{s}{\sigma}}$ ,  $y_3 = 210 - \frac{210}{1 + \frac{s}{\sigma}}$

Durch Einführen von Doppelleitern auf den Trägern der Skalen  $\chi$  und  $\frac{s}{\sigma}$  lassen sich alle drei Veränderlichen so ablesen, wie sie im Ansatz zum Test eingehen.

### 6. Vergleich zweier Streuungen

Sollen zwei Streuungen  $s_1^2$  und  $s_2^2 < s_1^2$  auf ihre Abweichungen hin untersucht werden, so berechnet man nach *Fisher* mit Vorteil das Verhältnis

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

mit  $s_1^2 = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{k=1}^{N_1} (x_{1k} - \bar{x}_1)^2$ ,  $s_2^2 = \frac{1}{N_2 - 1} \sum_{k=1}^{N_2} (x_{2k} - \bar{x}_2)^2$ .

Die Gegenüberstellung mit dem Sicherheitspunkt  $F_{P; n_1, n_2}$  gestattet, vermöge der Relation

$$F \geq F_{P; n_1, n_2}$$

signifikante Abweichungen zwischen den beiden zu prüfenden Streuungen zu erkennen. Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt  $n_1 = N_1 - 1$  und  $n_2 = N_2 - 1$ .

Die obige Gleichung bringen wir durch die Umformung

$$\log F = 2 \log s_1 - 2 \log s_2$$

auf die zweite Grundform  $f_3 = f_1 + f_2$ , wobei

$$f_3 = \log F, \quad f_1 = 2 \log s_1, \quad f_2 = -2 \log s_2.$$

Wir wollen das Nomogramm auf einem Skelett konstruieren, und wählen hierzu eine Ellipse mit Sekante. Eine Umformung ist dann nichts anderes als eine Verschiebung der Argumente dieser Skalen längs ihrer Träger.

Die Grundform  $f_3 = f_1 + f_2$  kann geschrieben werden

$$\lambda(\varphi_0 + \gamma) = \lambda(\xi_0 + \alpha) + \lambda(\eta_0 + \beta);$$

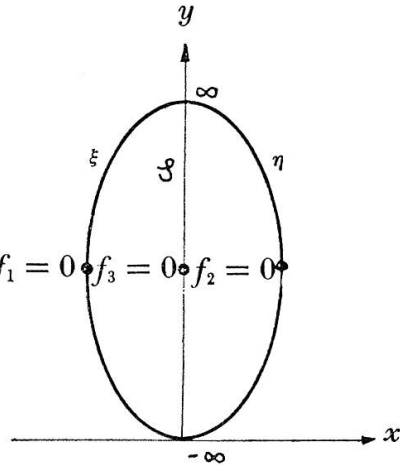
nun gilt

$$\xi_0 = f_1, \quad \eta_0 = f_2, \quad \varphi_0 = f_3, \quad \gamma = \alpha + \beta. \quad f_1 = 0 \quad f_3 = 0 \quad f_2 = 0$$

Durch die Substitution

$$\varphi = \lambda(\varphi_0 + \gamma), \quad \xi = \lambda(\xi_0 + \alpha), \quad \eta = \lambda(\eta_0 + \beta),$$

erhalten wir  $\varphi = \xi + \eta$ .



Die Gleichungen  $f_3 = f_1 + f_2$  und  $\varphi = \xi + \eta$  werden durch das gleiche Nomogramm dargestellt; dessen Träger nennen wir das Skelett des Nomogrammes auf einer Ellipse und einem Durchmesser.

Das Skelett besteht aus drei Koordinatenskalen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\varphi$ . Die Werte der Variablen variieren auf ihnen von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . Die Schnittpunkte des geradlinigen Trägers der Skala mit der Ellipse haben oben die Argumente  $\varphi = \xi = \eta = +\infty$  und unten  $\varphi = \xi = \eta = -\infty$ . Die Skalen liegen symmetrisch zu den Punkten mit den Argumenten null.

Die Gleichung in kartesischen Koordinaten erhalten wir mittels der Parameterdarstellung einer Ellipse.

$$x = \frac{S t}{1 + t^2}, \quad y = \frac{L}{1 + t} \quad \text{mit } t = 10^{-\delta}.$$

Für die Skala  $\xi$  wird  $t$  negativ, für die Skala  $\eta$  wird  $t$  dagegen positiv. Jetzt können wir die Gleichungen der Skalen des Skelettes vormerken

$$\text{Skala } \xi: \quad x_1 = -\frac{S 10^{-\xi}}{1 + 10^{-2\xi}}, \quad y_1 = \frac{L}{1 + 10^{-2\xi}}$$

$$\text{Skala } \eta: \quad x_2 = \frac{S 10^{-\eta}}{1 + 10^{-2\eta}}, \quad y_2 = \frac{L}{1 + 10^{-2\eta}}$$

$$\text{Skala } \varphi: \quad x_3 = 0, \quad y_3 = \frac{L}{1 + 10^{-\varphi}}$$

Wir setzen  $\xi_0 = 2 \log s_1$ ,  $\eta_0 = -2 \log s_2$ ,  $\varphi_0 = \log F$ .

Unser Ziel ist, eine Fluchtlinientafel zu konstruieren, die in den Intervallen

$$0,5 \leq s_1 \leq 20, \quad 0,1 \leq s_2 \leq 10, \quad 1 \leq F \leq 1000$$

die Gleichung des  $F$ -Testes mit genügender Genauigkeit löst. Einige ausgewählte Argumente zeigen in der folgenden Tabelle, wie die Fluchtlinientafel auf dem Skelett liegt (siehe Graphik 6).

$s_1$	$\xi$			$s_2$	$\eta$			$F$	$\varphi$		
	1. Var.	2. Var.	3. Var.		1. Var.	2. Var.	3. Var.		1. Var.	2. Var.	3. Var.
0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	0	-1,5	-0,50
0,5	-0,6	-1,8	-0,60	0,1	2,0	1,7	0,57	5	0,7	-0,8	-0,27
1	0	-1,2	-0,40	0,2	1,4	1,1	0,37	20	1,3	-0,2	-0,07
2	0,6	-0,6	-0,20	0,5	0,6	0,3	0,10	100	2,0	0,5	0,17
5	1,4	0,2	0,07	1	0	-0,3	-0,10	200	2,3	0,8	0,27
10	2,0	0,8	0,27	2	-0,6	-0,9	-0,30	500	2,7	1,2	0,40
20	2,6	1,4	0,47	10	-2,0	-2,3	-0,77	1000	3,0	1,5	0,50

Die erste Variante mit  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  und  $\lambda = 1$  erreicht unser Ziel nicht. Wir versuchen nunmehr, mit den Parametern  $\alpha, \beta$  die Werte der Skala  $F$  auch unter den Nullpunkt zu bekommen, damit bei einer Ähnlichkeitsverformung durch  $\lambda$  sich die Argumentswerte des Nomogrammes gleichmässig gegen die Mitte zu verdichten. Die zweite Variante resultiert aus der Setzung

$$\alpha = -1,2, \quad \beta = -0,3, \quad \text{und aus } \alpha + \beta = \gamma \quad \text{folgt } \gamma = -1,5.$$

Mit dem Parameter  $\lambda = \frac{1}{3}$  ergibt sich die dritte Variante, eine Fluchtlinientafel (Graphik 6), die unsere Ansprüche befriedigt. Die eingeführten Grössen werden nun

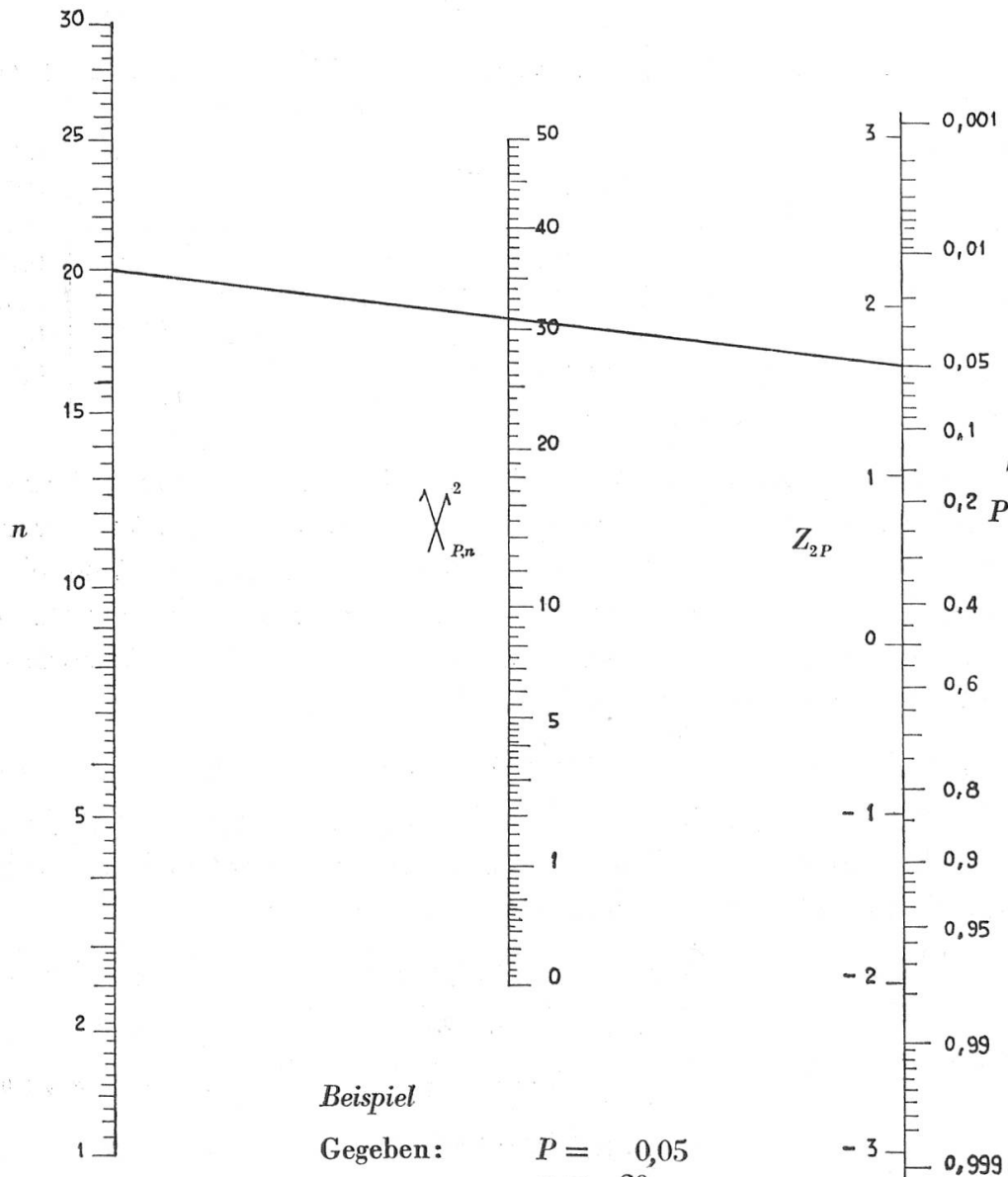
$$\xi = \frac{2}{3} \log s_1 - 0,4, \quad \eta = -\frac{2}{3} \log s_2 - 0,1, \quad \varphi = \frac{1}{3} \log F - 0,5;$$

$$\text{Skala } s_1: \quad x_1 = -\frac{150 \cdot 10^{-\frac{2}{3} \log s_1 + 0,4}}{1 + 10^{-\frac{4}{3} \log s_1 + 0,8}}, \quad y_1 = \frac{200}{1 + 10^{-\frac{4}{3} \log s_2 + 0,8}}$$

$$\text{Skala } s_2: \quad x_2 = \frac{150 \cdot 10^{\frac{2}{3} \log s_2 + 0,1}}{1 + 10^{\frac{4}{3} \log s_2 + 0,2}}, \quad y_2 = \frac{200}{1 + 10^{\frac{4}{3} \log s_2 + 0,2}}$$

$$\text{Skala } F: \quad x_3 = 0, \quad y_3 = \frac{200}{1 + 10^{-\frac{1}{3} \log F + 0,5}}$$

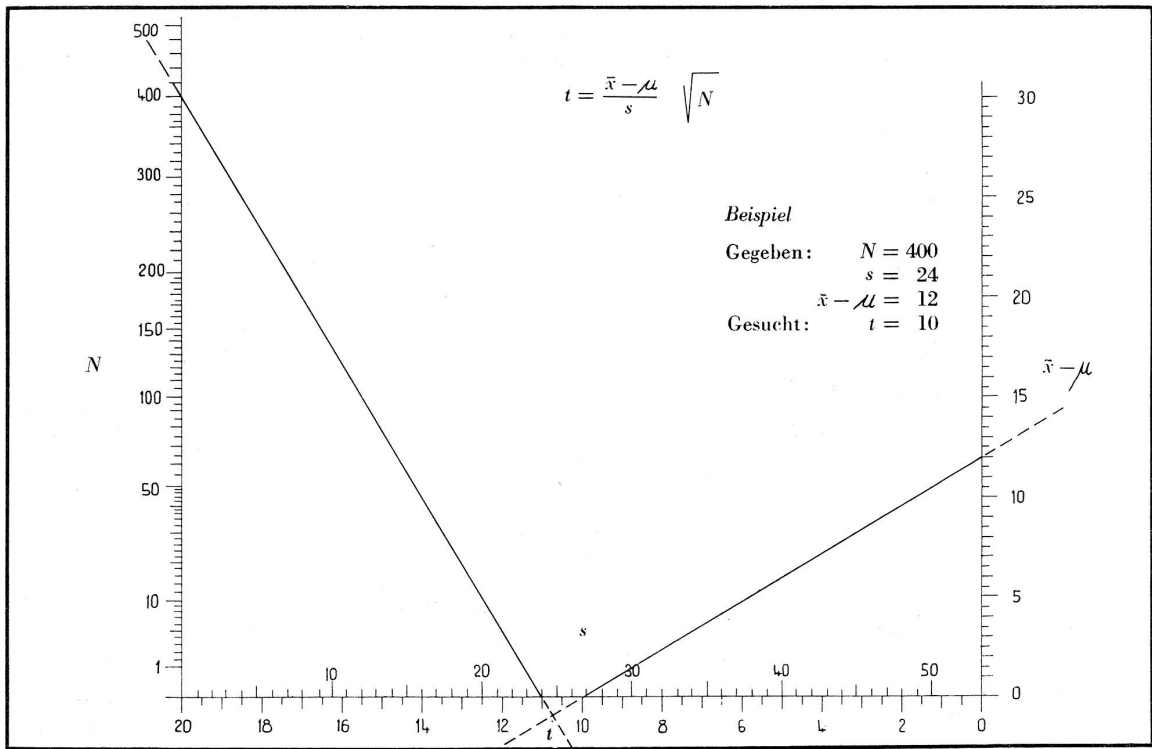
$$\chi^2_{Fr} = \frac{1}{2} \left[ Z_{2P} + \sqrt{2n-1} \right]^2$$



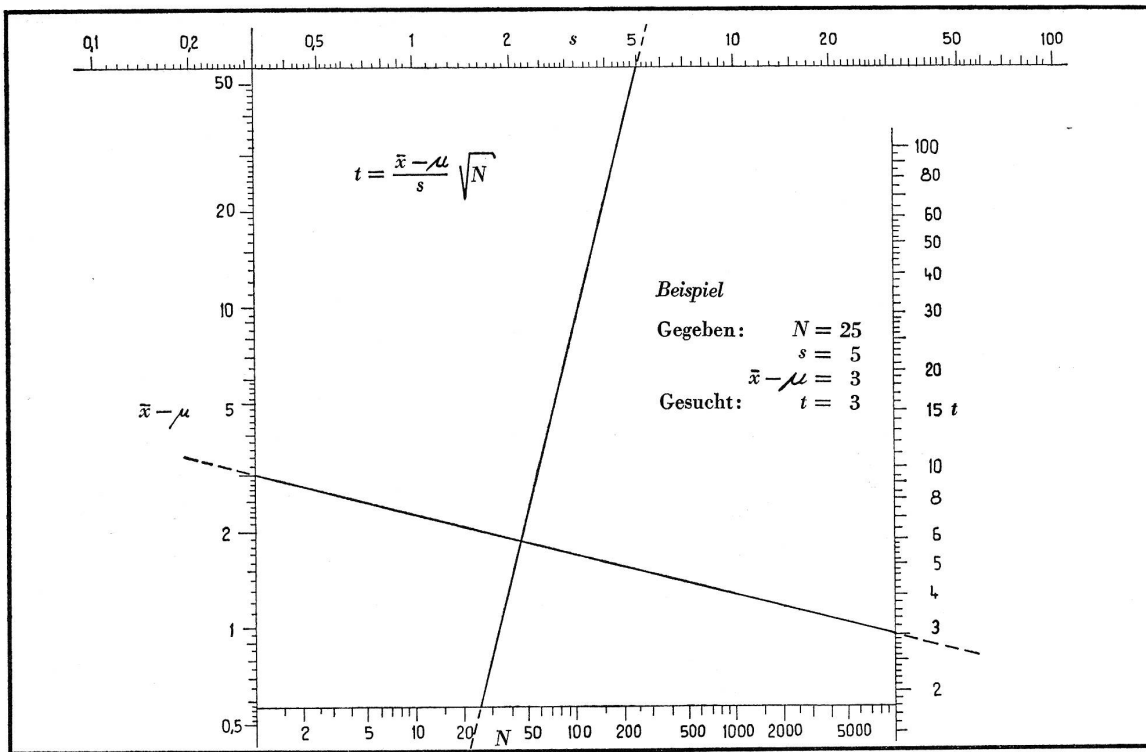
*Beispiel*

Gegeben:  $P = 0,05$   
 $n = 20$

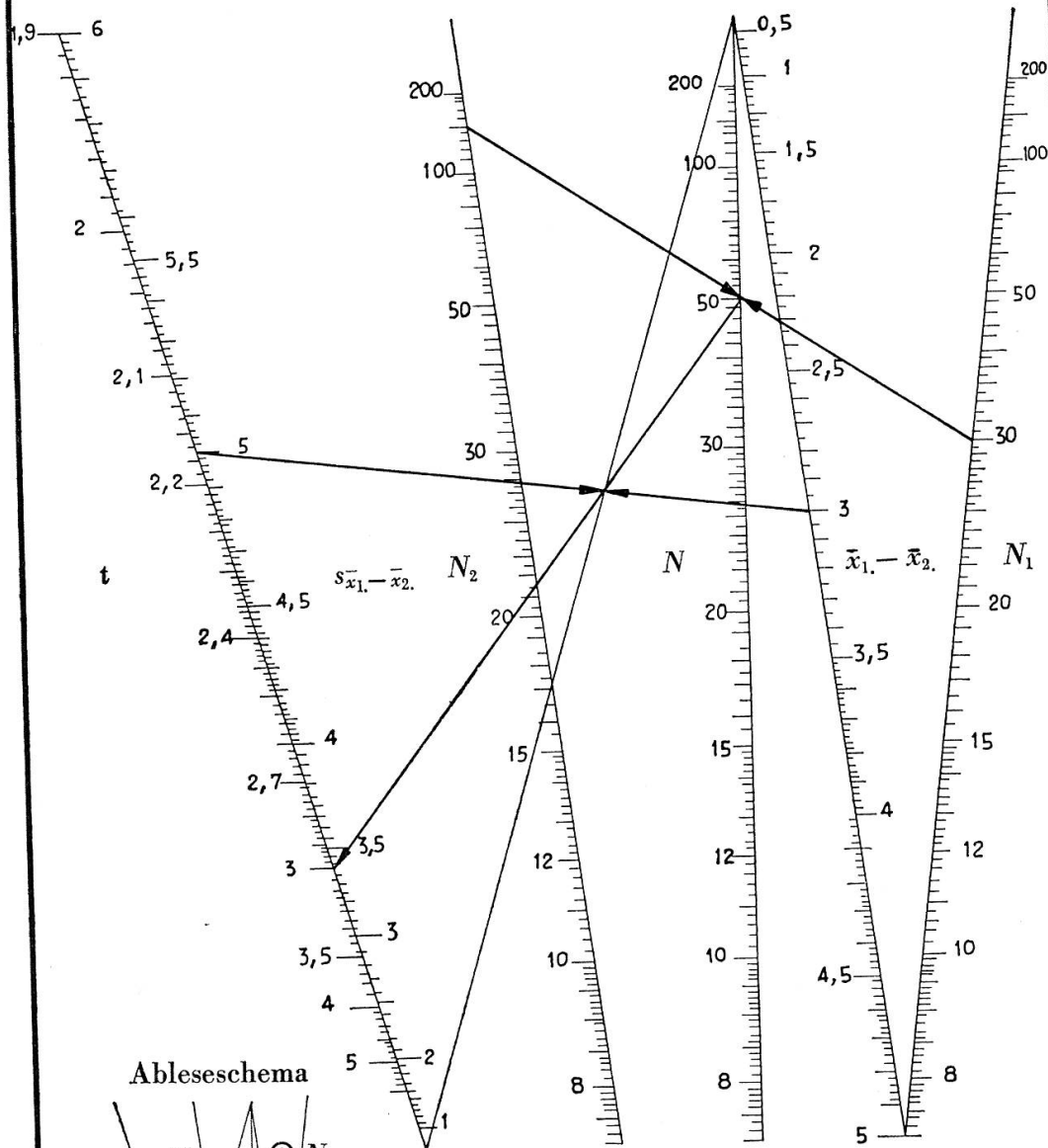
Gesucht:  $\chi^2_{0,05;20} = 31,1$



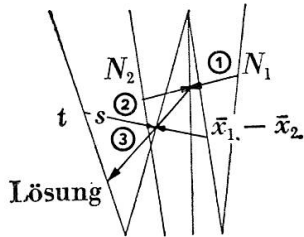




$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}}$$



Ableseschema



Lösung

Beispiel

Gegeben:  $N_1 = 30$

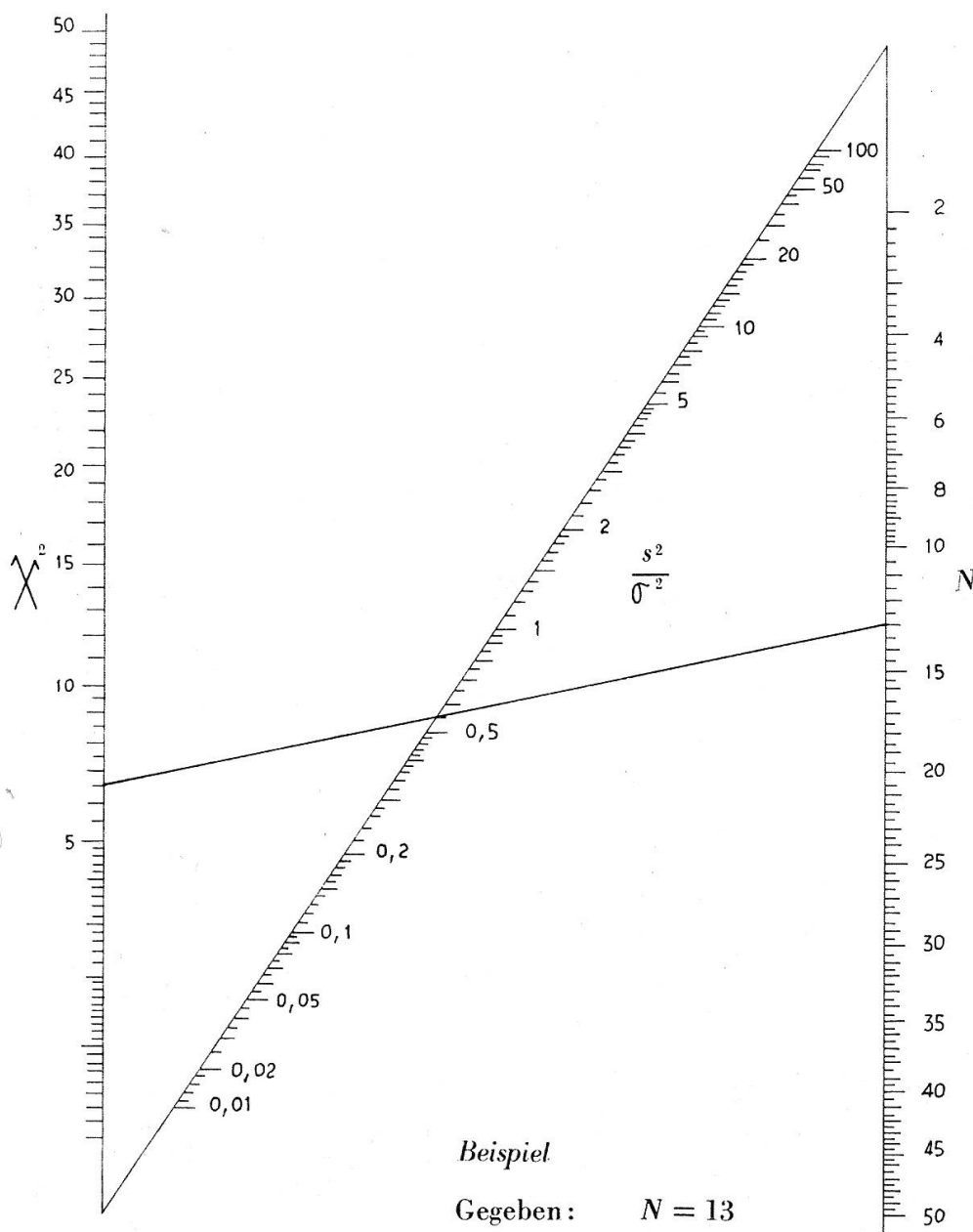
$N_2 = 150$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 3$

$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 5$

Gesucht:  $t = 3$

$$\chi^2 = [N - 1] \frac{s^2}{\sigma^2}$$

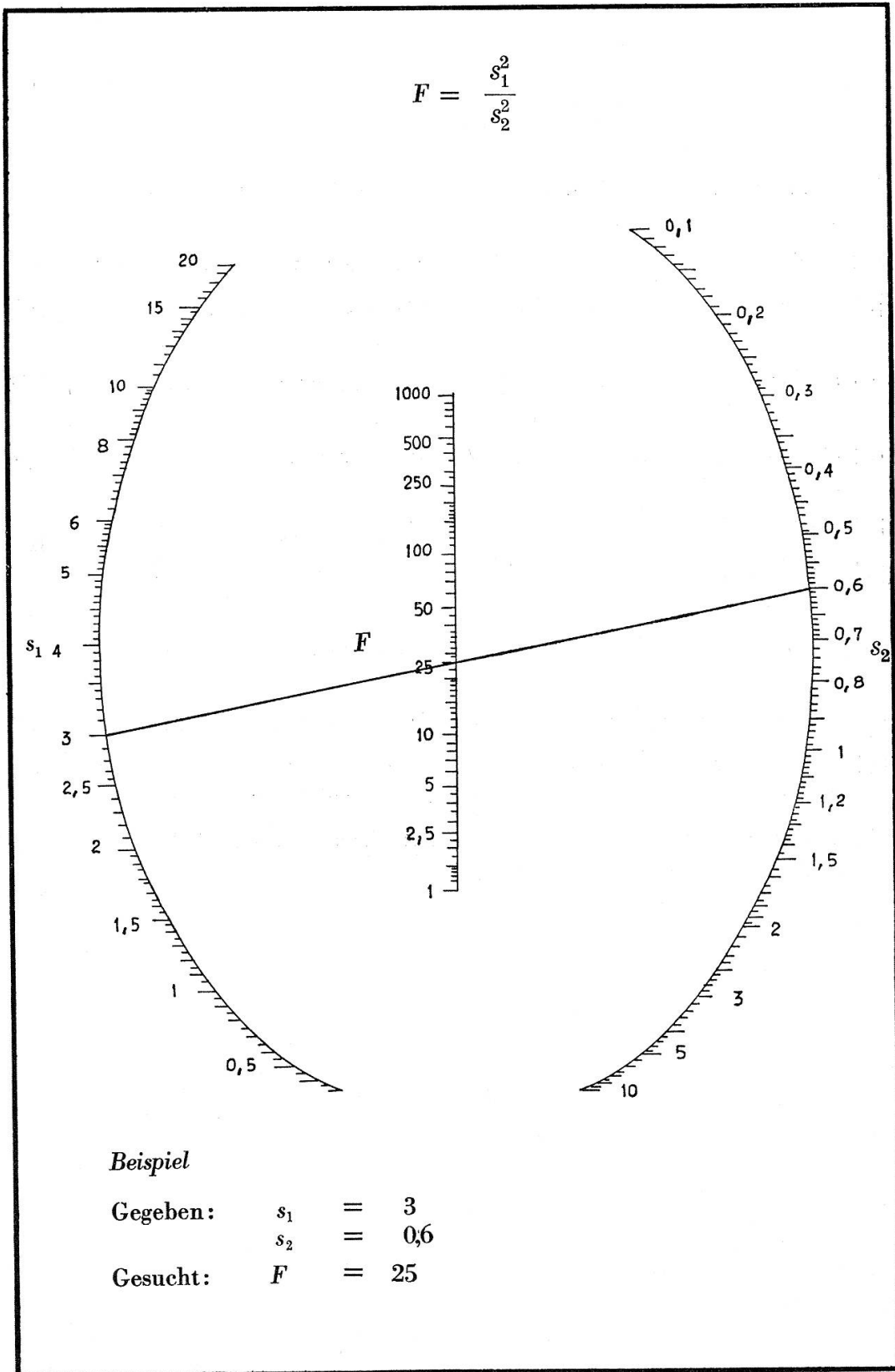


Beispiel

Gegeben:  $N = 13$   
 $\frac{s^2}{\sigma^2} = 0,55$

Gesucht:  $\chi^2 = 6,6$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$



## 7. Literaturverzeichnis

- [1] *Johnson, L.H.*: Nomography and Empirical Equations. John Wiley & Sons, Inc. New York 1952.
- [2] *Luckey-Treusch*: Nomography. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1954.
- [3] *Meyer zur Capellen, W.*: Leitfaden der Nomographie. Springer-Verlag, Berlin 1953.
- [4] *Müller, A.*: Nomographie für die technische Praxis. Fachbuchverlag GmbH, Leipzig 1952.
- [5] *Newski, B.A.*: Praktikum der Nomogramm-Konstruktionen. Akademie-Verlag, Berlin 1955.
- [6] *Pentkowski, N.W.*: Nomographie. Akademie-Verlag, Berlin 1953.
- [7] *Pirani, M.*, und *Fischer, J.*: Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Sammlung Göschel Band 728/728 a. Berlin 1957.
- [8] *Schröder, R.*: Praktische Einführung in die Nomographie. Carl Hanser, München 1951.
- [9] *Schwerdt, H.*: Einführung in die praktische Nomographie. Salle, Berlin 1927.
- [10] *Wenger, A.*: Zur Theorie der Nomogramme und deren Anwendung bei statistischen Prüfverfahren. Dissertation. Universität Bern, 1961.
- [11] *Zühlke, M.*: Rechentafeln und Sonderrechenstäbe. RKW-Veröffentlichung Nr.116. 1942. B.G.Teubner, Berlin.

## Résumé

Le présent travail traite de la résolution de quelques équations dérivant de méthodes statistiques d'estimation à l'aide de tables de lignes de fuite. La construction d'un nomogramme particulier pour chaque méthode statistique envisagée illustre la variété des solutions possibles. En partant des équations obtenues, l'auteur développe les formes nomographiques correspondantes. Chacune de ces formes possède ses propres échelles nomographiques qui, en système de coordonnées cartésiennes, permettent de définir directement les tables de ligne de fuite. L'étude est limitée aux formes simples qui seules ont fait leurs preuves dans la pratique. De ce point de vue, l'utilisation du réseau à triangle fixe et du squelette sur une ellipse revêt une importance décisive.

## Summary

The present paper deals with the solution of some equations related to statistical tests by means of alignment charts. To emphasise the great variety of possibilities of solutions, a different nomogram has been built for every method introduced. For every equation the related basic monographic form has been denoted. Every one of these forms has its own nomographic scale which, expressed in Cartesian coordinates, determines the alignment charts. Since only simple forms of tables may be used in practice, a great importance is given to that postulate. It is under such a consideration that the application of the net with fixed triangle and of the skeleton upon an ellipse will find its decisive meaning.

## Riassunto

Il presente lavoro concerne la soluzione di alcune equazioni di metodi statistici di stima mediante tavole di allineamento. Per ogni metodo di stima indicato viene cercato un nomogramma determinato in altro modo, onde dimostrare la varietà delle possibilità di soluzione. Per le singole equazioni vengono ricercate le forme basi nomografiche proprie. Ognuna di queste forme ha le sue scale nomogrammatiche, che, espresse in coordinate cartesiane, determinano direttamente le tavole di allineamento. Siccome in pratica si preferiscono le forme semplici delle tavole, viene rivolta la più grande importanza a questo postulato. Proprio da questo punto di vista, l'applicazione della rete con triangolo fisso e lo scheletro su un'ellisse ha un'importanza decisiva.

