Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 65 (1965)

Artikel: Ein in der Diskussion Umlage contra Anwartschaftsdeckung vernachlässigtes Moment

Autor: Jecklin, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550959

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Wie wir in Erfahrung bringen konnten, handelt es sich beim folgenden Artikel um Herrn Prof. Heinrich Jecklins 100. Publikation. Wir freuen uns, diese in den «Mitteilungen» veröffentlichen zu dürfen, wo zahlreiche seiner gewichtigen Beiträge erschienen sind und hoffentlich noch manche erscheinen werden.

Ein in der Diskussion Umlage contra Anwartschaftsdeckung vernachlässigtes Moment

Von H. Jecklin, Zürich

Zusammenfassung

In den Statuten schweizerischer Pensionskassen ist eine Prämienrückgewähr bei freiwilligem Dienstaustritt vorgesehen. Bei den autonomen Kassen entspricht diese Leistungszusage einer zwingenden Vorschrift des Obligationenrechts. Wenn bei Prämienvergleichen nach verschiedenen Finanzierungsmethoden diesem Umstand nicht Rechnung getragen wird, so erscheinen die Prämien der Umlageverfahren bedeutend günstiger, als es wirklich der Fall ist.

In einem Anhang wird anhand einfacher hypothetischer Beispiele der kombinatorische Aspekt der Diensttreue beleuchtet.

In den letzten Jahren ist viel über die Finanzierungsmethoden von Personalfürsorgeeinrichtungen geschrieben und diskutiert worden. Angesichts der wirtschaftlichen Entwicklung mit ihrer Lohn- und Preissteigerung hat sich die Frage erhoben, ob es nicht besser und den Umständen angepasster wäre, vom klassischen Verfahren der Anwartschaftsdeckung abzukehren und sich der Umlage oder doch wenigstens einem gemischten Verfahren zuzuwenden. Hiebei hat sich eine bedauerliche Verwirrung der Geister ergeben, nicht zuletzt deshalb, weil die Verfasser bezüglicher Abhandlungen vornehmlich mit Prämienvergleichen arbeiten und nicht genügend betonen oder ganz übersehen, dass die Voraussetzungen bezüglich des Leistungsschemas den schweizerischen Gegebenheiten nicht entsprechen. Wir haben es mit einem jener Fälle zu tun, wo die mathematischen Entwicklungen formelmässig vollständig in Ordnung und, gemessen an den gemachten Voraussetzungen, theoretisch richtig sind, bezüglich der Praxis aber als verfehlt angesprochen werden müssen, weil hier eine ganz andere Sachlage vorliegt.

Es hiesse Eulen nach Athen tragen, hier nochmals auf die charakteristischen Unterschiede zwischen Umlage und Anwartschaftsdeckung einzutreten. Wir haben uns darüber einlässlich verbreitet [1]. Nur auf einen wesentlichen Punkt sei nochmals mit Nachdruck hingewiesen. Bei der Anwartschaftsdeckung können wir die Prämie aufteilen in eine Risikoprämie plus eine Sparprämie. Mit der Risikoprämie wird das laufende Risiko der Versichertengemeinschaft gedeckt, die Sparprämie aber gewissermassen auf persönlichem Konto verzinslich akkumuliert. Darum kann hier ein wohlerworbenes Recht entstehen und honoriert werden. Man vergleiche hiezu auch die Darlegungen von *Ammeter* [2]. Nicht so aber bei der Umlage, bei welcher die Prämie voll für laufende Ausgaben verbraucht wird und deshalb vollumfänglich als Risikoprämie anzusprechen ist. Bei der Umlage kann, technisch und logisch betrachtet, kein wohlerworbenes Recht entstehen.

Nun haben wir aber Art. 343bis des Obligationenrechtes, welcher den autonomen Kassen zwingend vorschreibt, dass bei freiwilligem Dienstaustritt dem Arbeitnehmer die Summe der von ihm entrichteten Beiträge zurückzuerstatten ist, soweit er nicht bereits in den Genuss einer Versicherungsleistung gelangte. Nach unserer Überzeugung ist aus den einschlägigen gesetzlichen Vorschriften abzuleiten, dass die dem Obligationenrecht unterstehenden Fürsorgeeinrichtungen nach dem Verfahren der Anwartschaftsdeckung finanzieren sollen [3]. Wenn hier bei freiwilligem Austritt eine Vergütung erfolgt, so ist dies technisch in Ordnung. Denn wie man weiss, führt es bei der Methode der Anwartschaftsdeckung zur genau gleichen Prämie, ob man auf Basis einer Dekremententafel mit Stornowahrscheinlichkeiten und Reservevergütung im Austrittsfalle rechnet oder auf Grund einer einfachen Sterbetafel ohne Berücksichtigung der Abgangsvergütungen. Es ist dies ein einfacher Spezialfall des Theorems von *Cantelli*, und wer es vergessen haben sollte, kann sein Wissen durch Nachlesen des bezüglichen Passus im Lehrbuch von *Zwinggi* mühelos auffrischen [4].

Bekanntlich haben aber auch die Pensionskassen öffentlichen Rechtes in ihren Statuten die Zusage einer Prämienrückerstattung im Falle freiwilligen Dienstaustrittes, ja diese Zusage ist z. T. sogar sehr weitgehend. Steht doch in den Statuten der Eidgenössischen Versicherungskasse Art. 18 zu lesen «Dem Versicherten, dessen Dienstverhältnis aufgelöst wird und der keinen Anspruch auf Kassenleistung hat, werden die von ihm geleisteten Beiträge und Einkaufsummen ohne Zinsen zurück-

erstattet. Wird das Dienstverhältnis ohne sein Verschulden aufgelöst, so hat er für jedes über 10 hinausgehende volle Beitragsjahr Anspruch auf einen Zuschlag von 5% zu den von ihm bezahlten Beiträgen ohne Einkaufsummen, höchstens aber auf einen solchen von 100%.»

Wenn nun beispielsweise bei der Eidgenössischen Alters- und Hinterbliebenenversicherung die Finanzierung nach einem gemischten Verfahren erfolgt, so ist technisch kaum etwas einzuwenden, denn ein Austritt von Versicherten unter Vergütung einer Abfindung steht nicht zur Diskussion. Ebenso geht es in Ordnung, wenn die Schweiz. Unfallversicherungs-Anstalt nach dem Verfahren der Renten-Umlage arbeitet, denn ihre Prämien sind Risikoprämien ohne Rückvergütung bei Dienstaustritt. Wenn aber bei Pensionseinrichtungen öffentlichen Rechtes bedenkenlos zur Umlage oder gemischtem Verfahren übergegangen wird, ist es Zeit und Pflicht, die Sache mit der Praxis entsprechenden Annahmen zu studieren, insbesondere wenn das Beispiel auch bei der privaten Sozialversicherung Schule zu machen droht.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Reserve des Verfahrens der Anwartschaftsdeckung gewissermassen als Prämienzahler in Zinsform auftrete, welche Dienstleistung jedoch bei wirtschaftlicher Lohnsteigerung illusorisch werden könne. So erachtet *Kaiser* [5] den Zins als die primäre Funktion des Deckungskapitals. Dem ist jedoch entgegenzuhalten, dass das Deckungskapital der Garant des wohlerworbenen Rechtes ist, also die Ausrichtung von Abfindungswerten gewährleistet, welche Funktion auch im zinslosen System restlos erfüllt wird, wie *Ammeter* [2] richtig betont.

Überlegen wir uns aber vorerst noch, dass eine Entschädigung bei freiwilligem Dienstaustritt technisch betrachtet gar keine echte Versicherungsleistung sein kann. Denn eine solche muss vom Willen des Versicherten unabhängig sein. Nachdem die Ausscheidehäufigkeiten generell zufallsbedingt sein sollen, mit welcher Voraussetzung die Möglichkeit des Versicherungsbetriebes steht und fällt, ist ja klar, wohin es führen könnte, wenn die Auszahlung einer Versicherungsleistung der Lust und Laune des Bezügers anheimgestellt wird. Bei der Anwartschaftsdeckung ist, wie erwähnt, die Abgangsvergütung technisch irrelevant. Nicht so bei der Umlage, hier kann sie, wie noch zu zeigen ist, von nicht zu vernachlässigender Bedeutung sein. In diesem Zusammenhange sind zwei wesentliche Punkte hervorzuheben. Erstens macht man sich über den zahlenmässigen Umfang der freiwilligen Austritte weitherum

Vorstellungen, die dem Sachverhalt nicht gerecht werden. Wir haben es *Nolfi* zu verdanken, hierüber Aufschluss gegeben zu haben [6], und aus seinen Ausführungen kann die namentlich in der freien Wirtschaft besorgniserregend hohe Frequenz des Dienstaustritts ersehen werden. Zweitens ist zu unterstreichen, dass durch die Prämienrückgewähr beim Umlageverfahren diese Beiträge dem Fürsorgezweck entfremdet werden. Bei der Anwartschaftsdeckung wird durch die Prämienrestituierung die Freizügigkeit beim Stellenwechsel gewährleistet, indem durch die Abfindung an alter Stelle der Einkauf an neuer Stelle ermöglicht wird. Bei der Umlage jedoch ist kein Einkauf zu leisten. Es ist ja gerade einer der gepriesenen Vorteile des Umlageverfahrens, dass hier keine Einkäufe und keine Einmalzahlungen bei Lohnerhöhungen zu entrichten sind. Also kann sich ein Versicherter bei der mit Prämienrückgewähr arbeitenden Umlage durch Stellenwechsel seine Prämien weitgehend zurückerstatten lassen und frei verwenden.

Wenn wir uns nun die Sache technisch überlegen, so sei dabei von folgenden Annahmen und Voraussetzungen ausgegangen:

Betrachtet wird eine einfache Altersrentenversicherung. Wir nehmen an, wie das auch in den Arbeiten von *Kaiser* [5] und *Ammeter* [2] getan wird, dass die Gesamtheit ${}^{B}L$ der Beitragszahler und die Gesamtheit ${}^{R}L$ der Rentner im Beharrungszustand dem Altersaufbau nach einer Sterbetafel proportional sind, also

$$ {}^{B}L = c \sum_{x_0}^{z-1} l_x, \qquad {}^{R}L = c \sum_{z}^{\omega} l_x, $$

wenn c eine Konstante, x_0 das jüngste Beitrittsalter und z das Pensionierungsalter bedeuten. Weiter wird angenommen, was für die folgenden Überlegungen keine Einschränkung bedeutet, dass die versicherten Löhne einheitlich sind und dass keine Dienstalterssteigerung derselben vorgesehen ist. Dagegen findet eine wirtschaftlich bedingte Lohnsteigerung statt (es ist dies der bei Kaiser mit $\sigma(x)$ bezeichnete Steigerungsindex), und wir setzen (wie bei Ammeter)

$$ \sigma(x) = (1 + \lambda)^x. $$

Im Beharrungszustand ist dann offenbar, wie bei den beiden vorgenannten Autoren nachzulesen, die jährliche Prämie unter Einrechnung der wirtschaftlichen Lohnsteigerung, wenn R der auf den Lohn der Aktiven bezogene Rentensatz ist,

bei der Umlage

$$^{U}P = R \frac{\sum_{z}^{\omega} l_x}{\sum_{x_0}^{z-1} l_x},$$

bei der Rentenumlage (mit Vollanpassung der Renten)

$$^{RU}P = R \frac{l_z N_z^*}{\sum_{x_0}^{z-1} l_x D_z^*},$$

bei der Anwartschaftsdeckung

$$^{A}P = R \frac{N_z^*}{N_{x_0}^* - N_z^*},$$

wobei die mit Stern bezeichneten Kommutationszahlen mit dem Abzinsungsfaktor $v^* = v(1 + \lambda)$ zu berechnen sind. Man sieht, dass im Falle $i = \lambda$ die drei Prämien identisch werden. Aber, und dies sei dreifach unterstrichen, bei der Anwartschaftsdeckung besteht so oder so die Möglichkeit der Abfindung bei Dienstaustritt, bei den beiden Umlageverfahren besteht sie nach dieser Art der technischen Darstellung überhaupt nicht, und es ist irreführend, wenn bezüglich der Finanzierung von Pensionseinrichtungen, die dem Zwang der Prämienrestitution unterstehen, mit Prämienvergleichen voriger Art operiert wird.

Wir müssen diesfalls bei der Berechnung der Umlageprämie die Prämienrückerstattung bei Austritt mitberücksichtigen. Man könnte, statt mit der einfachen Ausscheideordnung zu operieren, eine Dekrementtafel zur Anwendung bringen, etwa derart dass

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x - w_x),$$

wenn mit w_x die Austrittshäufigkeit bezeichnet wird. Es ist jedoch w_x, wie *Nolfi* gezeigt hat [6], nicht nur altersabhängig, sondern auch stark abhängig vom Dienstalter und zeigt zudem je nach Beschäftigungssparte sehr grosse Unterschiede. Man müsste wohl mit einer zweidimensionalen Abgangsordnung rechnen. Es scheint uns jedoch diese Art des Vorgehens gar nicht der Wirklichkeit konform, indem ja der freiwillig Austretende nicht aus dem Erwerbsleben verschwindet wie ein Toter oder Invalider. Es handelt sich bei den Dienstaustritten fast ausschliesslich um Stellenwechsel, abgesehen von weiblichen Personen, welche zufolge Verheiratung den Dienst aufgeben. Wir betrachten daher eine Gesamtheit männlicher Individuen und treffen die sicher nicht abwegige

Annahme, dass jeder freiwillig Austretende sofort durch einen neuen gleichaltrigen Arbeitnehmer ersetzt werde. Dann bleibt der Personenumfang der Versicherungsinstitution erhalten, und wir können den Barwert der Austrittsabfindungen analog berechnen, wie dies für die Leistungen in der Krankenversicherung geschieht. Ist P die Prämie, bezogen auf den laufenden Lohn, so erhält ein Versicherter bei Austritt nach t Dienstjahren, unter Berücksichtigung der Lohnsteigerung λ, offenbar als Abgangsentschädigung

$$\varrho P\left(1+(1+\lambda)^{-1}+\ldots+(1+\lambda)^{-t}\right) = \varrho P \beta_t,$$

wobei β_t ein Zeitrentenwert $\ddot{a}_{\overline{t}|}$, gerechnet zum Zinssatz λ, und ϱ der Anteil der Prämie, der vom Versicherten selbst aufgebracht wurde. Notabene ist $t \neq x - x_0$, da ja bei jedem Alter x Ersatzeintritte statthaben. Die Äquivalenzgleichung lautet nunmehr im Beharrungszustand für die Umlage

$${}^{U}P_R \sum_{x_0}^{z-1} l_x = R \sum_{z}^{\omega} l_x + \varrho\, {}^{U}P_R \sum_{x_0}^{z-1} l_x w_x \beta_{t/x} = R \sum_{z}^{\omega} l_x + \varrho w \beta\, {}^{U}P_R \sum_{x_0}^{z-1} l_x,$$

wobei w eine mittlere Austrittshäufigkeit und β ein $\ddot{a}_{\overline{t}|}$ über eine mittlere Zeit der Diensttreue der Austretenden bedeuten. Es ergibt sich somit

$${}^{U}P_R = \frac{R \sum_{z}^{\omega} l_x}{(1-\varrho w \beta) \sum_{x_0}^{z-1} l_x} = \frac{{}^{U}P}{1-\varrho w \beta} > {}^{U}P$$

und ganz analog beim Finanzierungssystem der Rentenwertumlage

$${}^{UR}P_R = \frac{{}^{UR}P}{1-\varrho w \beta} > {}^{UR}P.$$

Der Faktor $(1-\varrho w \beta)^{-1}$ ist nun aber von nicht zu vernachlässigender Bedeutung. Die beiden Grössen w und β stehen natürlich in Wechselbeziehung zueinander, welche jedoch nicht leicht überblickbar ist. Generell ist β um so kleiner, je grösser w. Finden gar keine freiwilligen Austritte statt, so ist $w = 0$ und es wird ${}^{U}P_R = {}^{U}P$. Findet dagegen alljährlich vollständiger Wechsel statt, so ist $w = \beta = 1$. In diesem Falle muss $\varrho < 1$ gewählt werden, damit noch eine endliche Prämie resultiert. Oder nehmen wir ein ganz einfaches hypothetisches Beispiel. Die Beitragsdauer sei nur 3 Jahre. Von den eigentlichen Ausscheideursachen (Tod, Invalidität) sehen wir ab. Dagegen trete jährlich $^1/_3$ der Individuen aus und

werde ersetzt. Dann ergeben sich neun geometrische Figurationen, die Beitragdauer (normal 3) bewegt sich zwischen 1,3 und 1,8, und die Zeit der Diensttreue zwischen 1 und 2 Jahren. Auf den kombinatorischen Aspekt dieses Problems gehen wir im Anhang näher ein, hier geht es uns um die praktische Wertung der Sache. Wenn man auf Basis der Tafel SM 1948/53 rechnet (an sich eine für Altersrente ungeeignete Basis) und mit einem technischen Zinsfuss von 3½ % (der für eine Pensionskasse heute als eher mässig anzusprechen ist), so ergeben sich für die Methode der Anwartschaftsdeckung folgende Prämien bei $R = 1$

λ	0	3	3½	4 %
${}^{A}P$	8,63	21,40	24,93	28,90 %

gegenüber einer von λ unabhängigen Umlageprämie im Beharrungszustand von ${}^{U}P = 24{,}93\,\%$. Erinnern wir uns nebenbei, dass ein λ von 3% als adäquat erachtet wird [5]. Was nun den Einfluss des Faktors $(1 - \varrho w \beta)^{-1}$ auf die Umlageprämie anbetrifft, kann die folgende Tabelle einigen Aufschluss geben.

$w\beta$	10	20	30	40	50	60 %
$\varrho = \frac{1}{3}$	1,03	1,08	1,11	1,15	1,20	1,25
$\varrho = \frac{1}{2}$	1,05	1,11	1,18	1,25	1,33	1,41

Man muss heute im Durchschnitt mit einem Arbeitsplatzwechsel von mindstens 15% jährlich rechnen. Setzt man β mit nur 2 Jahren an, so ist $w\beta = 30\,\%$. Es folgt also schlussendlich, dass bei Rückgewähr der vom Arbeitnehmer bezahlten Prämien der Umlagebeitrag im Beharrungszustand um 10 bis 20% zu erhöhen ist. Eine solche Prämienhöhe würde aber beim Verfahren der Anwartschaftsdeckung einem λ von 4% entsprechen.

Was sich hier ergeben hat, war eigentlich auf Grund rein logischer Überlegung zu erwarten. Man kann beim Finanzierungssystem der Umlage unmöglich über den Weg der Prämienrückgewähr fortlaufend Mittel ihrem Zweck entfremden, ohne dass dadurch der notwendige Prämienaufwand in Mitleidenschaft gezogen wird. Fragt sich nur noch, ob diese Tatsache bei Propagierung der Umlageverfahren in der privaten Sozialversicherung lediglich übersehen oder bewusst unterschlagen wurde.

Literatur

[1] *H. Jecklin:* Personalfürsorge und Lohnerhöhung, Korreferat zum Votum von Dr. E. Kaiser, Mitteilungen des interkantonalen Verbandes für Personalfürsorge, Bd. 3, Nr. 2, November 1962.

[2] *H. Ammeter:* Über die Äquivalenz von Finanzierungssystemen in offener Kasse, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 63, Heft 1, 1963.

[3] *H. Jecklin:* Über die Bedeutung obligationenrechtlicher Vorschriften bei der Finanzierung autonomer Pensionskassen, Schweizerische Zeitschrift für Sozialversicherung, 7. Jahrg. 1963, Heft 2.

[4] *E. Zwinggi:* Versicherungsmathematik, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2. Auflage, 1958, Seite 47.

[5] *E. Kaiser:* Die Finanzierungsverfahren der Rentenversicherung unter dem Einfluss der wirtschaftlichen Entwicklung, Atti della II Conferenza internazionale degli Attuari e Statistici della Sicura sociale, Rom, Oktober 1959.

[6] *P. Nolfi:* Der freiwillige Dienstaustritt, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 62, Heft 1, 1962.

Anhang

Vom theoretischen Standpunkt aus ist es ganz interessant, die Diensttreue als kombinatorisches Problem zu betrachten. Gegeben sei eine Gesamtheit von Individuen, die einer Versicherungskasse auf Altersrente angehören. Das Rücktrittsalter sei mit z bezeichnet. Unter den Individuen mit Alter $x < z$ gibt es solche, die vor Erreichung des Alters x freiwillig austreten, und solche, die bis zur Erreichung des Rücktrittsalters z ausharren. Wir sehen von anderen Ausscheidemöglichkeiten als dem freiwilligen Austritt ab und nehmen zudem an, dass jedes freiwillig austretende Individuum sofort durch ein gleichaltriges ersetzt werde. Solche Ein- und Austritte sollen stets auf Jahresende erfolgen. Wenn wir die Zeit bis zur Erreichung des Alters z als Beitragsdauer bezeichnen, so kann man bezüglich der mittleren Beitragsdauer offenbar unterscheiden zwischen der mittleren Beitragsdauer schlechthin, der mittleren Beitragsdauer der Versicherungstreuen und der mittleren Beitragsdauer der freiwillig Ausgetretenen. Diese letztere interessiert uns hier.

Vorerst sei ein ganz einfacher hypothetischer Fall betrachtet. Die Gesamtheit der Beitragszahler sei in zwei Hälften A und B geteilt. Am Ende des ersten Jahres tritt A aus und wird ersetzt. (Die Wahl von B würde einfach eine symmetrische Überlegung ergeben.) Statt von zwei Untergesamtheiten können wir auch einfach von zwei Elementen A und B sprechen. Am Ende des zweiten Jahres tritt A oder B aus, wobei das austretende Element sofort ersetzt wird, usw. Ende jeden Jahres tritt A oder B aus und wird ersetzt. Somit ergeben sich als mögliche Austrittsfolgen:

1. Jahr				A				
2. Jahr		AA				AB		
3. Jahr	AAA		AAB		ABA		ABB	
4. Jahr	$AAAA$	$AAAB$	$AABA$	$AABB$	$ABAA$	$ABAB$	$ABBA$	$ABBB$

usw., und diesen Folgen von Austritten entsprechen als Folgen von

Verbleibszeiten:

1. Jahr				1				
2. Jahr			11				12	
3. Jahr	111		113		122		121	
4. Jahr	1111	1114	1132	1131	1221	1222	1213	1211

usw. In ein Schema gebracht, ergibt sich folgende Verteilung für die Anzahl ${}_kz_t$, wobei der Index t die abgelaufenen Jahre, k die diensttreuen Jahre bezeichnet:

t \ k	1	2	3	4	5	6	Z_t
1	1						1
2	3	1					4
3	8	3	1				12
4	20	8	3	1			32
5	48	20	8	3	1		80
6	112	48	20	8	3	1	192

Wenn wir den einzelnen Elementen die gleiche Austrittswahrscheinlichkeit zuordnen – was in Wirklichkeit nicht zutreffend ist –, so ist nach t Jahren die mittlere Beitragsdauer (Diensttreue) der Ausgetretenen offenbar

$$\bar{k}_t = \frac{\sum_{k=1}^{t} k \, {}_kz_t}{\sum_{k=1}^{t} {}_kz_t} .$$

Es gilt

$${}_kz_t = 2 \, {}_kz_{t-1} + 2^{t-k-1} = (t+2-k) \, 2^{t-k-1},$$

und für die Quersumme

$$Z_t = \sum_{k=1}^{t} {}_kz_t = 2Z_{t-1} + 2^{t-1} = t \, 2^{t-1}.$$

Des weiteren gilt hier

$$\sum_{k=1}^{t} k \, {}_kz_t = \sum_{s=1}^{t} Z_s .$$

Für $\bar{k}_t$ haben wir demnach

$$\bar{k}_t = \frac{1}{t\,2^{t-1}} \sum_{k=0}^{t-1} (t-k)\,2^{t-k-1} = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{k}{2^k},$$

oder auch

$$\bar{k}_t = \frac{1}{t\,2^{t-1}} \sum_{k=1}^{t} k(t+2-k)\,2^{t-k-1}.$$

Numerisch ergibt dies

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	... ∞
$\bar{k}_t$	1	1,25	1,42	1,53	1,61	1,68	1,72	1,75	1,78	1,80	... 2

Machen wir nun die gleichen Überlegungen für drei Elemente A, B und C. Es entspricht dies einer Austrittshäufigkeit von $33\,^1/_3\,\%$. Die möglichen Austrittsfolgen sind, wenn wir wieder mit A beginnen:

1. Jahr					A				
2. Jahr		AA			AB			AC	
3. Jahr	AAA	AAB	AAC	ABA	ABB	ABC	ACA	ACB	ACC

usw., mit den entsprechenden Folgen von Verbleibszeiten:

1. Jahr					1				
2. Jahr		11			12			12	
3. Jahr	111	113	113	122	121	123	122	123	121

usw. Dies ergibt folgendes Schema für die Anzahlen ${}_k z_t$:

t \ k	1	2	3	4	5	6	Z_t
1	1						1
2	4	2					6
3	15	8	4				27
4	54	30	16	8			108
5	189	108	60	32	16		405
6	648	378	216	120	64	32	1458

Es gilt hier

$$
\begin{aligned}
{}_k z_t &= 3\,{}_k z_{t-1} + 2^{k-1}\,3^{t-k-1} = 2^{k-1}(t+3-k)\,3^{t-k-1}, \\
Z_t &= 3Z_{t-1} + 3^{t-1} = t\,3^{t-1},
\end{aligned}
$$

und es ist

$$
\begin{aligned}
\bar{k}_t &= \frac{1}{t\,3^{t-1}} \sum_{k=1}^{t} k\,2^{k-1}(t+3-k)\,3^{t-k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{t} k \frac{2^{k-1}}{3^k} + \frac{3}{t} \sum_{k=1}^{t} k \frac{2^{k-1}}{3^k} - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} k^2 \frac{2^{k-1}}{3^k}.
\end{aligned}
$$

Dies ergibt numerisch

t	1	2	3	4	5	6	... ∞
$\bar{k}_t$	1	1,33	1,59	1,80	1,96	2,09	... 3

Bei vier Elementen ist, wie man sich nun leicht überlegt, die Verteilung der ${}_k z_t$ gegeben durch:

t \ k	1	2	3	4	5	6	Z_t
1	1						1
2	5	3					8
3	24	15	9				48
4	112	72	45	27			256
5	512	336	216	135	81		1280
6	2304	1536	1008	648	405	243	6144

Es entspricht dies einer Austrittshäufigkeit von 25%, und es ist

$$
\begin{aligned}
{}_k z_t &= 4\,{}_k z_{t-1} + 3^{k-1}\,4^{t-k-1} = 3^{k-1}(t+4-k)\,4^{t-k-1}, \\
Z_t &= 4Z_{t-1} + 4^{t-1} = t\,4^{t-1},
\end{aligned}
$$

und numerisch hat man:

t	1	2	3	4	5	6	... ∞
$\bar{k}_t$	1	1,38	1,69	1,95	2,17	2,36	... 4

Allgemein, für n Elemente hat man:

$$
\begin{aligned}
{}_k z_t &= n\,{}_k z_{t-1} + (n-1)^{k-1} + n^{t-k-1} = (n-1)^{k-1}(t+n-k)\,n^{t-k-1}, \\
Z_t &= n Z_{t-1} + n^{t-1} = t n^{t-1},
\end{aligned}
$$

und es ist bei einer Austrittswahrscheinlichkeit von $1/n$ die Diensttreue $\bar{k}_\infty = n$.

Wiewohl diese Ausführungen vorerst nur theoretischer Natur sind, haben sie doch ein gewisses praktisches Interesse. In vorstehendem Aufsatz haben wir zwischen der Umlageprämie ${}^U P$ und der Umlageprämie mit Rückgewähr beim freiwilligen Austritt ${}^U P_R$ die Beziehung

$$
{}^U P_R = {}^U P\,(1 - \varrho w \beta)^{-1}.
$$

Hierin ist w unsere Austrittshäufigkeit, also $w = 1/n$, und β ist ein Zeitrentenwert $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ zum Zinssatz $i = \lambda$. Setzen wir $w = 5\%$, so ist $n \sim 20$, und bei $\lambda = 3\%$ folgt $\beta = 15{,}3$. Aus den zitierten Darlegungen von Nolfi folgt jedoch, dass bei einem w von ungefähr 5 % der Wert von β unter gegenwärtigen Verhältnissen sehr viel kleiner ist, etwa ein Drittel des vorhin angegebenen Wertes. Dies kommt daher, dass den kurzen Diensttreuezeiten grössere Austrittshäufigkeit zuzuordnen ist als den langen. Es ist aber wohl möglich und zu hoffen, dass die Zeit der Hochkonjunktur wieder abklingt. Automatisch wird ein Anstieg der mittleren Diensttreue $\bar{k}_t$ resultieren. Auch wird dann vermutlich der wirtschaftliche Steigerungssatz λ zurückgehen. Beides wirkt im Sinne einer Erhöhung des Produktes $w\beta$. Hieraus folgt, dass bei Rückbildung der konjunkturmässig überspitzten Wirtschaftsverhältnisse die Umlage mit Prämienrückgewähr im Falle freiwilligen Austrittes teurer werden muss, was unseres Erachtens ein bemerkenswertes Resultat ist.

Résumé

Lorsqu'un salarié quitte volontairement son emploi, les statuts des caisses de retraites suisses prévoient le remboursement des primes payées. Dans le cas des caisses autonomes, cette restitution correspond à une disposition impérative du code des obligations. Si, lors de la comparaison des primes selon des systèmes de financement différents, on ne tient pas compte de cet impératif, les primes selon les systèmes de répartition apparaissent notablement plus favorables que ce n'est le cas en réalité.

Dans un appendice – à l'aide d'exemples hypothétiques simples – l'auteur examine l'aspect combinatoire des employés non-démissionnaires.

Summary

Provision is made in the rules of Swiss pension funds for return of premiums on voluntary termination of service. In the case of autonomous funds, this grant of benefit is in conformity with the statutory requirements of the Swiss Civil Code. If, while making comparison of premiums under different funding methods, due allowance is not made for this circumstance, the premiums according to no-reserve assessment systems will appear to be considerably more advantageous than it is actually the case.

The combinative aspect of loyal service has been elucidated with the aid of simple hypothetical examples in the appendix.

Riassunto

Negli statuti delle casse pensioni svizzere è previsto un rimborso di premi in caso di uscita facoltativa dal servizio. Nelle casse autonome questa prestazione impegnativa corrisponde a una prescrizione imperativa del Codice delle obbligazioni. Se procedendo a un confronto dei premi secondo i differenti metodi di finanziamento, non si tiene conto di tale circostanza, i premi secondo il sistema di ripartizione appaiono ben più favorevoli di quando effettivamente sono.

In un'appendice viene chiarito in base a semplici esempi ipotetici, l'aspetto combinato della fedeltà di servizio.