Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 65 (1965)

Artikel: Laplace-Transformation und K. Wettenschwilers spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung

Autor: Berghoff, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550801

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Laplace-Transformation und K. Wettenschwilers spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung

Von W. Berghoff, Zürich

Zusammenfassung

Für die allgemeine Überlebensordnung

$$P(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) k^{(b_0 + b_1 t)}$$

wird mittels Laplace-Transformation die Lösung der erweiterten Erneuerungsgleichung hergeleitet. Als Anwendungsbeispiel erfolgt die Bestimmung der Lösungsfunktion, einschliesslich Berechnung der Koeffizienten, für das spezielle Sterbegesetz

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t.$$

1. Erneuerungsgleichung und Laplace-Transformation

Im Herbstheft 1964 dieser Mitteilungen veröffentlichte K. Wettenschwiler einige spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung

$$\Phi(t) = S(t) + \int_0^t \Phi(k)\, p(t-k)\, dk \tag{1}$$

mit

$$S(t) = H'(t) + H(0)\, p_0(t)\,,$$

einer linearen inhomogenen Integralgleichung vom Volterraschen Typus zweiter Art.

In dieser Gleichung bezeichnet $H(t)$ den Umfang einer offenen Gesamtheit zur Zeit t, $p_0(t)$ und $p(t)$ die Ausscheidefunktionen für den Anfangsbestand $H(0)$ bzw. die Neueintritte $\Phi(k)$ im Intervall $(0,t)$. Nach $H'(t)$ aufgelöst, besagt die Erneuerungsgleichung (1), dass sich die Bestandesänderung in irgendeinem Intervall dt zusammensetzt aus den Eintritten $\Phi(t)$ vermindert um die Abgänge aus Anfangsbestand und sämtlichen Neueintritten im selben Intervall dt.

Ausgehend von Sterbegesetzen $P(t)$, die mit der Ausscheidefunktion $p(t)$ durch die Beziehung

$$p(t) = -\frac{dP(t)}{dt}$$

verbunden sind, gelingt es dem Verfasser nach der Methode der iterierten Kerne, Lösungen für die Gesetze

$$\text{(I)} \quad \text{von Dormoy} \quad P(t) = a^{-t}$$

und

$$\text{(II)} \quad \text{von Moivre} \quad P(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

exakt herzuleiten.

Für die aus beiden zusammengesetzte Überlebensordnung

$$\text{(III)} \quad \text{von Jecklin und Leimbacher} \quad P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t$$

wird der lösende Kern so kompliziert, dass nur noch eine Auswertung mittels Reihenentwicklung angegeben werden kann. Dazu bemerkt der Verfasser: «Wenn geeignete Rechenmaschinen zur Verfügung stehen, lassen sich mit dieser Methode auch numerische Aufgaben anfassen, während die eleganten Lösungswege mittels Differentiation oder *Laplace-Transformation* leider oft nur theoretische Möglichkeiten bieten».

Eine nähere Untersuchung zeigt jedoch, dass mittels der Laplace-Transformation die gesuchte Erneuerungsgleichung für die ganz allgemeine Form

$$\text{(IV)} \quad P(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)\, k^{(b_0 + b_1 t)}$$

exakt gelöst werden kann. Einzige Voraussetzung dazu ist, dass die Partialbruchzerlegung der Bildfunktion für die Rücktransformation, die rasch sehr umfangreich wird, praktisch noch gemeistert werden kann. Für das Gesetz von Jecklin-Leimbacher, das in Form (IV) als Spezialfall enthalten ist, wird unter Abschnitt 5 die Partialbruchzerlegung explizite durchgeführt.

2. Herleitung der Lösungsfunktion für die allgemeine Form (IV) im Originalraum

Nach Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Band III *), lautet die Lösungsfunktion der Erneuerungsgleichung, umgeschrieben in die Faltungssymbolik

$$F(t) = G(t) + \left\{K(t) + \sum_{n=2}^{\infty} K(t)^{*n}\right\} * G(t) \tag{2}$$

und ihre Bildfunktion

$$f(s) = g(s) + \frac{k(s)}{1-k(s)}\, g(s). \tag{3}$$

Die Verbindung mit den Bezeichnungen in Formel (1) ergibt sich aus

$$F(t) = \Phi(t), \quad G(t) = S(t) = H'(t) + H(0)\, p_0(t), \quad K(t) = p(t).$$

Original- und Bildfunktion sind verknüpft durch den Laplace-Operator

$$L\{F(t)\} = f(s), \quad L\{G(t)\} = g(s), \quad L\{K(t)\} = k(s).$$

Zur Herleitung der Lösungsfunktion für die allgemeine Form (IV) ist auszugehen von ihrer Ableitung

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = -p(t) = (a_1 + 2a_2 t + \ldots + n\,a_n t^{n-1})\, k^{(b_0 + b_1 t)} + (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)\, k^{(b_0 + b_1 t)}\, b_1 \lg k.$$

Wird

$$\begin{aligned} a_1 k^{b_0} + a_0 k^{b_0} b_1 \lg k &= \alpha_0 \\ 2a_2 k^{b_0} + a_1 k^{b_0} b_1 \lg k &= \alpha_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ n a_n k^{b_0} + a_{n-1} k^{b_0} b_1 \lg k &= \alpha_{n-1} \\ a_n k^{b_0} b_1 \lg k &= \alpha_n \end{aligned}$$

und $k^{b_1} = \varkappa$ gesetzt, so reduziert sich $-p(t)$ auf

$$-p(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n)\, \varkappa^t.$$

Setzt man ferner nach K. Wettenschwiler für $H(t) = c^t$, so lauten die beiden Funktionen $G(t)$ und $K(t)$ auf der rechten Seite der gesuchten Lösungsfunktion (2)

$$G(t) = H'(t) + H(0)\, p_0(t) = c^t \lg c - (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n)\, \varkappa^t$$

und

$$K(t) = -(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n)\, \varkappa^t.$$

---

*) Siehe [1] des Literaturverzeichnisses am Schluss dieser Arbeit.

3. Übergang zum Bildraum

Die Transformation von $G(t)$ und $K(t)$ in den Bildraum kann angeschrieben werden, wenn die beiden uneigentlichen Integrale

$$f_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, c^t \lg c\, dt \quad \text{und} \quad f_2(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \alpha_\nu\, t^\nu\, \varkappa^t\, dt$$

mit $s = x + iy$ bekannt sind.

Die Auswertung ergibt für

$$f_1(s) = \frac{\lg c}{s - \lg c} \tag{4}$$

und für $f_2(s)$, durch geeignete Transformation auf die Gammafunktion übergeführt

$$f_2(s) = \frac{\alpha_\nu\, \Gamma(\nu+1)}{(s - \lg \varkappa)^{\nu+1}}. \tag{5}$$

$G(t)$ und $K(t)$ haben demnach die Bildgleichungen

$$L\{G(t)\} = g(s) = \frac{\lg c}{s - \lg c} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu\, \Gamma(\nu+1)}{(s - \lg \varkappa)^{\nu+1}} \tag{6}$$

und

$$L\{K(t)\} = k(s) = -\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu\, \Gamma(\nu+1)}{(s - \lg \varkappa)^{\nu+1}}. \tag{7}$$

Um die gesuchte Bildgleichung (3) zu erhalten, sind zuerst $g(s)$ und $\dfrac{k(s)}{1 - k(s)}$ auf einen Nenner zu bringen.

Aus (6) ergibt sich für

$$g(s) = \frac{\lg c\,(s - \lg \varkappa)^{n+1} - (s - \lg c) \sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, \alpha_\nu (s - \lg \varkappa)^{n-\nu}}{(s - \lg c)\,(s - \lg \varkappa)^{n+1}}$$

$$= \frac{Z_g}{(s - \lg c)\,(s - \lg \varkappa)^{n+1}},$$

und aus (7) für

$$\frac{k(s)}{1 - k(s)} = \frac{-\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, \alpha_\nu (s - \lg \varkappa)^{n-\nu}}{(s - \lg \varkappa)^{n+1} + \sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, \alpha_\nu (s - \lg \varkappa)^{n-\nu}}.$$

Das Ausmultiplizieren des Nenners $1-k(s)$ liefert ein Polynom $(n+1)$. Grades in s mit dem Koeffizienten 1 für die höchste Potenz und kann deshalb als Produkt von $n+1$ Linearfaktoren

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} (s-\xi_\nu)$$

dargestellt werden, wobei die ξ_ν die $n+1$ Wurzeln des Polynoms sind. Wird

$$-\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, \alpha_\nu (s-\lg \varkappa)^{n-\nu} = Z_k$$

gesetzt, so schreibt sich

$$\frac{k(s)}{1-k(s)} = \frac{Z_k}{\prod\limits_{\nu=1}^{n+1} (s-\xi_\nu)}$$

und wir erhalten für die vollständige Bildfunktion die Darstellung

$$f(s) = g(s) + \frac{k(s)}{1-k(s)}\, g(s) = \frac{Z_g \prod\limits_{\nu=1}^{n+1} (s-\xi_\nu) + Z_k Z_g}{(s-\lg c)\,(s-\lg \varkappa)^{n+1} \prod\limits_{\nu=1}^{n+1} (s-\xi_\nu)}. \tag{8}$$

4. Rücktransformation der Bildgleichung in den Originalraum

Um die Bildfunktion (8) in den Originalraum zurückzutransformieren, muss sie entsprechend den Faktoren im Nenner in höchstens $2n+3$ Partialbrüche zerlegt werden.

Das geschieht am einfachsten nach folgender Überlegung. Zähler und Nenner von $f(s) = \dfrac{Z(s)}{N(s)}$ sind Polynome in $s = x + iy$ und $f(s)$ demnach eine rational gebrochene Funktion. Der Hauptteil ihrer Laurententwicklung in einem λ_μ-fachen Pol σ_μ lautet deshalb

$$H(\sigma_\mu, h) = \frac{d_{\mu 1}}{s-\sigma_\mu} + \frac{d_{\mu 2}}{(s-\sigma_\mu)^2} + \ldots + \frac{d_{\mu h}}{(s-\sigma_\mu)^h} + \ldots + \frac{d_{\mu \lambda_\mu}}{(s-\sigma_\mu)^{\lambda_\mu}}.$$

Werden die Hauptteile sämtlicher Pole $H(\sigma_\mu, h)$ von $f(s)$ abgezogen, so bleibt eine ganze rationale Funktion übrig. Beachtet man dazu, dass

1. jede Laplace-Transformierte $f(s)$, wenn sie existiert, für $s \to \infty$ gegen Null konvergiert und
2. jede ganze rationale Funktion, wenn sie für $s \to \infty$ unterhalb einer festen Grenze bleibt, eine Konstante ist,

so muss
$$f(s) - \sum_{\mu} H(\sigma_\mu, h) = 0$$
und damit
$$f(s) = \sum_{\mu} H(\sigma_\mu, h) \qquad \text{sein.}$$

Damit ist die Partialbruchzerlegung eindeutig festgelegt. Die Faktoren $d_{\mu h}$ in $H(\sigma_\mu, h)$, d.h. die Zähler der Partialbrüche bestimmen sich für einfache Pole aus der Beziehung

$$d_{\mu 1} = \frac{Z(\sigma_\mu)}{N'(\sigma_\mu)} \tag{9}$$

und für mehrfache Pole

$$d_{\mu h} = \frac{1}{(\lambda_\mu - h)!} \left\{ \left[\frac{Z(s)}{R_\mu(s)} \right]^{(\lambda_\mu - h)} \right\}_{s=\sigma_\mu} \tag{10}$$

$$\text{mit } h = 1, \ldots, \lambda_\mu \text{ und } R_\mu(s) = \frac{N(s)}{(s-\sigma_\mu)^{\lambda_\mu}}.$$

Sind die $d_{\mu h}$ einmal bestimmt und werden sie für sämtliche einfachen und mehrfachen Pole durchlaufend numeriert, so lautet die für die Rücktransformation in Partialbrüche zerlegte Bildfunktion

$$f(s) = \frac{d_1}{s - \lg c} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_{\nu+2}}{(s - \lg \varkappa)^{\nu+1}} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_{n+3+\nu}}{s - \xi_{\nu+1}}, \tag{11}$$

wobei einzelne d_μ auch Null sein und einzelne $\xi_{\nu+1}$ Lösungen von Mehrfachwurzeln sein können. Für jede Mehrfachwurzel ξ_μ tritt dann an Stelle des Gliedes

$$\frac{d_{n+3+\nu}}{s - \xi_{\nu+1}}$$

der Ausdruck

$$\frac{d_{n+3+\mu}}{s - \xi_\mu} + \frac{d_{n+3+\mu+1}}{(s-\xi_\mu)^2} + \ldots + \frac{d_{n+3+\mu+\lambda_\mu}}{(s-\xi_\mu)^{\lambda_\mu}}.$$

Das Rücktransformieren der von (8) auf (11) umgeformten Bildfunktion in den Originalraum ergibt sich nun unter Verwendung der Integrale (4) und (5) fast von selbst.

$$F(t) = c^t d_1 + \sum_{\nu=0}^{n} t^\nu \varkappa^t \frac{d_{\nu+2}}{\nu!} + \sum_{\nu=0}^{n} e^{\xi_{\nu+1} t} d_{n+3+\nu}, \tag{12}$$

wobei auch hier wieder einzelne Glieder Null sein können und an Stelle eines Gliedes $e^{\xi_{\nu+1} t} d_{n+3+\nu}$ im Falle einer Mehrfachwurzel der Ausdruck

$$e^{\xi_\mu t} d_{n+3+\mu} + t e^{\xi_\mu t} d_{n+3+\mu+1} + \ldots + t^{\lambda_\mu - 1} e^{\xi_\mu t} \frac{d_{n+3+\mu+\lambda_\mu}}{(\lambda_\mu - 1)!}$$

zu treten hat.

Mit Formel (12) ist die allgemeine Lösung der Erneuerungsgleichung für die Form (IV) gefunden.

5. Bestimmen der Lösungsfunktion für das Gesetz (III) von Jecklin und Leimbacher

Werden in Form (IV) die Koeffizienten

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{\omega}, \quad a_\nu (\nu = 2, \ldots, n) = 0$$

und

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

gesetzt, so erhalten wir Gesetz (III) von Jecklin und Leimbacher

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t.$$

Diese Spezialisierung, auf die Bildfunktionen (6) und (7) angewendet, ergibt für

$$g(s) = \frac{\lg c}{s - \lg c} + \frac{\frac{1}{\omega} - \lg k}{s - \lg k} + \frac{\frac{\lg k}{\omega}}{(s - \lg k)^2}$$

und

$$k(s) = \frac{\frac{1}{\omega} - \lg k}{s - \lg k} + \frac{\frac{\lg k}{\omega}}{(s - \lg k)^2}.$$

Wird aus $k(s)$ der Ausdruck $\frac{k(s)}{1 - k(s)}$ gebildet und hernach der Nenner in Faktoren zerlegt, so ist

$$\frac{k(s)}{1 - k(s)} = \frac{\left(\frac{1}{\omega} - \lg k\right)(s - \lg k) + \frac{\lg k}{\omega}}{s\left\{s - \left(\lg k + \frac{1}{\omega}\right)\right\}}. \tag{13}$$

$g(s)$ auf einen Nenner gebracht und mit (13) multipliziert, führt zu der Bildfunktion für Gesetz (III):

$$f(s) = g(s) + \frac{Z(s)}{N(s)} \qquad \text{mit}$$

$$Z(s) = \left(\frac{1}{\omega} - \lg k\right) \lg c\,(s - \lg k)^3 + \left(\frac{1}{\omega} - \lg k\right)^2 (s - \lg k)^2 (s - \lg c)$$

$$+ 2\left(\frac{1}{\omega} - \lg k\right) \frac{\lg k}{\omega} (s - \lg c)(s - \lg k) + \frac{\lg k}{\omega} \lg c\,(s - \lg k)^2$$

$$+ \left(\frac{\lg k}{\omega}\right)^2 (s - \lg c) \qquad \text{und}$$

$$N(s) = s\,(s - \lg c)(s - \lg k)^2 \left\{s - \left(\lg k + \frac{1}{\omega}\right)\right\}.$$

In Partialbrüche zerlegt, ist demnach

$$f(s) - g(s) = \frac{d_1}{s} + \frac{d_2}{s - \lg c} + \frac{d_3}{s - \lg k} + \frac{d_4}{(s - \lg k)^2} + \frac{d_5}{s - \left(\lg k + \frac{1}{\omega}\right)}. \tag{14}$$

Die Bestimmung der Zähler d_ν nach den Formeln (9) und (10) aus zum Teil umfangreichen Berechnungen, besonders für die Doppelwurzel $\lg k$, ergibt für

$$d_1 = 0,$$

$$d_2 = \frac{(\lg k)^2 - \lg c \lg k + \frac{\lg c}{\omega}}{\lg c - \lg k - \frac{1}{\omega}},$$

$$d_3 = -\left(\frac{1}{\omega} - \lg k\right),$$

$$d_4 = -\frac{\lg k}{\omega},$$

$$d_5 = \frac{-\frac{1}{\omega^2}}{\lg c - \lg k - \frac{1}{\omega}}.$$

Werden diese d_ν in Formel (14) eingesetzt und $g(s)$ auf die rechte Seite genommen, so erhalten wir als Laplace-Transformierte

$$f(s) = \frac{1}{s - \lg c} \frac{(\lg c - \lg k)^2}{\lg c - \lg k - \frac{1}{\omega}} + \frac{1}{s - \left(\lg k + \frac{1}{\omega}\right)} \frac{-\frac{1}{\omega^2}}{\lg c - \lg k - \frac{1}{\omega}}.$$

Wieder in den Originalraum übertragen, muss demnach die Lösung der Erneuerungsgleichung für die Ausscheideordnung

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t$$

heissen:

$$F(t) = c^t \frac{(\lg c - \lg k)^2}{\lg c - \lg k - \frac{1}{\omega}} + k^t e^{t/\omega} \frac{-\frac{1}{\omega^2}}{\lg c - \lg k - \frac{1}{\omega}}. \tag{15}$$

Aus ihr müssen sich die von K. Wettenschwiler auf ganz anderem Wege gefundenen Resultate durch Spezialisierung ergeben. Der Grenzübergang $\omega \to \infty$ liefert für Gesetz (I) die Lösung

$$F(t) = c^t (-\lg k + \lg c)$$

und wenn $k = 1$ gesetzt wird für Gesetz (II)

$$F(t) = c^t \frac{(\lg c)^2}{\lg c - \frac{1}{\omega}} + e^{t/\omega} \frac{-\frac{1}{\omega^2}}{\lg c - \frac{1}{\omega}},$$

was mit den in Arbeit [6] gefundenen Lösungen übereinstimmt, wenn man beachtet, dass in der ersten Formel k durch a^{-1} und in der zweiten Formel $\frac{1}{\omega}$ durch a zu ersetzen ist.

Literaturverzeichnis

[1] *Doetsch, G.:* Handbuch der Laplace-Transformation, Band III, Birkhäuser-Verlag Basel, 1956.

[2] *Saxer, W.:* Versicherungsmathematik, II. Teil, Springer-Verlag Berlin, 1958.

[3] *Ostrowski, A.:* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band III, Birkhäuser-Verlag Basel, 1954.

[4] *Carathéodory, C.:* Funktionentheorie, Band I, Birkhäuser-Verlag Basel, 1950.

[5] *Kamke, E.:* Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

[6] *Wettenschwiler, K.:* Spezielle Lösungen der erweiterten Erneuerungsgleichung, Mitteilungen der schweizerischen Versicherungsmathematiker, Band 64, Heft 2, Bern 1964.

Résumé

Pour la loi générale de mortalité

$$P(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) k^{(b_0 + b_1 t)},$$

la solution de l'équation de renouvellement élargie est établie à l'aide de la transformation de Laplace. A titre d'exemple, la détermination de la fonction résolvante, comprenant également le calcul des coefficients, est indiquée pour la loi particulière de mortalité

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t.$$

Summary

For the general law of mortality

$$P(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) k^{(b_0 + b_1 t)},$$

the solution of the extended renewal equation is deduced by means of the Laplace transform. Then follows, as an example of application, the determination of the solution function, including the calculation of the coefficients, for the specific law of mortality

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t.$$

Riassunto

Per la legge generale di mortalità

$$P(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) k^{(b_0 + b_1 t)},$$

la soluzione dell'equazione di rinnovo estesa viene derivata mediante la trasformazione di Laplace. A titolo di esempio la determinazione della funzione risolvente, compreso il calcolo dei coefficienti, è indicata per la legge particolare di mortalità

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) k^t.$$