Über die Entwicklung von Versicherungsbeständen

Über die Entwicklung von Versicherungsbeständen

Von Makram Khalil, Zürich

Zusammenfassung

Um die Entwicklung von Versicherungsbeständen zu verfolgen, wird ein allgemeines mathematisches Modell untersucht sowie an einem numerischen Beispiel illustriert.

Die Entwicklung von Versicherungsbeständen ist eines der Probleme der Versicherungsmathematik, das nicht nur theoretische Bedeutung hat, sondern auch in der Praxis eine wichtige Rolle spielt. In den folgenden Betrachtungen wird die Entwicklung von Beständen diskutiert, wenn Zugangs- und Ausscheideintensitäten von der zeitlich veränderlichen Bestandesgrösse abhängen. Nach der Einführung eines passenden mathematischen Modells werden im zweiten Abschnitt Überlegungen über die statistische Schätzung der auftretenden Parameter angestellt. Schliesslich gibt ein einfaches praktisches Beispiel Gelegenheit, Anwendungsmöglichkeiten der Theorie aufzudecken.

1. Mathematisches Modell

Es sei n eine ganze, positive Zahl und λ, μ seien positive, reelle Zahlen. Weiter liege im Zeitpunkt 0 ein Versicherungsbestand der Grösse m vor. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall $(t, t+dt)$ ein Zugang oder ein Ausscheidefall stattfindet, sei unabhängig von der Entwicklung des Bestandes bis zum Zeitpunkt t und durch $\lambda N_t\, dt + o(dt)$ bzw. $\mu N_t\, dt + o(dt)$ gegeben. N_t ist die Grösse des Bestandes im Zeitpunkt t, $o(dt)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Zugang oder Ausscheidefall im Intervall $(t, t+dt)$ stattfindet. Es wird vorausgesetzt, dass die Zugänge und Ausscheidefälle voneinander unabhängig sind.

Sei $x(t)$ die zufällige Variable, welche die Grösse des Bestandes im Zeitpunkt t wiedergibt, und $P_{m,n}(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x(t)$ den Wert n annimmt, wenn m die Grösse des Bestandes im Zeitpunkt 0 ist.

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} P_{m,n}(0) &= 1 \qquad & n &= m \\ &= 0 & n &\neq m \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} P_{m,n}(t) &= W\left[x(t) = n / x(0) = m\right] \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots \\ P_{m,n}(t+dt) &= P_{m,n}(t)\left[1 - n\lambda dt - n\mu dt - o(dt)\right] \\ &+ P_{m,n-1}(t)\left[\lambda(n-1)\, dt + o(dt)\right] \\ &+ P_{m,n+1}(t)\left[\mu(n+1)\, dt + o(dt)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

$1 - n\lambda dt - n\mu dt - o(dt)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einem Bestand von der Grösse n im Zeitintervall $(t, t+dt)$ kein Ereignis gibt, wenn man einen Zugang oder Ausscheidefall als Ereignis betrachtet.

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{m,n}(t)}{dt} &= \lambda\left[(n-1)\, P_{m,n-1}(t) - n P_{m,n}(t)\right] \\ &+ \mu\left[(n+1)\, P_{m,n+1}(t) - n P_{m,n}(t)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Setzt man $\psi(z,t)$ für die erzeugende Funktion, dann ist nach Definition

$$\psi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}(t)\, z^n \tag{3}$$

Daraus folgt, dass $\psi(z,t)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen muss:

$$\frac{\delta\psi}{\delta t} = \frac{\delta\psi}{\delta z}\,(1-z)\,(\mu - \lambda z) \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\psi(z,0) = z^m \tag{5}$$

Als Lösung von (4) unter der Bedingung (5) erhält man:

$$\psi(z,t) = \left\{ \frac{\mu(\beta_t - 1) + (\lambda - \mu\beta_t)\, z}{\lambda\beta_t - \mu - \lambda(\beta_t - 1) z} \right\}^m \tag{6}$$

wobei $\beta_t = e^{(\lambda-\mu)\, t}$.

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit $P_{m,n}(t)$

$$P_{m,n}(t) = \left[\frac{\mu(\beta_t-1)}{\lambda\beta_t-\mu}\right]^m \sum_{l=0}^{\min(n,m)} \binom{m}{l}\binom{m+n-l-1}{n-l}\left(\frac{\lambda-\mu\beta_t}{\mu(\beta_t-1)}\right)^l\left(\frac{\lambda(\beta_t-1)}{\lambda\beta_t-\mu}\right)^{n-l} \quad (7)$$

Aus (6) erhält man für das erste und zweite Moment sowie für die Streuung die folgenden Ausdrücke:

$$E\left(x(t)\,/\,x(0)=m\right) = m\,e^{(\lambda-\mu)t} \quad (8)$$

$$E\left(x^2(t)\,/\,x(0)=m\right) = \left[m^2 e^{(\lambda-\mu)t} + m\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{(\lambda-\mu)t}-1\right)\right] e^{(\lambda-\mu)t} \quad (9)$$

$$E\left\{\left(x(t)-E\left(x(t)\,/\,x(0)=m\right)\right)^2/\,x(0)=m\right\}$$

$$= m\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\cdot e^{(\lambda-\mu)t}\left(e^{(\lambda-\mu)t}-1\right) \quad (10)$$

2. Statistische Schätzung der Parameter

Die zwei Parameter λ, μ in dem erhaltenen Modell müssen statistisch geschätzt werden. Man kann diese Parameter schätzen mit Hilfe von Beobachtungen, die solange fortgesetzt werden, bis eine vorgegebene Anzahl von Zugängen und Ausscheidefällen erreicht wird. Dies wird als stetiger Fall bezeichnet, da der End-Zeitpunkt der Beobachtungen stetig variieren kann. Doch sind solche Beobachtungen in Versicherungsbetrieben nicht immer möglich, im Gegensatz zum diskreten Fall, wo die Beobachtungen der Bestandesgrösse in äquidistanten Zeitpunkten erfolgen.

i. Stetiger Fall: Die Zugänge und Abgänge treten zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ein, $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$.

Sei die Bestandesgrösse in diesen Zeitpunkten $N_1, N_2, \ldots, N_k$, d.h. im Zeitintervall $t_{j-1} \leqq t < t_j$ bleibt die Grösse des Bestandes konstant und gleich N_{j-1}. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der zufälligen Variablen $t_j - t_{j-1}$ beträgt

$$N_{j-1}(\lambda+\mu)\, e^{-N_{j-1}(\lambda+\mu)(t_j-t_{j-1})} \; .$$

Wenn ein Ereignis im Zeitpunkt t_j eintritt, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Zuganges bzw. eines Ausscheidefalles durch

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \text{ bzw. } \frac{\mu}{\lambda+\mu} \text{ darstellbar.}$$

Sei $X_j (j=1, \ldots, k)$ eine alternative Zufallsgrösse mit $X_j = 1$, wenn im Zeitpunkt t_j ein Zugang eintritt und $X_j = -1$, wenn ein Ausscheidefall stattfindet. Wenn bis zum Zeitpunkt t genau k Ereignisse eintreffen, bekommt man die folgende Likelihood-Funktion:

$$\prod_{j=1}^{k} e^{-\left(N_0+\sum_{i=1}^{j-1} X_i\right)(\lambda+\mu)(t_j-t_{j-1})} \cdot \left(N_0+\sum_{i=1}^{j-1} X_i\right) \cdot$$

$$\lambda^{\frac{1+X_j}{2}} \cdot \mu^{\frac{1-X_j}{2}} \cdot e^{-(t-t_k)(\lambda+\mu)\left(N_0+\sum_{i=1}^{k} X_i\right)}, \tag{11}$$

wobei N_0 die Grösse des Bestandes zur Zeit Null ist, und folglich für die Log-Likelihood-Funktion

$$L = -(\lambda+\mu)\,\alpha_t + \sum_{j=1}^{k} \log\left(N_0 + \sum_{i=1}^{j-1} X_i\right) + Z \log \lambda + A \log \mu,$$

$$\text{wobei } Z = \sum_{j=1}^{k} \frac{1+X_j}{2}, \quad A = \sum_{j=1}^{k} \frac{1-X_j}{2} \tag{12}$$

$$\alpha_t = \sum_{j=1}^{k} \left(N_0 + \sum_{i=1}^{j-1} X_i\right)(t_j - t_{j-1}) + \left(N_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i\right)(t - t_k)$$

$$= \int_0^t N_u \, du.$$

N_u ist die Bestandesgrösse im Zeitpunkt u, Z die Anzahl der Zugänge bis zum Zeitpunkt t und A die Anzahl der bis zu diesem Zeitpunkt Ausgeschiedenen. Die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion ergibt:

$$\bar{\lambda} = \frac{Z}{\alpha_t} \quad \text{und} \quad \bar{\mu} = \frac{A}{\alpha_t}.$$

Da nach (12) $Z + A = k$ und $Z - A = \sum_{i=1}^{k} X_i = N_t - N_0$, folgt sofort

$$Z = \frac{1}{2}\left[k + (N_t - N_0)\right]; \qquad A = \frac{1}{2}\left[k - (N_t - N_0)\right]$$

Aus (8) ergibt sich

$$E\left[k + (N_t - N_0)\right] = k - N_0\left[1 - e^{(\lambda-\mu)t}\right]$$

$$E\left(\int_0^t N_u\, du\right) = \frac{N_0}{\lambda-\mu}\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right).$$

Bezeichnet man mit $\overline{\lambda-\mu}$ die Schätzfunktion für $\lambda-\mu$:

$$\overline{\lambda-\mu} = \frac{Z-A}{\int_0^t N_u\, du} = \frac{N_t - N_0}{\int_0^t N_u\, du}, \tag{13}$$

so ist $$E(N_t - N_0) = N_0\, e^{(\lambda-\mu)t} - N_0 = N_0(\beta_t - 1)$$

$$\beta_t = e^{(\lambda-\mu)t}$$

$$E\left(\int_0^t N_u\, du\right) = \frac{N_0(\beta_t - 1)}{\lambda-\mu} \quad \text{gemäss Gleichung (8)}$$

$$E\left[\frac{1}{N_0}(N_t - N_0)\right] = \beta_t - 1, \quad E\left(\frac{1}{N_0}\int_0^t N_u\, du\right) = \frac{\beta_t - 1}{\lambda-\mu}$$

und gemäss Gleichung (10)

$$\operatorname{Var}\left[\frac{1}{N_0}(N_t - N_0)\right] = \frac{1}{N_0}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\,\beta_t(\beta_t - 1) \tag{14}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{falls} \quad N_0 \longrightarrow \infty.$$

Ebenso gilt

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{N_0}\int_0^t N_u\, du\right) \longrightarrow 0 \text{ falls } N_0 \longrightarrow \infty. \tag{15}$$

Somit streben bei festem t $\frac{1}{N_0}(N_t - N_0)$ in Wahrscheinlichkeit gegen

$$\beta_t - 1 \text{ und } \frac{1}{N_0}\int_0^t N_u\, du \text{ gegen } \frac{\beta_t - 1}{\lambda-\mu}.$$

Wegen (14) und (15) ist es einfach zu beweisen, dass

$$\lim_{N_0 \to \infty} E \left[\frac{\frac{1}{N_0}(N_t - N_0)}{\frac{1}{N_0}\int_0^t N_u\,du} \right] = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{E\left[\frac{1}{N_0}(N_t - N_0)\right]}{E\left(\frac{1}{N_0}\int_0^t N_u\,du\right)} = \lambda - \mu$$

$$\text{und } \lim_{N_0 \to \infty} \operatorname{Var} \left[\frac{\frac{1}{N_0}(N_t - N_0)}{\frac{1}{N_0}\int_0^t N_u\,du} \right] = 0 \text{ bei festem } t.$$

Daraus folgt, dass $\dfrac{N_t - N_0}{\int_0^t N_u\,du}$ eine konsistente Schätzfunktion für $\lambda - \mu$ ist, wenn die Grösse des Bestandes im Zeitpunkt 0 gegen unendlich strebt. (Der Beweis wird im diskreten Fall vollständig durchgeführt.)

ii. Man geht jetzt anders vor und betrachtet das Verhalten der

$$\text{Schätzfunktion } \bar{\alpha}_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} N_j}{\sum_{j=0}^{k-1} N_j} \text{ für } \alpha = e^{(\lambda-\mu)\tau},$$

unter der Annahme, dass die Grösse des Bestandes zu den Zeitpunkten $\tau, 2\tau, \ldots, k\tau$ bekannt ist. Wenn eine Schätzfunktion von $e^{(\lambda-\mu)t}$ vorhanden ist, lässt sich die Bestandesgrösse N_t zum Zeitpunkt t aus der Formel $N_t = N_0\, e^{(\lambda-\mu)t}$ bestimmen, wobei N_0 die Grösse zur Zeit Null ist.

Behauptung: Die Schätzfunktion

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} N_j}{\sum_{j=0}^{k-1} N_j} \text{ ist für } \alpha = e^{(\lambda-\mu)\tau} \text{ konsistent,}$$

wenn N_0 gegen unendlich strebt.

Aus (8), (9), (10) folgt

$$E\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right) = \alpha\,\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}, \quad E\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right) = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$$

und

$$\operatorname{Var}(N_j) = N_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} \alpha^j (\alpha^j - 1),$$

$$\operatorname{Cov}(N_i, N_j) = N_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} \alpha^j (\alpha^i - 1).$$

Schliesslich gilt

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right) = \frac{1}{N_0^2}\left[\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Var}(N_j) + 2\sum_{\substack{i,\,j\\ i<j}} \operatorname{cov}(N_i, N_j)\right]$$

$$= \frac{1}{N_0^2}\left[\sum_{j=1}^{k} N_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} \alpha^j(\alpha^j-1) + 2\sum_{\substack{i,\,j\\ i<j}} N_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\alpha^j(\alpha^i-1)\right]$$

$$= \frac{\lambda+\mu}{N_0(\lambda-\mu)}\left[\sum_{j=1}^{k} \alpha^j(\alpha^j-1) + 2\sum_{\substack{i,\,j\\ i<j}} \alpha^j(\alpha^i-1)\right] \tag{16}$$

Wenn k fest ist, strebt

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right)$$

gegen Null, falls $N_0 \longrightarrow \infty$. Analog kann man beweisen, dass

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right) \longrightarrow 0, \text{ falls } N_0 \longrightarrow \infty.$$

Für den Erwartungswert von $\bar{\alpha}_k$ lässt sich nun zeigen

$$E\left\{\frac{\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\} = \frac{E\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right)}{E\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)}$$

$$+ \operatorname{Cov}\left\{\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\,,\ \frac{1}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\}.$$

Wegen (16) streben $\operatorname{Var}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right)$ und $\operatorname{Var}\left\{\frac{1}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\}$ gegen Null, falls $N_0 \longrightarrow \infty$.

Aus der bekannten Ungleichung $\mu_{20}\,\mu_{02} \geqq \mu_{11}^2$, wobei μ_{20}, μ_{02} die Varianz der zufälligen Variablen ξ bzw. ζ und $\mu_{11} = \mathrm{Cov}\,(\xi, \zeta)$, folgt:

$$\mathrm{Cov}\left\{\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\,,\ \frac{1}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\} \to 0 \text{ falls } N_0 \to \infty\,.$$

Damit ist folgendes bewiesen:

$$\lim_{N_0 \to \infty} E\left\{\frac{\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\} = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{E\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right)}{E\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)} = \alpha$$

für festes k. Es bleibt zu zeigen, dass Var $(\bar{\alpha}_k)$ gegen Null strebt, falls $N_0 \to \infty$

$$\mathrm{Var}\left\{\frac{\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\} = \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right)}{m_1^2} + \frac{m_1^2\,\mathrm{Var}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)}{m_2^4}$$

$$- \frac{2m_1\,\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\,,\ \frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)}{m_2^3}$$

m_1, m_2 sind die Mittelwerte von $\left(\sum_{j=1}^{k} N_j\right)$ bzw. $\left(\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)$.

Wegen (16) streben Var $\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\right)$, Var $\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)$ und folglich Cov $\left(\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j\,,\ \frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right)$ gegen Null, falls $N_0 \to \infty$ und damit

$$\lim_{N_0 \to \infty} \mathrm{Var}\left\{\frac{\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{k} N_j}{\frac{1}{N_0}\sum_{j=0}^{k-1} N_j}\right\} = 0\,,$$

wenn k fest ist. Daraus folgt die Behauptung.

3. Praktische Beispiele

i. Die Genauigkeit der Schätzung

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i}{\sum_{i=0}^{k-1} N_i} \quad \text{für } e^{(\lambda-\mu)\tau}$$

ist im allgemeinen um so grösser, je grösser der Versicherungsbestand. Im Anhang ist eine Tabelle wiedergegeben, die für Einzel-Kapital-Versicherungen in der Schweiz die Bestandesentwicklung in äquidistanten Zeitpunkten vom 1. 1. 1949 bis 1. 1. 1964 enthält[1]). Hier ist unter N_0 die Bestandesgrösse am Anfang der Beobachtungen (1. 1. 1949) zu verstehen.

Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

$\sum_{i=1}^{k} N_i$	$\sum_{i=0}^{k-1} N_i$	$\sum_{i=1}^{k} N_i \Big/ \sum_{i=0}^{k-1} N_i$
85 861 163	85 751 079	1,0013

Für die mittlere Grösse des Bestandes im Zeitpunkt t erhält man

$$N_t = N_0\,(1{,}0013)^{t/\tau}.$$

Es wird nun der geschätzte Wert von $e^{(\lambda-\mu)\tau}$ verwendet, um die Grösse des Bestandes nach Ablauf der Zeit t zu schätzen. Die Anzahl der zu erwartenden Policen wird zuerst am 1. 7. 1964, 1. 1. 1965, 1. 7. 1965, 1. 1. 1966 und 1. 7. 1966 geschätzt und mit der tatsächlich erhaltenen Anzahl verglichen. Anschliessend wird eine Prognose für den Bestand am Ende der folgenden drei Halbjahre gegeben. Die Anzahl der zu erwartenden Policen am 1. 7. 1964, 1. 1. 1965, 1. 7. 1965, 1. 1. 1966 und 1. 7. 1966 müsste laut Schätzung (542 103), (546 345), (550 621), (554 930) und (559 272) betragen. Die beobachteten Werte sind (541 884), (546 309), (550 226), (553 191) und (555 009).

Zur Vornahme einer vertrauenerweckenden Prognose ist es von besonderem Vorteil, die letzten Beobachtungen ebenfalls mit einzubeziehen, d.h. für die folgende Zeit wird die Schätzung der Parameter-

[1]) Die Zahlen wurden der Bestandesbewegung einer schweizerischen Versicherungsgesellschaft entnommen.

funktion $e^{(\lambda-\mu)\tau}$ auf Grund der erweiterten Beobachtungen bis 1. 7. 1966 gerechnet.

Einfachheitshalber wurde dabei nur auf die halbjährlichen Messungen abgestellt. Damit ergeben sich folgende mutmasslichen Bestandeszahlen:

am	1. 1. 1967	(559 166)
am	1. 7. 1967	(563 354)
am	1. 1. 1968	(567 574).

ii. Es wurde bereits bewiesen, dass

$$\frac{Z-A}{\int_0^t N_u \, du}$$

als Schätzung der Parameterfunktion $\lambda-\mu$ angenommen werden kann. Wenn N_t, N_0 die Bestandesgrösse im Zeitpunkt t bzw. im Zeitpunkt 0 sind, lässt sich die Grösse $Z-A$ in der Form $N_t - N_0$ darstellen. Bezeichnet man mit $\overline{\lambda-\mu}$ die Schätzung von $\lambda-\mu$, dann folgt

$$\overline{\lambda-\mu} = \frac{N_t - N_0}{\int_0^t N_u \, du} .$$

Nun ist

$$\int_0^t N_u \, du \approx \frac{1}{2} N_0 + \sum_{i=1}^{k-1} N_i + \frac{1}{2} N_k$$

$$= 85\,806\,121$$

$$N_t - N_0 = 110\,084$$

$$\overline{\lambda-\mu} = \frac{110\,084}{85\,806\,121} = 0{,}00128.$$

Die Schätzung der Parameterfunktion $e^{(\lambda-\mu)\tau}$ wird $(1{,}0013)^\tau$. Man überzeugt sich sofort, dass die Schätzungen von $e^{(\lambda-\mu)\tau}$ gleich sind, wenn die Bestandesgrösse in äquidistanten Zeitpunkten oder während eines Intervalls der Länge t beobachtet wird.

Literaturverzeichnis

Darwin, J.H.: The behaviour of an estimator for a simple birth and death process, Biometrika, 43 (1956).

Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, Wiley and Sons, New York (1964).

Kendall, D.G.: On the generalised birth and death process, Ann. Math. Stat., 19(1949).

Khalil, M.: Über die Entwicklung von Versicherungsbeständen und die statistische Schätzung der auftretenden Parameter, Diss. an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich (1966).

Schmetterer, L.: Ein mathematisches Modell für die zeitliche Änderung eines Bestandes und die statistische Schätzung der auftretenden Parameter, Mitt. XVI. int. Kongr. Vers.-Math., Brüssel (1960).

Anhang

Einzel-Kapital-Versicherungen, Schweiz

Bewegung des Versicherungsbestandes (1. 1. 1949–1. 1. 1964)

(Zahlen aus der Bestandesbewegung einer schweizerischen Versicherungsgesellschaft)

1. 1. 49	427 810	1. 1. 51	434 292	1. 1. 53	448 588	1. 1. 55	463 956
1. 2.	428 174	1. 2.	434 728	1. 2.	448 947	1. 2.	464 549
1. 3.	428 767	1. 3.	435 264	1. 3.	449 600	1. 3.	465 426
1. 4.	428 885	1. 4.	435 863	1. 4.	450 198	1. 4.	466 055
1. 5.	429 106	1. 5.	436 478	1. 5.	451 003	1. 5.	466 611
1. 6.	429 506	1. 6.	437 090	1. 6.	451 708	1. 6.	467 412
1. 7.	429 771	1. 7.	438 025	1. 7.	452 773	1. 7.	468 478
1. 8.	429 742	1. 8.	438 389	1. 8.	453 227	1. 8.	468 888
1. 9.	429 684	1. 9.	438 519	1. 9.	453 376	1. 9.	469 111
1. 10.	429 701	1. 10.	439 040	1. 10.	454 023	1. 10.	469 727
1. 11.	429 890	1. 11.	439 664	1. 11.	454 656	1. 11.	470 363
1. 12. 49	430 175	1. 12. 51	440 339	1. 12. 53	455 437	1. 12. 55	471 197

1. 1. 50	430 318	1. 1. 52	441 146	1. 1. 54	456 241	1. 1. 56	472 192
1. 2.	430 534	1. 2.	441 701	1. 2.	456 755	1. 2.	472 822
1. 3.	431 053	1. 3.	442 313	1. 3.	457 525	1. 3.	473 491
1. 4.	431 338	1. 4.	442 852	1. 4.	458 100	1. 4.	473 974
1. 5.	431 762	1. 5.	443 439	1. 5.	458 693	1. 5.	474 323
1. 6.	432 298	1. 6.	444 287	1. 6.	459 480	1. 6.	475 105
1. 7.	432 808	1. 7.	445 106	1. 7.	460 345	1. 7.	475 994
1. 8.	432 911	1. 8.	445 471	1. 8.	460 687	1. 8.	476 486
1. 9.	432 790	1. 9.	445 639	1. 9.	460 896	1. 9.	476 707
1. 10.	433 103	1. 10.	446 267	1. 10.	461 330	1. 10.	477 281
1. 11.	433 475	1. 11.	447 013	1. 11.	462 137	1. 11.	477 976
1. 12. 50	433 887	1. 12. 52	447 740	1. 12. 54	462 960	1. 12. 56	478 649

1. 1. 57	479 529	1. 1. 59	493 510	1. 1. 61	510 635	1. 1. 63	529 470
1. 2.	479 863	1. 2.	493 901	1. 2.	511 122	1. 2.	529 765
1. 3.	480 620	1. 3.	494 581	1. 3.	512 186	1. 3.	530 253
1. 4.	481 253	1. 4.	495 367	1. 4.	512 927	1. 4.	530 795
1. 5.	482 061	1. 5.	495 930	1. 5.	513 753	1. 5.	531 613
1. 6.	482 875	1. 6.	496 618	1. 6.	514 743	1. 6.	532 560
1. 7.	483 944	1. 7.	497 700	1. 7.	515 866	1. 7.	533 421
1. 8.	484 408	1. 8.	498 211	1. 8.	516 410	1. 8.	534 368
1. 9.	484 529	1. 9.	498 300	1. 9.	516 369	1. 9.	534 408
1. 10.	485 197	1. 10.	498 835	1. 10.	517 103	1. 10.	535 049
1. 11.	485 790	1. 11.	499 600	1. 11.	517 900	1. 11.	535 810
1. 12. 57	486 509	1. 12. 59	500 543	1. 12. 61	518 930	1. 12. 63	536 217

1. 1. 58	487 422	1. 1. 60	501 441	1. 1. 62	519 680	1. 1. 64	537 894
1. 2.	487 838	1. 2.	501 724	1. 2.	520 019		
1. 3.	488 586	1. 3.	502 454	1. 3.	521 008		
1. 4.	489 280	1. 4.	503 301	1. 4.	523 558		
1. 5.	489 717	1. 5.	503 970	1. 5.	524 330		
1. 6.	490 378	1. 6.	504 921	1. 6.	525 387		
1. 7.	491 227	1. 7.	506 286	1. 7.	526 036		
1. 8.	491 465	1. 8.	507 012	1. 8.	526 178		
1. 9.	491 323	1. 9.	507 238	1. 9.	526 562		
1. 10.	491 725	1. 10.	507 825	1. 10.	527 289		
1. 11.	492 276	1. 11.	508 616	1. 11.	528 231		
1. 12. 58	492 898	1. 12. 60	509 683	1. 12. 62	529 246		

Summary

For the investigation of the development of an insured population, the author uses a mathematical model of general nature. A numerical example explains the procedure.

Résumé

Afin de suivre le développement d'une population assurée, l'auteur étudie un modèle théorique général; un exemple numérique illustre le procédé.

Riassunto

Per seguire lo sviluppo di una popolazione assicurata, l'autore studia un modello teorico generale ed illustra il procedimento con un esempio numerico.