**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 64 (1964)

**Artikel:** Eine Bemerkung zu Bichsels Herleitung der bedingten zukünftigen Schadenhäufigkeit einer Polya-Verteilung

**Autor:** Philipson, Carl

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-966973

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Eine Bemerkung zu Bichsels Herleitung der bedingten zukünftigen Schadenhäufigkeit einer Polya-Verteilung

*Von Carl Philipson, Stockholm*

## Zusammenfassung

Im Anschluss an die Arbeit von Bichsel im letzten Heft der «Mitteilungen» weist der Autor auf einige zusätzliche allgemeine Überlegungen hin.

1. Sei $U(\lambda)$ eine Verteilungsfunktion von $\lambda$, die vom Parameter $t$ unabhängig ist, und

$$P_n(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n \, dU(\lambda)/n!. \tag{1}$$

Hier wird $U(\lambda)$ die Strukturfunktion von $P_n(t)$ genannt (Bichsel, [1] [1]), nennt aber $dU(\lambda)$ die Strukturfunktion).

Falls der Mittelwert von $U(\lambda)$ gleich $q \neq 1$ ist, wie in Bichsels Entwicklung, kann man durch Einführen einer neuen Integrationsvariablen $q\lambda$ und durch Veränderung des Massstabes von $t$ $P_n(t)$ so transformieren, dass der Parameter operativ wird. Ein Prozess, für welchen die Zahl der Ereignisse in $(0,t)$ bei festem $t$ nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung (1) verteilt ist, bekommt durch diese Transformation eine Intensitätsfunktion in kanonischer Form. Ein Prozess, definiert nach (1), wird ein zusammengesetzter Prozess im engeren Sinne genannt. Einen solchen Prozess im weiteren Sinne erhält man, falls die Strukturfunktion von $t$ abhängen kann. Wenn speziell die Strukturfunktion in der Form $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(t)\, G^{m*}(\lambda)$ vorliegt, wo die Potenz $m^*$ für $m > 0$ die $m$-te Faltung der Verteilungsfunktion $G(\lambda)$ bedeutet

---

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf die Referenznummer im Literaturverzeichnis am Ende dieses Aufsatzes.

und für $m = 0$ gleich 1 ist, spricht man von einem stationären oder nichtstationären zusammengesetzten Poisson-Prozess.

2. Die bedingte Fortsetzung eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses im engeren Sinne wurde von Lundberg 1940 analysiert [2]. Er hat unter anderem die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion für das Eintreffen von Ereignissen im Intervalle $(s, s+t)$ bei gegebener Zahl $\mu$ der Ereignisse im Intervalle $(0, s)$ hergeleitet. Es wird gezeigt, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit durch Verschiebung der 0-Punkte von $\nu$ und $t$ in der Form von (1) geschrieben werden kann mit der Strukturfunktion

$$U^*(\lambda;\mu,s) = \frac{\int_0^\lambda y^\mu e^{-sy}\, dU(y)}{\int_0^\infty y^\mu e^{-sy}\, dU(y)}, \tag{2}$$

wo $U(\lambda)$ die Strukturfunktion des ursprünglichen Prozesses darstellt.

Der Mittelwert von $U^*(\lambda,\mu,s)$ ist durch

$$\int_0^\infty \lambda\, dU^*(\lambda,\mu,s) = p_\mu(s) \quad \text{gegeben,} \tag{3}$$

wo $p_\mu(s)$ die Intensitätsfunktion des ursprünglichen Prozesses bedeutet. Auch werden von Lundberg die höheren Momente von $U^*(\lambda,\mu,s)$ hergeleitet. In [3] hat der Verfasser dieser Bemerkung über Lundbergs Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten berichtet und sie zu einer Folge von bedingten Fortsetzungen erweitert. Auch wurde die Theorie auf stationäre oder nichtstationäre zusammengesetzte Poisson-Prozesse ausgedehnt. Auch in diesem Falle konnte die bedingte Wahrscheinlichkeit in der Form der absoluten Wahrscheinlichkeit des ursprünglichen Prozesses mit modifizierter Strukturfunktion ausgedrückt werden. Ferner wurde die erweiterte Theorie von Lundberg mit einer entsprechenden Erweiterung der Theorie von Ammeter [4] verglichen.

3. Im Spezialfalle, wo $dU(\lambda) = \left(\frac{1}{b}\right)^{q/b} \frac{\lambda^{q/b-1} e^{-\lambda/b}}{\Gamma(q/b)}\, d\lambda$, hat Bichsel in [1] die Funktion $U^*(\lambda,\mu,s)$ und ihren Mittelwert $\alpha(\mu,s)$ hergeleitet sowie die Parameter $b^*$, $q^*$ von $U^*(\lambda,\mu,s)$ berechnet. Nach den Bemerkungen über die Transformation in 1 hier oben können wir, ohne

Beeinträchtigung der Allgemeinheit, $q = 1$ annehmen. Bichsel findet, dass

$$\alpha(\mu, t) = (q + nb)/(1 + bt),$$

was für $q = 1$ die Intensitätsfunktion für den Spezialfall in der kanonischen Form $(1 + nb)/(1 + bt)$ definiert. In dem von Bichsel behandelten Fall wird der Prozess ein Polya-Prozess genannt. Somit ist das von ihm hergeleitete Resultat ein Spezialfall von (3) für den Polya-Prozess.

4. Delaporte [5], [6] hat für die Motorfahrzeughaftpflichtversicherung eine Theorie, unabhängig von Lundberg, aufgestellt, die von einer ähnlichen Formel wie (2) ausgeht. Auch wurden von Delaporte wie von Bichsel die theoretischen Prämien in Tabellenform gegeben. Wie Bichsel macht Delaporte die Annahme, dass die mittlere Schadenhäufigkeit für jede einzelne Versicherung unabhängig von der Zeit sei. Nach der Ansicht des Verfassers dieser Bemerkung ist diese Annahme ganz unrealistisch. In der Tat hängt das Risiko von der Kalenderzeit (von klimatischen Verschiedenheiten, von Verschiedenheiten des allgemeinen Verkehrs und von Verschiedenheiten des Geldwertes unter anderem bedingt) und auch von der nach der Unterzeichnung der ersten Versicherung verflossenen Zeit (eigentlich vom Alter des Fahrzustandes) ab. Diese Verhältnisse wurden vom Verfasser 1963 ausführlich behandelt [7].

In den Vorbemerkungen seines Aufsatzes hat Bichsel gesagt, dass die Arbeit nicht die Ergebnisse eigener Untersuchungen enthält. Der Zweck sollte nur eine kurze Orientierung über eine aktuelle Anwendung der mathematischen Statistik sein. Trotzdem hat der Verfasser dieser Bemerkung es für passend gehalten, etwas über frühere Untersuchungen auf demselben Gebiet zu berichten. Auch möchte der Verfasser hervorheben, dass wegen der Bemerkung im letzten Teil von Abschnitt 4 stationäre oder nichtstationäre zusammengesetzte Poisson-Prozesse für die Kraftwagenversicherung als Modelle besser geeignet sind als der Polya-Prozess. Es wird auf [3] hingewiesen, wo, wie oben gesagt, die Theorie der bedingten Fortsetzung für solche Modelle behandelt wird.

## Literaturverzeichnis

[1] *Bichsel Fritz:* Erfahrungstarifierung in der Motorfahrzeughaftpflichtversicherung. *Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math., 64–1, 1964.*

[2] *Lundberg Ove:* On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Insurance. Inaug. Diss., Uppsala, 1940 (Neue Auflage, 1964).

[3] *Philipson, Carl:* The Transformed Parameter of Compound Poisson Processes and the Effect of an Increase in that Parameter. *Trans. XVIIth Int. Congr. Act., London 1964.*

[4] *Ammeter Hans:* A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic Probabilities. *Skand. Akt. Tidskr., 1948.*

[5] *Delaporte Pierre:* L'estimation statistique progressive du risque individuel d'accident et la tarification de l'assurance automobile. *Int. Inst. Stat. 34e session,* Ottawa, 1963.

[6] *Delaporte Pierre:* Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée sur le risque. Coll. de l'Astin, Trieste, septembre 1963.

[7] *Philipson Carl:* Einige Bemerkungen zur Bonusfrage in der Kraftfahrversicherung. *Bl. deutsch. Ges. Vers.-Math. VI–2, 1963.*

---

## Résumé

L'auteur mentionne quelques réflexions générales en supplément au travail de Bichsel paru dans le dernier fascicule du *Bulletin.*

## Summary

In connection with the work of Bichsel in the last issue of the «Mitteilungen», the author points out certain additional general considerations.

## Riassunto

A complemento del lavoro del Bichsel, apparso nell'ultimo opuscolo delle «Comunicazioni», l'autore richiama l'attenzione su alcune riflessioni complementari di carattere generale.