

Über die Produktdarstellung der totalen Verbleibswahrscheinlichkeit bei mehreren Ausscheideursachen

Autor(en): **Reichel, Georg**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **68 (1968)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966958>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über die Produktdarstellung der totalen Verbleibswahrscheinlichkeit bei mehreren Ausscheideursachen

von Georg Reichel, Göttingen

Zusammenfassung

Der Verfasser geht von der Voraussetzung aus, das Ausscheiden eines Objektes aus einem Kollektiv sei einzig durch den Zufall bedingt, und zeigt, dass es immer Ausscheidemodelle gibt, die eine Produktzerlegung der totalen Verbleibswahrscheinlichkeit ermöglichen.

1. Vorbemerkung

Die Frage, ob sich die totale Verbleibswahrscheinlichkeit beim Vorliegen mehrerer Ausscheidegründe als Produkt gewisser partieller Verbleibswahrscheinlichkeiten darstellen lässt, ist seit *Johannes Karup* in der Vergangenheit bis in die heutige Zeit Gegenstand vieler eingehender Untersuchungen gewesen. In der von *E. Masius* herausgegebenen «Rundschau der Versicherungen» der Jahre 1875 bis 1877 ist nach Bekanntwerden der von *Johannes Karup* erstmals eingehend dargestellten Theorie der «abhängigen» und «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten ein von bemerkenswerter Offenheit getragener Streit über die Berechtigung dieser Theorie, die in der oben genannten Frage gipfelt, entbrannt. Auch nach Anerkennung der Karupschen Gedankengänge sind gerade in den *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker* viele Untersuchungen diesem Thema gewidmet worden (man vergleiche hierzu z. B. die Literaturverzeichnisse in [1]¹⁾ und [2]).

Im wesentlichen drei Gründe haben den Verfasser veranlasst, die nachfolgenden Betrachtungen anzustellen:

¹⁾ Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit. Dabei bedeutet z. B. [6] (4.2) die Definition, Satz oder Formel (4.2) der Arbeit [6].

1. Die Theorie der «abhängigen» und der «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten oder – wie man sie auch oft nennt – die Theorie der Intensitäten ist, wie selten ein Gebiet der Versicherungsmathematik, mit Hypothesen versehen worden, wodurch es dem Leser schwerfällt, zu entscheiden, was Annahme und was zwingende Folge ist. Der Verfasser hat sich daher die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, wieweit man allein durch rein deduktive Schlüsse geführt wird. Dabei wird nur von einer einzigen Voraussetzung ausgegangen. Diese Voraussetzung besagt, dass ein Ausscheiden eines Objektes aus einem Kollektiv durch den Zufall bedingt ist und dass jedem Ausscheiden eindeutig genau eine Ausscheideursache zugeordnet ist. Diese Einschränkung ist nicht so schwerwiegend, wenn man eine Kombination von verschiedenen Ausscheidegründen, die gleichzeitig zu einem Verlassen des Kollektivs führen, als einen eigenen Ausscheidgrund ansieht.

Selbstverständlich wird man die Betrachtung von Hypothesen nicht ausschliessen können, zumal diese Untersuchung mit einem vielleicht überraschenden Resultat endet. Aber bewusst haben wir im Augenblick darauf verzichtet, die erhaltenen Ergebnisse anhand von Annahmen auszudeuten.

2. Nicht in allen Untersuchungen ist sorgfältig auf die Eigenschaften der vorkommenden Funktionen Rücksicht genommen worden. Wir werden deshalb vom einwandfrei definierten Begriff der Klasse der Versicherungsfunktionen ausgehen. Dabei wird sich die ausschlaggebende Rolle eventuell vorhandener Sprungstellen herausstellen. Hierzu möchten wir bemerken, dass zwar von einigen Autoren mitunter behauptet wird, dass die Verteilungsfunktion des Ausscheidens stetig, wenn nicht sogar differenzierbar angenommen werden kann. Diese Meinung führt dann leicht dazu, zu sagen, dass ein Unterschied zwischen kontinuierlicher und diskontinuierlicher Methode lediglich im «methodischen Vorgehen» liegt (vgl. hierzu [3], S.182). Es gibt nach Ansicht des Verfassers durchaus Ausscheidgründe, deren Verteilungsfunktionen unstetig sind. So sind z.B. Stornierungen von Versicherungsverträgen nur zu ganz bestimmten Zeitpunkten möglich. Dabei ist es unerheblich, zu welcher Zeit die Mitteilung einer Stornierung gemacht wird. Folglich muss man hier einen unstetigen Verlauf unterstellen. Dies trifft um so mehr zu, wenn wir etwa an Auslosungen denken, die selbstverständlich zu

mit Sprungstellen behafteten Verteilungsfunktionen führen. Man kann solche Ausscheideursachen ausschliessen: eine allgemeine Theorie darf unseres Erachtens aber an solchen Möglichkeiten nicht vorübergehen.

3. Die Theorie der «abhängigen» und «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten ist dann, wenn man in die Betrachtung der Hauptgesamtheit auch die der Nebengesamtheiten einschliesst und wenn man eine Wahrscheinlichkeitsansteckung ausschliesst, eine einfache Folge der Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie (man vergleiche hierzu etwa die zusammenfassende Darstellung von *H. Wyss* in [1]). Die Problematik besteht bei dieser Betrachtung im wesentlichen in der Ermittlung der «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten aus den «abhängigen» Wahrscheinlichkeiten und umgekehrt.

Nun führt aber ein Wechsel eines Objektes aus dem betrachteten Kollektiv (der Hauptgesamtheit) in eine Nebengesamtheit oftmals zu einer Änderung der restlichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Man denke etwa an die unterschiedliche Sterblichkeit von Aktiven und Invaliden. Ferner ist mitunter eine Beobachtung der Nebengesamtheiten aus mancherlei Gründen nicht möglich. So wird z. B. bereits eine Kapitalleistung nach eingetretener Invalidisierung die weitere Beobachtung der Invaliden erschweren, wenn nicht gar unmöglich machen.

Es gibt daher in der Praxis viele Fälle, bei denen man lediglich über die Beobachtung des gegebenen Kollektivs, d. h. der Hauptgesamtheit, verfügt.

Wir vertreten daher die Meinung, dass sich die Frage nach einer Produktdarstellung der totalen Verbleibenswahrscheinlichkeit in diesen Fällen neu stellt. Ferner glauben wir, dass die eine oder andere Streitfrage zu unserem Thema dadurch entstanden sein kann, dass die soeben geschilderte unterschiedliche Aufgabenstellung nicht immer streng voneinander getrennt wurde.

Die folgende Untersuchung hat den Zweck, festzustellen, ob man auch hier zu Produktdarstellungen gelangen kann und wo die Grenzen dieser Möglichkeiten liegen. Dabei wollen wir – im Sinne der unter Punkt 1 gemachten Ausführungen – für den Augenblick vermeiden auszudeuten, von welcher Art die zu Produktdarstellungen führenden Wahrscheinlichkeiten sind. Insbesondere gehört

hierzu z.B. auch die Frage, ob man diese Wahrscheinlichkeiten «unabhängig» nennen kann.

Die nachfolgenden Untersuchungen beginnen nach einer Betrachtung der Grundwahrscheinlichkeiten mit der Ableitung zweier Ungleichungen. Die in diesen Ungleichungen auftretenden Grössen interpretieren wir durch zwei extreme Ausscheidemodelle. Diese Ausführungen stellen eine Erweiterung der Gedankengänge von *J. Karup* [4] und *A. Loewy* [5] dar. Sie führen zum Beweis des Satzes von Karup-Loewy, dem wir eine bemerkenswerte Erweiterung beifügen können. Nach der Definition einer wesentlichen Sprungstelle der Verteilungsfunktion des Ausscheidens überhaupt widmen wir uns der Betrachtung der Verhältnisse an einer solchen Sprungstelle. Eine Zusammenfassung beschliesst die Untersuchung.

2. Die Grundwahrscheinlichkeiten

Wir betrachten ein Objekt, welches durch ein ihm aufgeprägtes Merkmal erkennen lässt, ob es einem ihm übergeordneten Kollektiv angehört. Zur Zeit $t = 0$ sei das Merkmal vorhanden.

Wir nehmen an, dass es m verschiedene Gründe gibt, weshalb das Objekt sein Merkmal verlieren kann, wodurch es aus dem Kollektiv ausscheidet. Jedoch kann der Verlust des Merkmals immer nur durch genau eine der m Ausscheideursachen bewirkt werden. Diese Voraussetzung bedeutet, dass, wenn ein Ausscheiden in der Praxis durch zwei Ursachen gleichzeitig bewirkt werden kann, dann diese beiden Ausscheidegründe – als Kombination gesehen – zur Bildung einer eigenen Ausscheideursache führen. Ist das Merkmal einmal verloren, kann es nicht wieder gewonnen werden.

Definieren wir die Ausscheidezeit η als unteren Grenzwert aller Zeitpunkte t , für welche das Objekt das genannte Merkmal nicht mehr besitzt, und unterstellen wir, dass die Ausscheidezeit η eine stochastische Variable ist, so kann ihr eine \mathbf{v} -Verteilungsfunktion (vgl. [6] (4.2))

$$F(t) = P(\eta \leq t) \tag{2.1}$$

mit

$$F(0) = 0 \tag{2.2}$$

zugeordnet werden.

Der Aufteilung des Ausscheidens überhaupt auf m verschiedene, sich gegenseitig ausschliessende Ausscheideursachen entspricht die Zerlegung der \mathfrak{v} -Verteilungsfunktion $F(t)$ in m Komponenten $F_i(t)$, für die gemäss [7] (3.5)

$$F(t) = \sum_{i=1}^m F_i(t) \quad (2.3)$$

und

$$F_i(0) = 0 \quad (2.4)$$

gilt. Die Komponenten sind ebenfalls nicht negative, rechtsstetige und nicht abnehmende Versicherungsfunktionen (vgl. Definition [6] (1.1)).

Für die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit $q(t, t + \tau)$ – d.h. für die bedingte Wahrscheinlichkeit, mit der das Objekt das Merkmal zur Zeit $t + \tau$ nicht mehr aufweist, obwohl es dieses Merkmal zur Zeit t noch besessen hat – gilt nach [7] (3.1)

$$q(t, t + \tau) = \frac{F(t + \tau) - F(t)}{1 - F(t)}, \quad (2.5)$$

für die totale Verbleibswahrscheinlichkeit nach [7] (3.2)

$$p(t, t + \tau) = \frac{1 - F(t + \tau)}{1 - F(t)}. \quad (2.6)$$

Bezeichnen wir mit $q_i(t, t + \tau)$ die i -te Ausscheidewahrscheinlichkeit, so gilt für sie mit [7] (3.6), (3.7)

$$q_i(t, t + \tau) = \frac{F_i(t + \tau) - F_i(t)}{1 - F(t)} \quad (2.7)$$

und

$$q(t, t + \tau) = \sum_{i=1}^m q_i(t, t + \tau). \quad (2.8)$$

3. Beweis einer Ungleichung

Es seien t_0 und t mit $t_0 < t$ und $F(t) < 1$ vorgegeben. Das Intervall $[t_0, t]$ werde durch eine feine Zerlegungsfolge

$$\mathfrak{z}[t_0, t] : t_0 < t_1 \dots < t_n = t$$

(vgl. Definition [6] (2.1)) eingeteilt.

Es lassen sich dann in einfacher Weise die folgenden vorbereitenden Ungleichungen verifizieren:

$$0 \leq \frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})} = q(t_{\lambda}, t_{\lambda+1}) < 1. \quad (3.1)$$

$$0 \leq \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})} = q_i(t_{\lambda}, t_{\lambda+1}) < 1. \quad (3.2)$$

$$0 \leq \frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda+1})}. \quad (3.3)$$

$$0 \leq \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda+1})}. \quad (3.4)$$

Ferner gilt für alle $x \geq 0$

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1 + x}. \quad (3.5)$$

Verbinden wir nun (3.1) mit (3.5), so folgt

$$1 - \frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})} = p(t_{\lambda}, t_{\lambda+1}) \leq e^{-\frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})}}.$$

Aus (3.3) und (3.5) erhalten wir mit (2.6)

$$e^{-\frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq \frac{1}{1 + \frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda+1})}} = \frac{1 - F(t_{\lambda+1})}{1 - F(t_{\lambda})} = p(t_{\lambda}, t_{\lambda+1}).$$

Also gilt

$$e^{-\frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq p(t_{\lambda}, t_{\lambda+1}) \leq e^{-\frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})}}. \quad (3.6)$$

Genau so folgen aus (3.2) und (3.4) in Verbindung mit (3.5) die beiden Ungleichungen

$$1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})} \leq e^{-\frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_{\lambda})}{1 - F(t_{\lambda})}}$$

und

$$e^{-\frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}}.$$

Betrachtet man die Differenz zwischen der linken Seite der ersten Ungleichung und der rechten Seite der zweiten Ungleichung, so stellt man leicht fest, dass sich diese Ungleichungen zu der Ungleichung

$$\begin{aligned} e^{-\frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} &\leq \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq 1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \\ &\leq e^{-\frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

verbinden lassen.

Nunmehr bilden wir die Produkte der Ungleichungen (3.6) und (3.7) über alle λ . Machen wir Gebrauch von der Definition [6] (2.5) der links- bzw. rechtsseitigen Stieltjes-Schärfischen Summen, so erhalten wir mit [7] (3.3) die neuen Ungleichungen

$$e^{-\overset{+}{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right)} \leq p(t_0, t) \leq e^{-\bar{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right)} \quad (3.8)$$

und

$$\begin{aligned} e^{-\overset{+}{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F_i\right)} &\leq \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}\right) \\ &\leq e^{-\bar{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F_i\right)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Mit

$$\overset{+}{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right) = \sum_{i=1}^m \overset{+}{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F_i\right)$$

und

$$\bar{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right) = \sum_{i=1}^m \bar{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F_i\right)$$

und mit Hilfe der Abschätzung

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{1+a_i} \leq \frac{1}{1+\sum_{i=1}^m a_i} \quad \text{für } a_i \geq 0$$

sowie der nach [8], S.322 für $|a_i| < 1$ geltenden Abschätzung

$$\prod_{i=1}^m (1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^m |a_i|$$

ergibt sich auf leichte Weise aus den Ungleichungen (3.9) durch Produktbildung über alle i

$$\begin{aligned} e^{-\bar{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right)} &\leq \prod_{i=1}^m \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq p(t_0, t) \\ &\leq \prod_{i=1}^m \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}\right) \leq e^{-\bar{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right)} \quad (3.10) \end{aligned}$$

Wir lassen jetzt in den Ungleichungen (3.9) und 3.10) n gegen Unendlich streben. Da mit $F(t)$ nach [6] (1.3) auch $\frac{1}{1-F(t)}$ eine rechtsstetige Versicherungsfunktion ist, sind die Funktionen $F(t)$, $\frac{1}{1-F(t)}$ und $F_i(t)$ gleichsinnig stetig (vgl. Definition [6] (1.2)). Nach [6] (2.18) existieren dann die Stieltjes-Schärfischen Integrale, und es gilt

$$\tilde{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{i_0}^{(\sim)t} \frac{1}{1-F(\tau)} dF(\tau)$$

und

$$\tilde{S}_{3n}\left(\frac{1}{1-F}, F_i\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{i_0}^{(\sim)t} \frac{1}{1-F(\tau)} dF_i(\tau).$$

Betrachten wir die unendlichen Produkte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \right),$$

so haben diese positive Glieder. Nach [9], S.285 konvergieren solche Produkte genau dann, wenn die Summen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{+}{S} \mathfrak{z}_n \left(\frac{1}{1 - F}, F_i \right)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{-}{S} \mathfrak{z}_n \left(\frac{1}{1 - F}, F_i \right)$$

konvergieren. Wegen der gleichsinnigen Stetigkeit der Versicherungsfunktionen $\frac{1}{1 - F}$ und F_i ist dies aber der Fall.

Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Satz: (3.11)

Die totale Verbleibswahrscheinlichkeit $p(t_0, t)$, die \mathbf{v} -Verteilungsfunktion $F(\tau)$ und ihre Komponenten $F_i(\tau)$ ($i = 1, \dots, m$) erfüllen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} e^{-\int_{t_0}^{(+)} \frac{dF_i(\tau)}{1 - F(\tau)}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \right) \leq e^{-\int_{t_0}^{(-)} \frac{dF_i(\tau)}{1 - F(\tau)}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$i = 1, \dots, m$$

und

$$\begin{aligned}
 e^{-\int_{t_0}^{(+)} t \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}} &\leq \prod_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \leq p(t_0, t) \\
 &\leq \prod_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \right) \leq e^{-\int_{t_0}^{(-)} t \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Bevor wir die Ungleichungen (3.12) und (3.13) auswerten, wollen wir zunächst die in diesen Ungleichungen auftretenden unendlichen Produkte interpretieren.

4. Betrachtung zweier Ausscheidemodelle

In der Theorie der zusammengesetzten Ausscheideordnungen hat man des öfteren (vgl. [4], S.440; [5], S.215) einfache Ausscheideordnungen, die nur einen Grund des Ausscheidens kennen, dadurch entwickelt, dass man Abgänge, die wegen der restlichen $m - 1$ Ausscheidursachen erfolgen, dem Kollektiv wieder hinzugefügt hat. Wir betrachten hierzu zwei extreme Modelle:

Modell I: (4.1)

Die in einem Teilintervall $[t_\lambda, t_{\lambda+1}]$ ausscheidenden Objekte werden, sofern das Ausscheiden durch den Grund k ($k = 1, \dots, m; i \neq k$) erfolgt, dem Kollektiv am Anfang des Teilintervalls wieder hinzugefügt und erneut dem Ausscheidprozess unterworfen. Dieser Prozess wird iteriert. Der Grenzwert der so entstehenden Ausscheideordnung wird mit $l_i^I(t)$ bezeichnet.

Modell II: (4.2)

Die in einem Teilintervall $[t_\lambda, t_{\lambda+1}]$ ausscheidenden Objekte werden, sofern das Ausscheiden durch den Grund k ($k = 1, \dots, m; i \neq k$) erfolgt, dem Kollektiv am Ende des Teilintervalls wieder hinzugefügt. Der Grenzwert der so entstehenden Ausscheideordnung wird mit $l_i^{II}(t)$ bezeichnet.

Wir leiten nun die Ausscheideordnungen $1_i^I(t)$ und $1_i^{II}(t)$ ab, indem wir die Verbleibswahrscheinlichkeiten

$$p_i^I(t_0, t) = \frac{l_i^I(t)}{l_i^I(t_0)} \quad \text{bzw.} \quad p_i^{II}(t_0, t) = \frac{l_i^{II}(t)}{l_i^{II}(t_0)} \quad (4.3)$$

bestimmen. Wir betrachten das Teilintervall $[t_\lambda, t_{\lambda+1}]$, an dessen Beginn $\bar{l}_i^I(t_\lambda)$ bzw. $\bar{l}_i^{II}(t_\lambda)$ Objekte dem Kollektiv angehören mögen. Im Intervall werden wegen aller m Ausscheideursachen

$$\bar{l}_i^I(t_\lambda) \frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} = \bar{l}_i^I(t_{\lambda+1}) q(t_\lambda, t_{\lambda+1})$$

bzw.

$$\bar{l}_i^{II}(t_\lambda) \frac{F(t_{\lambda+1}) - F(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} = \bar{l}_i^{II}(t_{\lambda+1}) q(t_\lambda, t_{\lambda+1})$$

Objekte ausscheiden. Diese verteilen sich anzahlmässig wie folgt:

Ausscheidegrund i :

$$\bar{l}_i^I(t_\lambda) \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{l}_i^{II}(t_\lambda) \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}$$

Ausscheidegründe k :

($k = 1, \dots, m; i \neq k$)

$$\bar{l}_i^I(t_\lambda) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{F_k(t_{\lambda+1}) - F_k(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{l}_i^{II}(t_\lambda) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{F_k(t_{\lambda+1}) - F_k(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}$$

Im Modell II wird die letztgenannte Gruppe derjenigen Objekte, die nicht wegen des i -ten Grundes ausgeschieden sind, dem Kollektiv wieder hinzugefügt. Es gilt demnach

$$\bar{p}_i^{II}(t_\lambda, t_{\lambda+1}) = \frac{\bar{l}_i^{II}(t_{\lambda+1})}{\bar{l}_i^{II}(t_\lambda)} = 1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}$$

Hieraus folgt

$$\bar{p}_i^{II}(t_0, t) = \prod_{\lambda=0}^{n-1} \bar{p}_i^{II}(t_\lambda, t_{\lambda+1}) = \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \right)$$

in Anhängigkeit von der Einteilung $\mathfrak{z}_n[t_0, t]$. Nach den Resultaten des vorangegangenen Abschnitts existiert der Grenzwert

$$p_i^{\text{II}}(t_0, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_i^{\text{II}}(t_0, t),$$

und es gilt

$$p_i^{\text{II}}(t_0, t) = \frac{l_i^{\text{II}}(t)}{l_i^{\text{II}}(t_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \right). \quad (4.4)$$

Im Modell I wird die Gruppe derjenigen Objekte, bei denen das Ausscheiden nicht durch den Grund i veranlasst ist, zur Zeit t_λ dem Kollektiv wieder hinzugefügt und wiederum dem Ausscheideprozess unterworfen.

Führt man diese Iterationsschritte durch, so ergibt sich offenbar

$$\bar{l}_i^{\text{I}}(t_{\lambda+1}) = \bar{l}_i^{\text{I}}(t_\lambda) - \bar{l}_i^{\text{I}}(t_\lambda) \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{F_k(t_{\lambda+1}) - F_k(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \right\}^\mu.$$

Wegen (3.1) konvergiert die unendliche Reihe, und es ergibt sich, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned} \bar{p}_i^{\text{I}}(t_\lambda, t_{\lambda+1}) &= \frac{\bar{l}_i^{\text{I}}(t_{\lambda+1})}{\bar{l}_i^{\text{I}}(t_\lambda)} = 1 - \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)} \cdot \frac{1}{1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{F_k(t_{\lambda+1}) - F_k(t_\lambda)}{1 - F(t_\lambda)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\bar{p}_i^{\text{I}}(t_0, t) = \prod_{\lambda=0}^{n-1} \bar{p}_i^{\text{I}}(t_\lambda, t_{\lambda+1}) = \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}}$$

in Abhängigkeit von der Einteilung $\mathfrak{z}_n[t_0, t]$. Nach den Resultaten des vorangegangenen Abschnitts existiert der Grenzwert

$$p_i^I(t_0, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_i^I(t_0, t),$$

und es gilt

$$p_i^I(t_0, t) = \frac{l_i^I(t)}{l_i^I(t_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda+1}) - F_i(t_\lambda)}{1 - F(t_{\lambda+1})}}. \quad (4.5)$$

Mit den Gleichungen (4.4) und (4.5) haben wir damit eine Modellinterpretation der in den Ungleichungen (3.12) und (3.13) vorkommenden unendlichen Produkte gefunden.

Die Ungleichungen des Satzes (3.11) können wir daher auch in der Gestalt

$$e^{-\int_{t_0}^{(+t)} \frac{dF_i(\tau)}{1-F(\tau)}} \leq p_i^I(t_0, t) \leq p_i^{II}(t_0, t) \leq e^{-\int_{t_0}^{(-t)} \frac{dF_i(\tau)}{1-F(\tau)}} \quad (4.6)$$

($i = 1, \dots, m$)

und

$$e^{-\int_{t_0}^{(+t)} \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}} \leq \prod_{i=1}^m p_i^I(t_0, t) \leq p(t_0, t) \leq \prod_{i=1}^m p_i^{II}(t_0, t) \leq e^{-\int_{t_0}^{(-t)} \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}} \quad (4.7)$$

schreiben.

5. Der Satz von Karup-Loewy und seine Grenzen

Wir werten nun die Ungleichungen (4.6) und (4.7) aus. Der Theorie der *Stieltjes-Schärfischen* Integrale können wir entnehmen, dass sich die Integrale

$$\int_{t_0}^{(+t)} f(\tau) dg(\tau) \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{(-t)} f(\tau) dg(\tau)$$

nur dann voneinander unterscheiden, wenn $f(\tau)$ und $g(\tau)$ im Intervall $[t_0, t]$ gemeinsame Sprungstellen aufweisen (vgl. [6] (2.23)).

Insbesondere gilt daher

$$\int_{t_0}^{(+t)} \frac{dF_i(\tau)}{1-F(\tau)} = \int_{t_0}^{(-t)} \frac{dF_i(\tau)}{1-F(\tau)} = \int_{t_0}^t \frac{dF_i(\tau)}{1-F(\tau)},$$

wenn $F_i(\tau)$ und $F(\tau)$ keine gemeinsame Sprungstelle haben. Da eine Sprungstelle von $F_i(\tau)$ offensichtlich auch eine Sprungstelle von $F(\tau)$ sein muss – dies braucht umgekehrt nicht der Fall zu sein –, folgt daraus, dass $F_i(\tau)$ in $t_0 \leq \tau \leq t$ stetig sein muss, wenn die beiden Integrale gleich sein sollen.

Ferner ist

$$\int_{t_0}^{(+t)} \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)} = \int_{t_0}^{(-t)} \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)} = \int_{t_0}^t \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}$$

nur dann erfüllt, wenn $F(\tau)$ im Intervall $[t_0, t]$ stetig ist.

Wir können daher formulieren:

Satz von Karup-Loewy: (5.1)

Ist $F_i(\tau)$ im Intervall $[t_0, t]$ stetig, so gilt

$$p_i^I(t_0, t) = p_i^{II}(t_0, t) = e^{-\int_{t_0}^t \frac{dF_i(\tau)}{1-F(\tau)}}. \quad (5.2)$$

Ist die v-Verteilungsfunktion $F(\tau)$ im Intervall $[t_0, t]$ stetig, so gilt

$$p(t_0, t) = \prod_{i=1}^m p_i^I(t_0, t) = \prod_{i=1}^m p_i^{II}(t_0, t) = e^{-\int_{t_0}^t \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}}. \quad (5.3)$$

Dieses Resultat, welches zuerst von *J. Karup* [4] und dann exakter von *A. Loewy* [5] nachgewiesen wurde, besagt, dass bei vorliegender Stetigkeit einer Komponente die dieser zugeordneten Verbleibswahrscheinlichkeiten der Modelle I und II übereinstimmen. Ferner lässt sich, wenn auch die v-Verteilungsfunktion selber stetig ist, die totale Verbleibswahrscheinlichkeit darstellen als Produkt der Verbleibswahrscheinlichkeiten des Modells I bzw. des Modells II.

Der Beweis des Satzes (5.1) wurde dadurch geführt, dass die Übereinstimmung der äusseren Glieder der Ungleichungen (4.6) und (4.7) untersucht wurde. Es kann durchaus sein, dass zwar die äusseren Un-

gleichungsglieder voneinander verschieden sind, dass aber die inneren Ungleichungsglieder von (4.6) und (4.7) identisch sind. Trifft dies zu, so haben wir eine Ausdehnung des Satzes von Karup-Loewy erhalten.

Wie beweisen hierzu den

Satz:

Ist im Intervall $[t_0, t]$ genau eine Komponente – und zwar $F_i(\tau)$ – unstetig, so gilt

$$p(t_0, t) = \prod_{\gamma=1}^m p_{\gamma}^I(t_0, t) = \prod_{\gamma=1}^m p_{\gamma}^{II}(t_0, t) . \quad (5.5)$$

Beweis:

Da in $[t_0, t]$ nach Voraussetzung die Komponenten $F_{\gamma}(t)$ für $\gamma = 1, \dots, m, \gamma \neq i$ stetig sind, gilt für sie nach (5.2)

$$p_{\gamma}^I(t_0, t) = p_{\gamma}^{II}(t_0, t) .$$

Wir betrachten nun $p_i^I(t_0, t)$ und $p_i^{II}(t_0, t)$. Offensichtlich kommt es nur auf die Betrachtung einer Sprungstelle an. Sei t_{λ} eine Sprungstelle von $F_i(t)$, so gilt für sie nach (4.5)

$$p_i^I(t_{\lambda}-0, t_{\lambda}+0) = \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_{\lambda}+0) - F_i(t_{\lambda}-0)}{1 - F(t_{\lambda}+0)}}$$

und nach (4.4)

$$p_i^{II}(t_{\lambda}-0, t_{\lambda}+0) = 1 - \frac{F_i(t_{\lambda}+0) - F_i(t_{\lambda}-0)}{1 - F(t_{\lambda}-0)} .$$

Da t_{λ} Sprungstelle nur einer Komponente ist, gilt

$$F(t_{\lambda}+0) - F(t_{\lambda}-0) = F_i(t_{\lambda}+0) - F_i(t_{\lambda}-0) .$$

Also ist

$$\begin{aligned} p_i^I(t_{\lambda}-0, t_{\lambda}+0) - p_i^{II}(t_{\lambda}-0, t_{\lambda}+0) &= \frac{1 - F(t_{\lambda}+0)}{1 - F(t_{\lambda}+0) + F(t_{\lambda}+0) - F(t_{\lambda}-0)} \\ - 1 + \frac{F(t_{\lambda}+0) - F(t_{\lambda}-0)}{1 - F(t_{\lambda}-0)} &= \frac{1 - F(t_{\lambda}+0) - 1 + F(t_{\lambda}-0) + F(t_{\lambda}+0) - F(t_{\lambda}-0)}{1 - F(t_{\lambda}-0)} \\ &= 0 , \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist. Wir können offenbar dem Satz (5.4) auch die folgende Formulierung geben:

Satz: (5.6)

Haben im Intervall $[t_0, t]$ die Komponenten $F_i(\tau)$ paarweise keine gemeinsamen Sprungstellen, so gilt

$$p_i^I(t_0, t) = p_i^{II}(t_0, t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

und

$$p(t_0, t) = \prod_{i=1}^m p_i^I(t_0, t) = \prod_{i=1}^m p_i^{II}(t_0, t).$$

Wir nehmen nun an, dass mindestens zwei Komponenten – etwa $F_s(\tau)$ und $F_r(\tau)$ – an der Stelle t_λ im Intervall $[t_0, t]$ eine gemeinsame Sprungstelle haben. Es gelte daher

$$F_s(t_\lambda + 0) - F_i(t_\lambda - 0) > 0 \quad (5.7)$$

und

$$F_r(t_\lambda + 0) - F_r(t_\lambda - 0) > 0. \quad (5.8)$$

Betrachten wir nur diese Sprungstelle, so gilt nach (2.6)

$$\begin{aligned} p(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) &= \frac{1 - F(t_\lambda + 0)}{1 - F(t_\lambda - 0)} = 1 - \frac{F(t_\lambda + 0) - F(t_\lambda - 0)}{1 - F(t_\lambda - 0)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{F(t_\lambda + 0) - F(t_\lambda - 0)}{1 - F(t_\lambda + 0)}} \end{aligned}$$

und nach (4.5)

$$p_i^I(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) = \frac{1}{1 + \frac{F_i(t_\lambda + 0) - F_i(t_\lambda - 0)}{1 - F(t_\lambda + 0)}}$$

sowie nach (4.4)

$$p_i^{II}(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) = 1 - \frac{F_i(t_\lambda + 0) - F_i(t_\lambda - 0)}{1 - F(t_\lambda - 0)}.$$

Es ist nun

$$\Delta^I = p(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) - \prod_{i=1}^m p_i^I(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) > 0,$$

wie man mit Hilfe von (5.7) und (5.8) erkennen kann. Entsprechend lässt sich auch

$$\Delta^{II} = \prod_{i=1}^m p_i^{II}(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) - p(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) > 0$$

nachweisen. Schliesslich kann man durch einfaches Nachrechnen bestätigen, dass

$$p_s^{II}(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) - p_s^I(t_\lambda - 0, t_\lambda + 0) > 0$$

ist. Wir haben damit das folgende Resultat erhalten:

Definition: (5.9)

Eine Sprungstelle t_λ der \mathbf{v} -Verteilungsfunktion $F(t)$ heisst wesentlich, wenn mindestens zwei Komponenten von $F(t)$ an der Stelle t_λ unstetig sind.

Satz: (5.10)

Liegt im Intervall $[t_0, t]$ eine wesentliche Sprungstelle der \mathbf{v} -Verteilungsfunktion $F(\tau)$, so gilt für die an dieser Sprungstelle unstetigen Komponenten $F_\gamma(\tau)$

$$p_\gamma^I(t_0, t) < p_\gamma^{II}(t_0, t) \quad (5.11)$$

und insgesamt

$$\prod_{i=1}^m p_i^I(t_0, t) < p(t_0, t) < \prod_{i=1}^m p_i^{II}(t_0, t). \quad (5.12)$$

Danach verliert bei vorhandenen wesentlichen Sprungstellen der Satz von Karup-Loewy, der Aussagen über eine Produktdarstellung der totalen Verbleibswahrscheinlichkeit mittels eines der Modelle I oder II macht, seine Gültigkeit.

6. Schlussbemerkungen

Der Satz (5.10) zeigte, dass an einer wesentlichen Sprungstelle weder das Modell I noch das Modell II zu einer Produktdarstellung der totalen Verbleibswahrscheinlichkeit führen. Dabei liefert das Modell I eine zu kleine, das Modell II eine zu grosse Verbleibswahrscheinlichkeit. Man kann sich daher die Frage stellen, ob an wesentlichen Sprungstellen eine Verknüpfung beider Modelle zu einer Produktdarstellung führen kann. Wählen wir eine multiplikative Verbindung beider Modelle, so lässt sich für den Fall, dass an der Sprungstelle genau zwei Komponenten unstetig sind, das folgende Resultat erzielen, welches hier ohne Beweis mitgeteilt werde:

Satz: (6.1)

An einer wesentlichen Sprungstelle t_λ , an der genau zwei Komponenten $F_{i_1}(t)$ und $F_{i_2}(t)$ unstetig sind, existiert eine Produktdarstellung

$$p(t_\lambda-0, t_\lambda+0) = \prod_{\gamma=1}^2 \bar{p}_{i_\gamma}(t_\lambda-0, t_\lambda+0) \cdot \prod_{\mu \neq i_1, i_2} p_\mu^I(t_\lambda-0, t_\lambda+0)$$

mit

$$\bar{p}_{i_\gamma}(t_\lambda-0, t_\lambda+0) = (p_{i_\gamma}^I(t_\lambda-0, t_\lambda+0))^{r_{i_\gamma}} (p_{i_\gamma}^{II}(t_\lambda-0, t_\lambda+0))^{1-r_{i_\gamma}} \quad (\gamma = 1, 2)$$
(6.2)

dann und nur dann, wenn

$$r_{i_1} + r_{i_2} = 1$$
(6.3)

mit $0 \leq r_{i_\gamma} \leq 1$ ($\gamma = 1, 2$) gilt.

Für mehr als zwei unstetige Komponenten kann man zeigen, dass es immer Darstellungen gibt, welche (6.2) erfüllen.

Die gewonnenen Resultate haben gezeigt, dass es immer Ausscheidemodelle gibt, die eine Produktzerlegung der totalen Verbleibswahrscheinlichkeit ermöglichen. Ist die Verteilungsfunktion $F(t)$ stetig, so fallen die Ausscheidemodelle I und II zusammen. *J. Karup* und *A. Loewy* haben die sich hieraus ergebenden Verbleibswahrscheinlichkeiten $p_i^I(t_0, t) = p_i^{II}(t_0, t)$ unabhängig genannt.

Das für wesentliche Sprungstellen nicht erwartete Resultat fordert zu weiteren Untersuchungen in der folgenden Richtung heraus:

Gibt man sich zwei zusammengesetzte Ausscheideordnungen vor, in denen jeweils ein Ausscheidegrund in beiden Ordnungen übereinstimmt, so sollte danach gefragt werden, ob oder unter welchen Bedingungen es Produktdarstellungen der betrachteten Art gibt, bei denen die diesem Ausscheidegrund zugeordneten Verbleibswahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

Diese Untersuchung dürfte meines Erachtens der Prüfstein dafür sein, ob es berechtigt ist, von unabhängigen (= partiellen, invarianten) Verbleibswahrscheinlichkeiten zu sprechen.

Literaturverzeichnis

- [1] *Wyss, H.*: Erwägungen über abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeiten. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 48 171–205 (1948).
- [2] *Romer, B.*: Abhängige und unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 62 61–80 (1962).
- [3] *Zwinggi, E.*: Versicherungsmathematik, 2. Aufl., Basel-Stuttgart 1958.
- [4] *Karup, J.*: Die neue Theorie der Invaliditäts- und Aktivitätsberechnung. Rundschau der Versicherungen 26 439–451 (1876); vgl. auch Nachdruck in Blätter der DGVM, S.313–325 (1967).
- [5] *Loewy, A.*: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. – Das Produktionsintegral und die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Blätter für Versicherungsmathematik 2 207–216 (1932).
- [6] *Rauhut, B.* und *Reichel, G.*: Die Theorie der Versicherungsfunktionen als Grundlage der Versicherungsmathematik. Blätter der DGVM VIII, S.103–133 (1966).
- [7] *Reichel, G.*: Die Erwartungswerte allgemeiner Versicherungsleistungen in der Mathematik der Lebensversicherung. Blätter der DGVM VIII, S.407–430 (1967).
- [8] *v. Mangold-Knopp*: Einführung in die höhere Mathematik, Band 1, 11. Aufl., Leipzig 1958.
- [9] *v. Mangold-Knopp*: Einführung in die höhere Mathematik, Band 2, 11. Aufl., Leipzig 1959.

Résumé

En partant de l'hypothèse que la sortie d'un objet d'un collectif soit provoquée uniquement par le hasard, l'auteur démontre qu'il existe toujours des modèles qui permettent une décomposition de la probabilité totale en un produit de facteurs constituants.

Summary

The author starts on the hypothesis that the withdrawal of an object from a totality is solely due to hazard, and demonstrates that models always exist which allow a decomposition of the total probability into factors of the particular causes.

Riassunto

L'autore parte dall'ipotesi che l'eliminazione di un oggetto da un collettivo sia dovuta unicamente al caso e dimostra che esistono sempre modelli di eliminazione che permettono una scomposizione in fattori della probabilità totale di permanenza.