Les états stationnaires périodiques

Autor(en): **Hort, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **67 (1967)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966953

Les états stationnaires périodiques

Par *Michel Hort*, Yverdon

Résumé

L'auteur définit l'état stationnaire périodique d'un ensemble renouvelé et cherche sous quelles conditions un tel état se présente. La démonstration est entreprise par la méthode discontinue. Un exemple numérique illustre l'exposé.

Considérons un ensemble renouvelé de N personnes[1]. A l'instant t, l'ensemble compte $n(t; x+k)$ personnes d'âge $x+k$ $(0 \leqq k \leqq m)$. Le renouvellement du groupe est soumis aux règles suivantes:

1. Le taux de sortie des personnes d'âge $x+k$ est q_{x+k} avec:
$$0 \leqq q_{x+k} < 1 \quad \text{pour } 0 \leqq k < m,$$
$$q_{x+k} = 1 \quad \text{pour } k = m.$$
2. Toutes les sorties ont lieu à la fin d'une unité de temps; les personnes sorties sont immédiatement remplacées par des nouveaux venus, tous d'âge x.
3. $x+k$ et t sont exprimés à l'aide de la même unité de temps (année, mois, semaine ...) et, en raison de 2. ci-dessus, ce sont des nombres entiers.

On cherche quelles conditions doivent être remplies pour que l'ensemble soit dans un état stationnaire périodique de période p, soit pour que l'on ait, pour tout t et pour tout k:

$$n(t+p; x+k) = n(t; x+k).$$

---

[1]) Parler de «personnes» ne sert qu'à fixer les idées; la démonstration qui suit s'applique à tout ensemble renouvelé pour lequel on peut connaître la durée k d'appartenance des éléments.

Nous entreprendrons la démonstration dans le cas particulier où p est un sous-multiple de $m+1$ et nous poserons, pour fixer les idées:

$$p = 3, \qquad m = 8, \qquad m+1 = 9 = 3p.$$

Introduisons la notation suivante:

$${}_ip_x = (1-q_x)(1-q_{x+1})\ldots(1-q_{x+i-1}).$$

On remarque que l'on a:

$$\begin{cases} n(t+1; x+1) = n(t; x)\, {}_1p_x \\ n(t+2; x+2) = n(t; x)\, {}_2p_x \\ n(t+3; x+3) = n(t; x)\, {}_3p_x = n(t; x+3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous pouvons écrire dès lors:

$$\mathrm{I}\begin{cases} n(t; x) = n \\ n(t; x+1) = n''\, {}_1p_x \\ n(t; x+2) = n'\, {}_2p_x \\ n(t; x+3) = n\, {}_3p_x \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases} n(t+1; x) = n' \\ n(t+1; x+1) = n\, {}_1p_x \\ n(t+1; x+2) = n''\, {}_2p_x \\ n(t+1; x+3) = n'\, {}_3p_x \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\mathrm{III}\begin{cases} n(t+2; x) = n'' \\ n(t+2; x+1) = n'\, {}_1p_x \\ n(t+2; x+2) = n\, {}_2p_x \\ n(t+2; x+3) = n''\, {}_3p_x \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \mathrm{IV}\begin{cases} n(t+3; x) = n \\ n(t+3; x+1) = n''\, {}_1p_x \\ n(t+3; x+2) = n'\, {}_2p_x \\ n(t+3; x+3) = n\, {}_3p_x \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Posons en outre:

$$a = 1 + {}_3p_x + {}_6p_x, \qquad b = {}_2p_x + {}_5p_x + {}_8p_x, \qquad c = {}_1p_x + {}_4p_x + {}_7p_x.$$

Ceci conduit aux relations suivantes, déduites de I, II et III:

$$\begin{cases} an + bn' + cn'' = N, \\ cn + an' + bn'' = N, \\ bn + cn' + an'' = N. \end{cases}$$

On reconnaît là un système de trois équations à trois inconnues: n, n' et n''.

Selon les *formules de Cramer*, la solution en est, pour $D \neq 0$:

$$n = \frac{D_1}{D} \qquad n' = \frac{D_2}{D} \qquad n'' = \frac{D_3}{D}$$

avec

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} N & b & c \\ N & a & b \\ N & c & a \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & N & c \\ c & N & b \\ b & N & a \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a & b & N \\ c & a & N \\ b & c & N \end{vmatrix}$$

Une discussion s'impose selon que:

1^er^ cas: $D \neq 0$.

2^e^ cas: $D = 0$.

1^er^ cas: On peut montrer par des permutations de lignes et de colonnes dans les déterminants que: $D_1 = D_2 = D_3$, d'où il résulte que $n = n' = n''$.

2^e^ cas: Comme il n'est pas possible que $a = b = c = 0$, D ne peut être nul que si $a = b = c$. Le système est alors doublement indéterminé. On peut choisir arbitrairement deux des trois inconnues, sous réserve que ces deux valeurs ne rendent pas la troisième négative, ce qui n'aurait pas de sens pour le problème traité.

Interprétation des résultats. Au premier cas ($D \neq 0$), correspond un état stationnaire au sens habituel du terme avec, pour tout k et pour tout t:

$$n(t+1\,;x+k) = n(t\,;x+k).$$

Nous excluons donc ce cas;

Nous devons alors rechercher à quelles conditions $a = b = c$, seule façon d'annuler D.

Or on a:

$$1 \geqq {}_1p_x,$$
$${}_3p_x \geqq {}_4p_x,$$
$${}_6p_x \geqq {}_7p_x,$$

et $\quad a = c\,, \quad$ soit $\quad 1 + {}_3p_x + {}_6p_x = {}_1p_x + {}_4p_x + {}_7p_x.$

Pour que ces conditions soient satisfaites, il faut que:

$$1 = {}_1p_x, \qquad {}_3p_x = {}_4p_x, \qquad {}_6p_x = {}_7p_x.$$

De même, on peut voir qu'il faut aussi que:

$${}_1p_x = {}_2p_x, \qquad {}_4p_x = {}_5p_x, \qquad {}_7p_x = {}_8p_x.$$

En regroupant ces résultats, on est conduit à:

$$1 = {}_1p_x = {}_2p_x, \qquad {}_3p_x = {}_4p_x = {}_5p_x, \qquad {}_6p_x = {}_7p_x = {}_8p_x.$$

soit:

$$V \left| \begin{array}{l} q_x \quad\; = q_{x+1} = 0, \\ q_{x+3} = q_{x+4} = 0, \\ q_{x+6} = q_{x+7} = 0. \end{array} \right.$$

Seuls donc q_{x+2} et q_{x+5} peuvent être $\neq 0$. Quant à q_{x+8}, il est égal à 1 par hypothèse.

* * *

On généralisera facilement pour tous les cas où p est un sous-multiple de $m+1$. On peut voir en outre que si cette condition n'est pas remplie, le problème est impossible, le déterminant D ne pouvant pas s'annuler.

Il reste à insister sur le fait que la condition trouvée est nécessaire mais non suffisante: en jouant sur la répartition par âge à l'instant t, on peut en effet obtenir des cas où:

$$n(t+p'; x+k) = n(t; x+k) \qquad\qquad p' < p$$

quand bien même les conditions données en V sont remplies. On parle alors d'un état pseudo-stationnaire.

* * *

Exemple numérique.

$$\begin{array}{llll} q_x \quad\; = q_{x+1} = 0, & & q_{x+2} = 0{,}1, \\ q_{x+3} = q_{x+4} = 0, & & q_{x+5} = 0{,}2, \\ q_{x+6} = q_{x+7} = 0, & & q_{x+8} = 1. \end{array}$$

Variante 1 $n = 100, \quad n' = 300, \quad n'' = 500$

$n(t; x+k)$

	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	....
x	100	300	500	100	....
$x+1$	500	100	300	500	
$x+2$	300	500	100	300	
$x+3$	90	270	450	90	....
$x+4$	450	90	270	450	
$x+5$	270	450	90	270	
$x+6$	72	216	360	72	....
$x+7$	360	72	216	360	
$x+8$	216	360	72	216	
	2 358	2 358	2 358	2 358	2 358

Variante 2 $n = n' = 100, \quad n'' = 700$

$n(t; x+k)$

	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	....
x	100	100	700	100	....
$x+1$	700	100	100	700	
$x+2$	100	700	100	100	
$x+3$	90	90	630	90	....
$x+4$	630	90	90	630	
$x+5$	90	630	90	90	
$x+6$	72	72	504	72	....
$x+7$	504	72	72	504	
$x+8$	72	504	72	72	
	2 358	2 358	2 358	2 358	2 358

Variante 3 $n = n' = n'' = 300$ (état pseudo-stationnaire)

	$n(t; x+k)$				
	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	....
x	300	300	300	300	....
$x+1$	300	300	300	300	
$x+2$	300	300	300	300	
$x+3$	270	270	270	270	....
$x+4$	270	270	270	270	
$x+5$	270	270	270	270	
$x+6$	216	216	216	216	....
$x+7$	216	216	216	216	
$x+8$	216	216	216	216	
	2 358	2 358	2 358	2 358	2 358

On démontre que si les conditions concernant la loi de sortie (cf. relations V) sont seules remplies – à l'exclusion donc des conditions sur la répartition par âge (cf. relations I, II, III et IV) – l'ensemble tend, pour t infiniment grand, vers un état stationnaire périodique, éventuellement vers un état pseudo-stationnaire.

Zusammenfassung

Der Verfasser definiert den stationären periodischen Zustand einer sich erneuernden Gesamtheit und untersucht die Bedingungen, unter welchen ein solcher Zustand eintreten kann. Dazu benützt er die diskontinuierliche Methode und unterstreicht seine Ergebnisse mit einem numerischen Beispiel.

Summary

The author describes the stationary periodical state of a set in reneval and surveys the conditions under which this state would appear. Demonstration is given through the discontinuity method. A numerical example gives an illustration.

Riassunto

L'autore definisce lo stato stazionario periodico d'un insieme rinnovato e cerca le condizioni sotto le quali un tale stato si presenta. La dimostrazione è data con il metodo discontinuo. Un esempio numerico illustra lo studio.