Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 65 (1965)

Artikel: Grundlagen und Hauptprobleme der Sachversicherungsmathematik

Autor: Ammeter, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551031

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Grundlagen und Hauptprobleme der Sachversicherungsmathematik

Von Hans Ammeter, Zürich

Nach einem Vortrag, gehalten an der Mitgliederversammlung vom 9. Oktober 1965

Zusammenfassung

Die Arbeit gibt einen Überblick über die von der ASTIN behandelten Probleme aus dem Gebiete der Sachversicherung. Hervorgehoben wird, dass die Sachversicherungsmathematik sich in einem weit grösseren Umfang auf die Risikotheorie stützen muss als die Mathematik der Lebensversicherung. Im einzelnen wird auf die Prämienberechnung, die Aussagekraft statistischer Erfahrungen, die Erfahrungstarifierung und die Reservierungsprobleme näher eingegangen.

Im Juni dieses Jahres fand in Luzern auf Einladung der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker das 5. Kolloquium der ASTIN statt. Schon früher hat die ASTIN solche Kolloquien veranstaltet, nämlich

im Jahre 1959 in La Baule,
1961 in Rättvik,
1962 in Juan-les-Pins und
1963 in Triest.

Für diese Kolloquien hat die ASTIN einen eigenen Stil entwickelt, der auch für das Luzerner Kolloquium beibehalten werden konnte und sich sehr bewährt hat.

Die ASTIN ist eine Subsektion des Comité Permanent und befasst sich in erster Linie mit der Sachversicherungsmathematik. Die Gründung erfolgte im Jahre 1957 bei Anlass des New Yorker Kongresses, nachdem in den Jahren 1953–1957 verschiedene Schwierigkeiten, welche ursprünglich der Gründung entgegenstanden, nach und nach beseitigt werden konnten. Es scheint, dass die ASTIN einem dringenden Bedürfnis entsprochen hat. Dies zeigt sich schon äusserlich in der Ent-

wicklung der Mitgliederzahl, welche bereits die Zahl 600 überschritten hat, wobei die Mitglieder sich aus mehr als 30 Ländern rekrutieren.

Selbstverständlich hat es schon vor der Gründung der ASTIN eine Sachversicherungsmathematik gegeben. Bei Anlass der Gründung der ASTIN wurde von den Herren *de Finetti, Depoid* und *Ammeter* ein Bericht verfasst, in dem das damals in Westeuropa Erreichte zusammengetragen wurde. Diesem Bericht konnte ein Literaturverzeichnis mit über 200 Titeln beigegeben werden. Als Kuriosum sei erwähnt, dass die älteste Arbeit auf diesem Gebiet von einem Herrn *Barrois* stammt, der im Jahre 1834 einen Aufsatz, betitelt

> «Essai sur l'application du calcul des probabilités aux assurances contre l'incendie»,

veröffentlichte.

Eine besondere Förderung hat die Sachversicherungsmathematik in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen durch den Hamburger Professor *Riebesell* erfahren. Dieser versuchte erstmals in verschiedenen Aufsätzen und sogar in einem eigentlichen Lehrbuch, eine systematische Sachversicherungsmathematik zu entwickeln. In einer ähnlichen Richtung betätigte sich auch der bekannte Schweizer Versicherungswissenschaftler *Gürtler*, vor allem in seinem bekannten, im Jahre 1934 erschienenen Werk «Die Kalkulation der Versicherungsbetriebe».

Diese verheissungsvolle Entwicklung wurde durch den zweiten Weltkrieg jäh unterbrochen. Erst in den fünfziger Jahren fanden sich die in aller Welt zerstreuten Jünger der Sachversicherungsmathematik wieder zusammen, was im Jahre 1957, wie erwähnt, zur Gründung der ASTIN führte. Wie es oft vorkommt, hatte der geschilderte Unterbruch nicht nur Nachteile: inzwischen wurde nämlich die Theorie der stochastischen Prozesse entwickelt und damit ein theoretisches Fundament geschaffen, das für die Sachversicherungsmathematik von grundlegender Bedeutung ist.

I. Grundlegende Probleme der Lebens- und Sachversicherungsmathematik

Die Lebensversicherungsmathematik ist nun schon über 200 Jahre alt und hat sich in dieser Zeit nicht nur praktisch bewährt, sondern auch zu einem mehr oder weniger abgeschlossenen Lehrgebäude ent-

wickelt. Es läge daher nahe, die Sachversicherungsmathematik gewissermassen durch eine geeignete Ausgestaltung der Lebensversicherungsmathematik aufzubauen. Es hat sich jedoch gezeigt, dass dieser Weg kaum zu brauchbaren Ergebnissen führen kann, da die Verhältnisse in den beiden Versicherungszweigen doch zu sehr voneinander verschieden sind.

Für die Lebensversicherung ist es charakteristisch, dass sie mit einem im allgemeinen langjährigen Sparprozess verbunden ist, der eine dominierende Rolle spielt. Der Risikoteil einer Lebensversicherung beansprucht im allgemeinen nur einen verhältnismässig kleinen Teil der Prämie, in der Grössenordnung von vielleicht 10–20%. Schwierigkeiten haben sich daher, wenn man von den Problemen, welche etwa aus der Langlebigkeit der Rentner entstehen, absieht, in der Lebensversicherung kaum je im Risikosektor gezeigt. Sonderfragen sind vielmehr gewöhnlich nur im Sparsektor entstanden.

Dies hat dazu geführt, dass die Lebensversicherungsmathematik sich im allgemeinen auf vollständig deterministische Modelle stützt, welche den stochastischen Charakter des Risikoteils ausser acht lassen. Wegen des unbedeutenden Risikoanteils ist dies in der Lebensversicherung im allgemeinen auch durchaus vertretbar und für die Zwecke der Prämienberechnung in vielen Fällen sogar ein praktisches Erfordernis. Gerade der stark betonte Sparteil zwingt dazu, diesem Sparprozess genauestens Rechnung zu tragen. Bei komplizierteren Versicherungsformen mit langer Versicherungsdauer würde man auf praktisch fast unüberwindliche Schwierigkeiten stossen, wenn man gleichzeitig auch die stochastische Komponente einbeziehen wollte.

Ganz anders liegen die Verhältnisse in der Sachversicherung. Hier liegt gewöhnlich gar kein Sparteil vor. Ferner sind die Versicherungsdauern in der Sachversicherung gewöhnlich viel kürzer als in der Lebensversicherung, so dass man sich zunächst kaum Gedanken darüber machen muss, wie sich das Risiko in etwa 30 Jahren gestalten könnte. Überdies sind die für das Risiko wesentlichen Faktoren noch in weitem Umfange unerforscht.

Dazu kommt, dass die Stabilität der Schadenswahrscheinlichkeiten in der Sachversicherung im allgemeinen bedeutend kleiner ist als in der Lebensversicherung. Für die Sachversicherung muss man daher den stochastischen Charakter des Risikoprozesses bei den meisten Problemen mitberücksichtigen, und zwar mit Hilfe von Modellen, die so

einfach wie möglich gestaltet sein sollten, aber doch die wesentlichen Faktoren in der Wirklichkeit erfassen müssen. Dies bringt es mit sich, dass man in der Sachversicherungsmathematik von der Risikotheorie als geeigneter theoretischer Grundlage ausgehen muss, ganz im Gegensatz zur Lebensversicherung, wo die Risikotheorie vor allem wegen der erwähnten Prädominanz des Sparvorganges nur ein Schattendasein fristet.

Trotz der verschiedenen Ausgangslage in der Lebens- und Sachversicherung ist es natürlich nicht so, dass sich die beiden Gebiete fein säuberlich trennen liessen. Zweifellos kann die Sachversicherungsmathematik von ihrer älteren Schwester, der Lebensversicherungsmathematik, manches lernen, und umgekehrt können auch die neuen Erkenntnisse der Sachversicherungsmathematik, vor allem in gewissen Grenzgebieten, die Lebensversicherungsmathematik befruchten. Das gilt insbesondere für jene Lebensversicherungen, die als reine Risikoversicherungen betrieben werden. Gewisse Fragestellungen bleiben sich in beiden Zweigen gleich. Trotz der Überschneidungen tut man aber gut daran, sich der verschiedenen Ausgangslage in der Lebens- und Sachversicherungsmathematik stets bewusst zu bleiben.

Ein Grund für das bis vor kurzem eher kümmerliche Dasein der Risikotheorie liegt auch darin, dass diese Theorie ursprünglich nur für den Fall konzipiert wurde, bei dem die Schadenswahrscheinlichkeiten hinsichtlich Stabilität die gleichen Eigenschaften aufweisen, wie sie beim Münzenwerfen, bei Urnenversuchen und Glücksspielen auftreten. In der Lebensversicherung kann man zwar zur Not noch mit diesen Annahmen arbeiten, ohne einen allzu grossen Fehler zu begehen. In der Sachversicherung liegen jedoch im allgemeinen ganz andere Verhältnisse vor. Die Schadenswahrscheinlichkeiten weisen hier nicht entfernt jene Stabilität auf, wie sie bei den Glücksspielwahrscheinlichkeiten postuliert werden. Schwankende Grundwahrscheinlichkeiten, Kumulrisiko und Wahrscheinlichkeitsansteckung führen dazu, dass die Schadenswahrscheinlichkeiten in der Sachversicherung wesentlich unstabiler sind als die genannten Glücksspielwahrscheinlichkeiten.

Lange Zeit zogen viele Fachleute daraus den Schluss, die Risikotheorie, und zwar auch die vom kürzlich verstorbenen *Filip Lundberg* geschaffene kollektive Risikotheorie, sei wohl theoretisch interessant, wegen ihrer unrealistischen Annahmen für die Praxis aber unbrauchbar. In dieser Hinsicht ist nach 1940 ein Wandel eingetreten. Damals er-

schien die klassische Arbeit von *Ove Lundberg* über nicht homogene stochastische Prozesse, die zwar vielleicht wegen ihres etwas abstrakt theoretischen Aufbaues, vor allem aber wegen der Kriegsereignisse, leider lange Zeit unbeachtet blieb.

Unabhängig davon entwickelte *Ammeter* im Jahre 1948 ein Modell mit schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten, das im wesentlichen auf den gleichen Überlegungen fusst wie bei Ove Lundberg und sich für viele Anwendungen in der Sachversicherungsmathematik als fruchtbar erwiesen hat. Mit Hilfe dieses Modells gelingt es, einen engeren Anschluss an die wirklichen Verhältnisse in der Sachversicherung zu gewinnen als mit dem klassischen Modell.

Selbstverständlich bedeutet auch dieses Modell eine Vereinfachung der Wirklichkeit. Es ist daher zu begrüssen, dass in den letzten Jahren eine noch weitere Verfeinerung dieser theoretischen Grundlagen versucht wurde, die vor allem den Herren *Thyrion* und *Philipson* zu verdanken ist. Man darf also heute feststellen, dass nunmehr eine theoretische Grundlage besteht, welche einen erfolgreichen Einsatz moderner mathematischer Methoden in der Sachversicherungsmathematik gestattet.

Im folgenden wird versucht, einige wichtige Probleme der Sachversicherungsmathematik kurz zu skizzieren, unter Beschränkung auf die Fragen, welche unabhängig vom gerade vorliegenden Versicherungszweig eine allgemeinere Bedeutung aufweisen.

II. Das Tarifierungsproblem

Die einjährige Risikoprämie einer Lebensversicherung berechnet sich nach der einfachen Formel

$$P = q \cdot S,$$

worin q die Sterbenswahrscheinlichkeit und
S die versicherte Summe bedeuten.

Wenn man diese Formel auf die Sachversicherung übertragen will, treten zwei in der Lebensversicherung nicht vorkommende neue Gesichtspunkte auf, nämlich

1. die Möglichkeit, dass das Schadenereignis im Verlaufe der Zeit mehrmals auftritt, und

2. dass in der Sachversicherung die Versicherungsleistung sich nach dem wirklich aufgetretenen Schaden richtet und nicht zum vornherein summenmässig feststeht. Für die Prämie erhält man jetzt die allgemeinere Formel

$$P = \sum_{r=1}^{\infty} q(r) \int_0^{\infty} x s^{*r}(x)\, dx .$$

In dieser Formel bedeuten:

$q(r)$ die Wahrscheinlichkeit, dass im betrachteten Prämienintervall insgesamt genau r Schäden auftreten;

$s(x)$ die Dichte der Verteilung der fällig werdenden Schadensummen x und

$s^{*r}(x)$ ihre r-te Faltungspotenz;

$s^{*r}(x)\, dx$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass bei r Schadenfällen der Gesamtschaden in das Intervall $(x, x + dx)$ fällt.

In dieser Formel kommen die beiden genannten Besonderheiten deutlich zum Ausdruck; während der erste Faktor, über den zu summieren ist, die Möglichkeit eines mehrfachen Auftretens eines Schadens berücksichtigt, erfasst der zweite Faktor die Unbestimmtheit in der Höhe der Versicherungsleistung. Diese Unbestimmtheit lässt sich überwinden durch die Schadensummenverteilung, welche jeder Schadenhöhe eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnet.

In der Sachversicherung gibt es verschiedene Deckungssysteme. Man kennt zum Beispiel Systeme mit Erstrisikodeckung sowie mit Abzugsfranchise oder mit Integralfranchise. Alle diese Fälle lassen sich durch eine geeignete Ausgestaltung der oben erwähnten Formel, zum Beispiel durch eine Änderung der Integral-Grenzen, erfassen, womit eine rationale Methode für die Tarifierung der verschiedenen Deckungssysteme gefunden ist. Beispielsweise gilt folgende Formel für die Erstrisikodeckung (Maximalschaden $= m$):

$$P = \sum_{r=1}^{\infty} q(r) \int_0^{m} x s_m^{*r}(x)\, dx ,$$

worin s_m die an der Abszisse m gestutzte Schadensummenverteilung bedeutet.

Die geschilderte Formel muss, um den tatsächlichen Gegebenheiten noch mehr Rechnung tragen zu können, noch mehr verallgemeinert

werden. Es muss nämlich berücksichtigt werden, dass die Schadenswahrscheinlichkeiten keineswegs stabil sind, sondern in einem gewissen Rahmen schwanken können. Dies lässt sich durch folgende Ausgestaltung der Formel erfassen:

$$P = \int h(q)\,dq \sum_{r=1}^{\infty} q(r) \int_0^{\infty} x s^{*r}(x)\,dx\,,$$

$h(q)$ bedeutet darin die Dichte der Strukturfunktion,
oder
$h(q)\,dq$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Verteilung der Schadenfälle $q(r)$ einem Ordnungs-Parameter im Intervall $(q, q + dq)$ folgt.

Wie man sieht, lässt sich ein Formel-Apparat aufbauen, der den Bedürfnissen der Sachversicherung Rechnung zu tragen vermag. Natürlich setzt die Anwendung voraus, dass man die in den Formeln vorkommenden Verteilungen h, q und s kennt. Leider steckt die statistische Forschung auf dem Gebiete der Sachversicherung noch in den Kinderschuhen, so dass bei vielen Versicherungszweigen nur sehr rudimentäre Vorstellungen über die Prämienhöhe für bestimmte Risiken bestehen. Immerhin gelingt es, gewisse Abhängigkeiten herauszukristallisieren, wenn man eine Zersplitterung des Beobachtungsmaterials vermeidet und nur grössere Beobachtungsgruppen bildet.

Solche Untersuchungen sind in den letzten Jahren vor allem für die Auto-Haftpflichtversicherung vorgenommen worden. Es hat sich dabei gezeigt, dass die Prämie in diesem Versicherungszweig vor allem von folgenden Risiko-Parametern abhängt:

Motorenstärke,
Fahrgebiet,
Benützungsart,
Anzahl der gefahrenen Kilometer,
Alter des Fahrers,
Alter des Führerscheins beim Fahrer.

Aufschlussreiche Zahlen über die genannten Faktoren haben unter anderen *Lanteli* für Schweden und *Mehring* für Deutschland gegeben. Allerdings bestehen zum Teil Schwierigkeiten, um diese Faktoren der Tarifierung nutzbar zu machen, indem beispielsweise die Anzahl der gefahrenen Kilometer nur schwer auf eine befriedigende Weise erfasst

werden kann. Ebenso ist es nicht leicht, die auf den Fahrer bezüglichen Daten zu berücksichtigen, wenn – wie in der Schweiz – nicht der Fahrer, sondern das Fahrzeug versichert wird. Immerhin ist es interessant festzustellen, dass beispielsweise nach den Lantelischen Zahlen die Schadenhäufigkeit für einen langjährigen Fahrer nur etwa ein Drittel der Schadenhäufigkeit beim Anfänger beträgt. Wenn man an diesen Zusammenhang denkt, kann man sich leicht vorstellen, dass die in den letzten Jahren angestiegene Schadenfrequenz vielleicht gar nicht einer echten Erhöhung der Unfallwahrscheinlichkeit gleichkommt, sondern nur die starke Vermehrung der unerfahrenen neuen Fahrer auf den Strassen zum Ausdruck bringt.

III. Credibility

Um das geschilderte Tarifierungsverfahren wirklich anwenden zu können, ist es unerlässlich, die Schadenstatistik auszubauen. Gute Anfangsresultate kann man, wie erwähnt, erreichen, indem man das gesamte Material auf bestimmte Risikomerkmale hin untersucht und zunächst unberücksichtigt lässt, wie sich andere Faktoren auswirken. Dieses Verfahren ist unter anderem vom schwedischen Mathematiker *Almer* entwickelt worden und unter dem Namen «Faktoranalyse» bekannt.

Durch eine Faktoranalyse gelangt man aber im allgemeinen bestenfalls zu geeigneten Ausgangswerten, welche später durch subtilere statistische Untersuchungen verbessert werden müssen, die sich notgedrungen auf kleinere Kollektive stützen müssen als die Ausgangsstatistiken. Dieses Vorgehen hat den Nachteil, dass die Aufsplitterung des Materials die Aussagekraft der zugehörigen Statistiken einschränkt.

Für derartige Korrekturen der Tarife ist es wichtig zu wissen, in welchem Verhältnis die Aussagekraft des ursprünglichen Gesamtmaterials zur Aussagekraft von kleineren Teilbeständen steht. Für das Wort «Aussagekraft» verwenden die Amerikaner den Begriff «Credibility». Die Credibility stellt dabei die Wahrscheinlichkeit dar, nach der ein statistisches Ergebnis in ein bestimmtes Vertrauensintervall fällt.

Um solche Untersuchungen zu erleichtern, haben die amerikanischen Versicherungsmathematiker umfangreiche Tabellen aufgestellt, welche die Aussagekraft unter bestimmten Annahmen angeben. Mit Hilfe dieser Tabellen werden die Prämienkorrekturen berechnet, wobei die ursprünglichen Prämiensätze und die aus den Spezialuntersuchungen hervorgegangenen Resultate mit dem Gewicht der Aussagekraft des

Beobachtungsmaterials kombiniert werden. Für die Einzelheiten dieses interessanten Verfahrens sei auf die im Frühjahrs-Heft 1965 der «Mitteilungen» erschienene Arbeit *Derron* verwiesen. Am Kolloquium in Luzern spielte die Credibility-Theorie eine gewichtige Rolle.

IV. Erfahrungstarifierung

Bei Risikoversicherungen, bei denen der Eintritt eines Schadenfalles nicht gewiss ist, kann beim Laien leicht der Eindruck entstehen, dass die von ihm verlangten Prämien zu hoch seien. Solche Vorurteile entstehen zum Beispiel, wenn bei einem einzelnen Versicherten jahrelang kein Schaden auftritt, anderseits aber eine verhältnismässig hohe Prämie erhoben wird. Ähnliche Schwierigkeiten trifft man auch bei Kollektivversicherungen an, bei denen Schadenfälle zwar auftreten, aber nicht in einem Umfang, der den einbezahlten Prämien entspricht. Es entsteht dann wiederum der Eindruck, die vorgesehene Tarifierung sei übertrieben, was dem Vertrauensverhältnis zwischen Versicherten und Gesellschaft abträglich sein kann.

Es ist zwar nicht zu bestreiten, dass gerade in der Sachversicherung oft mit sehr mangelhaften Tarifierungen gearbeitet werden muss, so dass man nicht einmal immer sagen kann, die geschilderten Urteile von Versicherten seien unzutreffend. Wie dem auch sei, es besteht jedenfalls oft ein psychologisches Erfordernis, die Prämienbemessung dem subjektiven Empfinden der Versicherten anzupassen.

Solche Verfahren sind in der Praxis wiederholt angewendet worden. Am bekanntesten ist wohl das Verfahren in der Automobilversicherung mit einem Bonus-Malus-System, bei dem die Prämien sich je nach den in der Vergangenheit aufgetretenen Schadenfällen richten.

Es stellt sich hier die Frage, ob es überhaupt grundsätzlich möglich ist, Verfahren auszudenken, welche risikogerecht funktionieren. Hier muss man sich zunächst fragen, was man unter «risikogerecht» verstehen soll. Zu einer vernünftigen Konzeption gelangt man, wenn man die erwartungsmässige Schadenbelastung und den Erwartungswert der Prämien miteinander vergleicht. Vollständige Risikogerechtigkeit würde bestehen, wenn beide Erwartungswerte übereinstimmen, aber nicht nur bei einer bestimmten Annahme über die Schadenswahrscheinlichkeit, sondern bei beliebig abweichenden Risikoverhältnissen. Je grösser der Unterschied im Erwartungswert wäre, desto unvollkommener wäre

eine Methode der Erfahrungstarifierung. In einer im Jahre 1961 bei Anlass des 60. Geburtstages von Prof. Wyss in den «Mitteilungen» veröffentlichten Arbeit über Erfahrungstarifierung wurde gezeigt, dass es tatsächlich Lösungen gibt, welche im geschilderten Sinne risikogerecht funktionieren, selbst wenn die zu Grunde gelegte Basistarifierung ganz ungenügend wäre.

Die Frage hat natürlich nicht nur theoretisches Interesse, wie die Diskussionen über das Bonus-Malus-System in der Automobilversicherung in den letzten Jahren gezeigt haben. Lange Zeit wurde von verschiedenen Fachleuten bestritten, dass ein Bonus-Malus-System annähernd risikogerecht funktionieren kann. Vor allem *Gürtler* hat durch eine Reihe von instruktiven Beispielen das Versagen der Bonus-Malus-Methode nachzuweisen versucht. *Derron* hat jedoch gezeigt, dass risikogerecht funktionierende Systeme gefunden werden können, wenn man verschiedene Tabus aufgibt und wirklich alle Möglichkeiten ausschöpft. Das in der schweizerischen Automobilversicherung seit 1963 verwendete System, das auf gründliche Studien von *Bichsel* zurückgeht, kommt einem risikogerechten System recht nahe.

Für die Gestaltung einer risikogerechten Erfahrungstarifierung braucht es eingehende risikotheoretische Untersuchungen. Hier kann man sich unmöglich mit einem deterministischen Modell begnügen, sondern muss die Vielfalt der möglichen Schadenverläufe in Betracht ziehen, wenn man nicht zu einem falschen Ergebnis kommen will. Es zeigt sich hier einmal mehr, dass die Sachversicherungsmathematik ohne geeignete risikotheoretische Modelle nicht in der Lage wäre, die ihr gestellten Fragen befriedigend zu lösen.

V. Technische Reserven

Wie in der Lebensversicherung, sind auch in der Sachversicherung technische Reserven notwendig. Wir können folgende drei Arten von Reserven unterscheiden:

a) Prämienüberträge und andere Rechnungsabgrenzungsposten sowie
b) Schadenreserven, welche die Belastung aus noch nicht gemeldeten, aber eingetretenen Schäden erfassen und vor allem den voraussichtlichen Bedarf für gemeldete Schäden, welche noch nicht reguliert werden konnten, zurückstellen, und schliesslich
c) Sicherheitsreserven aller Art.

Die erstgenannten Reserven, die sogenannten Prämienüberträge, ergeben sich, indem man von den eingenommenen Prämien jene Beträge absetzt, welche auf den Teil des Versicherungsjahres entfallen, der nach dem Bilanztag beginnt. Es liegt nahe, eine Aufteilung pro rata temporis vorzunehmen. Am letzten ASTIN-Kolloquium in Luzern hat jedoch ein mittelamerikanischer Aktuar darauf hingewiesen, dass diese Aufteilung pro rata temporis gar nicht selbstverständlich ist. Es hat sich nämlich gezeigt, dass Schäden sehr oft an bestimmte Jahreszeiten gebunden sind oder auch im Zusammenhang mit Festlichkeiten in erhöhter Zahl entstehen. Es ist daher beispielsweise zu prüfen, wieviele Festtage in einen bestimmten Jahresteil fallen, usw. Hier fehlen leider noch eingehende Untersuchungen, aber es wäre gewiss interessant festzustellen, inwieweit die einzelnen Jahresteile die Rechnung belasten.

Von grösster Bedeutung für die Sachversicherung ist die sogenannte Schadenreserve. Analog wie in der Lebensversicherung die Solidität einer Gesellschaft im wesentlichen von der Höhe des bestellten Deckungskapitals abhängt, ist in der Sachversicherung die Schadenreserve das finanzielle Fundament.

Es ist schon eine Reihe von Methoden entwickelt worden, um die Schadenreserve zu berechnen. Das älteste und vielleicht auch primitivste Verfahren besteht in einer Einzelschätzung aller pendenten Schäden. Dieses Verfahren kann kaum befriedigen, da es dem subjektiven Ermessen der Bearbeiter einen zu grossen Spielraum einräumt.

Andere Verfahren gehen vom durchschnittlichen Schaden aus, der bei den unerledigten Schäden zu erwarten ist. Darnach wäre im einfachsten Fall die Anzahl der pendenten Schäden mit dem Durchschnittsschadensbetrag zu multiplizieren. Auch dieses Verfahren ist wohl zu einfach, da gerade die grossen Schäden längere Zeit pendent bleiben, so dass der Durchschnittsschaden wohl ziemlich stark abhängig ist von der Zeitspanne zwischen dem Eintritt und der Erledigung des Schadens. Schliesslich ist auch noch zu berücksichtigen, dass gerade bei mehrere Jahre unerledigt bleibenden Schäden Veränderungen in der Kaufkraft des Geldes und sogar in der Gerichtspraxis die Höhe des Schadenbedarfs wesentlich beeinflussen können, wobei man leider feststellen muss, dass solche nachträgliche Änderungen sozusagen stets zu Ungunsten des Versicherers eintreten. Ein anschauliches Beispiel über die Schadenreserve hat *Beard* in seiner dem letzten Kolloquium eingereichten Arbeit gegeben.

Eine interessante weitere Methode hat *Franckx* bei Anlass des Rättviker ASTIN-Kolloquiums vorgeschlagen. Er benützt, ähnlich wie in der Lebensversicherung die Überlebensordnung, eine Abfallsordnung der noch nicht erledigten Schäden, deren Verlauf durch statistische Erfahrungen festzulegen wäre. Jedem Verbleibsjahr kann man ferner eine Verteilung der im betreffenden Jahr auszurichtenden Schadensummen als Funktion des Schadenbetrages zuordnen, wobei die genannten Gesichtspunkte einzubauen wären. Auf diese Weise gelangt man zu einem Modell, das sich durch einen hohen Grad von Übersichtlichkeit auszeichnet und zu einer befriedigenden Berechnung des Sollbetrages einer Schadenreserve führen kann.

Man sieht, dass die Berechnung der Schadenreserve ein recht komplexes Problem darstellt, für dessen Lösung aber bereits gute Ansatzpunkte vorhanden sind. Auch hier dürften risikotheoretische Methoden zu fruchtbaren Ergebnissen führen.

Hinsichtlich der Sicherheitsreserven sind in der Lebensversicherung gewöhnlich hinreichende Sicherheiten im Prämienniveau und im Deckungskapital enthalten, so dass explizite Sicherheitsreserven nur eine untergeordnete Rolle spielen. Das Sicherheitsproblem wird in der Lebensversicherung auch dadurch entschärft, dass die Schadenswahrscheinlichkeiten verhältnismässig stabil verlaufen und dass vergleichsweise mehr rückversichert wird als in der Sachversicherung.

Ganz anders liegen die Verhältnisse jedoch in der Sachversicherung. Man braucht nur die in den letzten Jahren erschienenen Geschäftsberichte von Sachversicherungsgesellschaften zu lesen, um die Bedeutung ausreichender Sicherheitsreserven zu erkennen. Im Gebiet der Sachversicherung ist es leider immer wieder möglich, dass sich das Risiko fast plötzlich verschlechtert und dass manchmal eine Reihe von Jahren vergeht, bis eine bestimmte Sparte wieder selbsttragend wird. Unter diesen Umständen ist es unerlässlich, besondere Sicherheitsreserven zu stellen.

In den letzten Jahren ist das Problem der Sicherheitsreserve durch die Diskussionen über die sogenannte «Solvabilität» im Rahmen der EWG und der OECD in den Vordergrund getreten, wobei leider auch politische Hintergründe hineinspielen. Zeitweise gewann man geradezu den Eindruck, dass die Gesellschaften und ihre Fachleute durch solche politische Tendenzen überspielt werden sollen. Es sei hier nur an den

sogenannten «Plan Campagne» erinnert, der unter den Fachleuten fast allgemein abgelehnt wird.

Bei der Bemessung von Sicherheitsreserven muss man sich zunächst klar werden, welcher Art die Sicherheit sein soll, die man anstreben will. Die erste Stufe dieser Sicherheit könnte man mit dem Begriff «Stabilität» umschreiben. Darnach sollte das Prämienniveau eine hinreichende Sicherheitsmarge enthalten, so dass nur recht selten das Jahresergebnis unter bestimmte Grenzen sinkt, oder, mit anderen Worten, die Schadenbelastung sollte wenn möglich durch die Prämien allein gedeckt werden können, ohne einen Griff in vorhandene Sicherheitsreserven zu tun. Man könnte zum Beispiel festlegen, dass die Sicherheitszuschläge in den Prämien so gross sein sollten, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95% die Schäden aus den Nettoprämien einschliesslich Sicherheitszuschlag gedeckt werden können. Um dies zu erreichen, muss man die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens für ein Versicherungsjahr kennen, aus der sich der erforderliche Sicherheitszuschlag ergibt.

Die Lösung führt auf ein klassisches Problem der Risikotheorie und zeigt, dass der Sicherheitszuschlag von der Stabilität der Schadenswahrscheinlichkeiten selbst, von der Summenstruktur unter Berücksichtigung der getätigten Rückversicherungen sowie vom Umfang des Versicherungsbestandes abhängt. Würden die Schadenswahrscheinlichkeiten ähnliche Eigenschaften aufweisen wie die am Spieltisch beheimateten Wahrscheinlichkeiten, so ergäbe sich nach dem Gesetz der grossen Zahlen ein mit dem Umfang des Versicherungsbestandes schliesslich bis auf Null fallender Sicherheitszuschlag. Leider sind die Schadenswahrscheinlichkeiten in der Sachversicherung nicht mit so günstigen Eigenschaften ausgestattet wie die erwähnten Glücksspielwahrscheinlichkeiten. Die Grundschwankung der Schadenswahrscheinlichkeiten führt daher auch bei beliebiger Erhöhung des Versicherungsbestandes auf einen Sicherheitszuschlag, welcher imstande sein muss, mindestens die Grundschwankung der Schadenswahrscheinlichkeiten auszugleichen.

Eine Stabilität im Sinne der soeben gegebenen Erläuterungen genügt natürlich noch nicht, um eine dauernde Sicherheit für das Risikogeschäft einer Gesellschaft zu gewährleisten. Diese dauernde Sicherheit wird in den letzten Jahren mit dem Begriff «Solvabilität» umschrieben, was sprachlich wohl kaum richtig ist, indem es eigentlich «Solvenz» heissen sollte.

Eine hinreichende Solvabilität ist gewährleistet, wenn die Vorkehrungen so getroffen sind, dass die Wahrscheinlichkeit für eine jemals eintretende Insolvenz der Gesellschaft so klein ist, dass sie praktisch vernachlässigt werden kann. Die nähere Umschreibung des Begriffes der Solvabilität stösst dabei auf eine Reihe zwar sekundärer, aber für das Ergebnis doch wesentlicher Festsetzungen.

Zunächst fragt es sich, ob die Solvenz durch eine Ruinwahrscheinlichkeit gemessen werden soll, welche Ruin bis ins Unendliche mitberücksichtigt, oder ob es genügt, eine endliche Ruin-Periode ins Auge zu fassen. Praktisch ist es einfacher, einen Ruin bis ins Unendliche zu berücksichtigen, und Untersuchungen, welche der bekannte schwedische Risikotheoretiker *Segerdahl* durchgeführt hat, haben auch gezeigt, dass bei bis ins Unendliche reichenden Antiruin-Vorkehrungen die in Kauf genommenen Ruinmöglichkeiten eigentlich nur während einer begrenzten, zeitlich kleinen Strecke in Betracht fallen. Wenn Ruin nicht in den ersten 10 bis 20 Jahren eintritt, ist er praktisch kaum mehr zu befürchten.

Eine zweite Schwierigkeit ergibt sich aus dem Problem, ob man Ruin in jedem beliebigen oder nur in gewissen Zeitpunkten, zum Beispiel beim jeweiligen Jahresabschluss, in Betracht ziehen muss. Schliesslich ist auch noch die Höhe der tolerierbaren Ruinwahrscheinlichkeit in einem gewissen Umfange arbiträr.

Hat man sich über diese arbiträren Festsetzungen jedoch einmal geeinigt, so kann die Ruinwahrscheinlichkeit auf Grund des von der kollektiven Risikotheorie entwickelten Formel-Apparates numerisch berechnet werden, und zwar nicht nur für den Fall des homogenen, sondern auch für allgemeinere Risikoprozesse, wie zum Beispiel in einer Arbeit des Verfassers aus dem Jahre 1948 gezeigt wird. Es gilt nämlich die einfache Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit ψ

$$\psi \cong e^{-Ru},$$

worin u den Anfangswert der vorhandenen Sicherheitsreserve bedeutet und der Ausgleichungskoeffizient R sich aus folgender Formel bestimmen lässt:

$$\int_0^\infty e^{Rz}\, s(z)\, dz = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\, Rs\,(t/h)}}{t/h};$$

darin bedeutet λ den Sicherheitszuschlag in den Prämien, $s(x)$ die Schadensummenverteilung mit s als Mittelwert und schliesslich h einen Schwankungsparameter. Auf diese Weise können die wichtigsten Faktoren in nahezu idealer Weise berücksichtigt werden.

Es liegt in der Natur der Sache – und verschiedene Untersuchungen haben dies bestätigt –, dass die numerischen Ergebnisse auf Grund einer geeignet festzusetzenden tolerierbaren Ruinwahrscheinlichkeit sehr wesentlich von den konkreten Eigenschaften eines bestimmten Versicherungsbestandes abhängen. Es erscheint daher als fragwürdig, wenn versucht wird, die Anforderungen an die Solvabilitätsreserve so zu gestalten, dass weder der Versicherungszweig noch andere Eigenschaften des Versicherungsbestandes zum Zuge kommen. Gerade das wird aber bei den Solvabilitäts-Diskussionen im Rahmen der EWG und OECD, wie übrigens auch bei dem allgemein abgelehnten Plan Campagne in Aussicht genommen. Vor solchen übersimplifizierenden «Lösungen» muss gewarnt werden, selbst wenn sie mit der Autorität nationaler, ja eventuell supranationaler Behörden ausgestattet werden. Die Gesellschaften tun jedenfalls gut daran, die Ergebnisse der modernen risikotheoretischen Forschungen im Auge zu behalten und sich keineswegs in blindem Vertrauen auf diese politisch inspirierten Solvabilitätskriterien einzulassen.

Abschliessend sei festgestellt, dass es leider noch nicht so weit ist, dass man sagen könnte, die Sachversicherungsmathematik habe bereits für alle praktischen Bedürfnisse eine befriedigende und allgemein anerkannte Lösung gefunden; hiezu bedarf es noch eines ernsthaften Einsatzes der an diesem Problem arbeitenden Aktuare. Immerhin sind schon einige wesentliche Resultate erarbeitet worden, welche teilweise bereits der Praxis dienstbar gemacht werden konnten.

Anderseits genügt es natürlich nicht, dass die Sachversicherungsmathematik nach und nach zu einem Lehrgebäude aufgebaut wird, wenn die entwickelten Methoden in der Praxis nicht beachtet werden. Die Sachversicherungsgesellschaften sollten auch dazu übergehen – wie das in verschiedenen Ländern schon geschehen ist –, Mathematiker in ihre Dienste einzustellen, welche für die besonderen Probleme der Sachversicherungsmathematik die nötige Vorbildung aufweisen. Diese Vorbildung müsste sogar oft bedeutend weiter gehen, als sie für die Lebensversicherung im allgemeinen genügt.

Résumé

Le présent travail donne un aperçu des problèmes étudiés par l'ASTIN dans le domaine de l'assurance de choses. L'auteur met en évidence le fait que la théorie mathématique de l'assurance de choses doit s'appuyer dans une plus large mesure sur la théorie du risque que la théorie mathématique de l'assurance sur la vie. En particulier, les problèmes relatifs au calcul de la prime, à la crédibilité des données statistiques, à la tarification expérimentale et à la constitution de réserves sont traités dans le présent travail.

Summary

The paper surveys the problems dealt with by ASTIN in the sphere of non-life insurance. It is stressed that non-life actuarial science must necessarily lean on the tools of risk theory to a much greater extent than in the life field. In particular, calculation of premiums, credibility of statistical experience, experience rating and problems relating to reserves are particularly considered.

Riassunto

Il presente lavoro da una veduta d'insieme dei problemi svolti dall'ASTIN nel dominio delle assicurazioni delle cose. Si rileva che la teoria matematica dell'assicurazione delle cose deve appogiarsi in misura molto maggiore sulla teoria dei rischi che non l'assicurazione sulla vita. In particolare, vi si trattano i problemi inerenti al calcolo dei premi, alla credibilità dei dati statistici, alla tariffazione sperimentale e alla costituzione delle riserve.