Modell eines Bestandessystems

Autor(en): **Türler, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **69 (1969)**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551149

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Modell eines Bestandessystems

Von H. Türler, Bern

In unserer Umwelt betrachten wir Vorgänge, deren Gesetzmässigkeit wir nur beschreiben können, wenn wir von Sekundäreinflüssen absehen und den wesentlichen Komponenten des Prozesses zahlenmässige Angaben zuordnen. Damit ist der effektive Vorgang zum Modell geworden.

Es lassen sich viele Fälle angeben, wo der Zustand y eines solchen Systems zur Zeit t durch dessen Zustand y_0 zur Zeit $t = t_0$ eindeutig bestimmt ist. Als Beispiel sei etwa die funktionelle Bindung für die Amplitude einer schwingenden Feder erwähnt, die bei gegebenen Anfangsbedingungen immer genau eine Lösung liefert.

Anders ist es, wenn wir als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen verschiedene Versicherungsbestände (wie z.B. Aktive, Witwen, Invalide usw.) wählen, deren Umfang wir in der Gegenwart kennen und uns fragen, wie gross ihr Zustand nach einer gewissen Anzahl Jahren sei. Hier ist es nun nicht möglich, wie im obigen Beispiel, eine Funktion anzugeben, die uns genaue Resultate liefert, da die mannigfaltigsten Ursachen bestimmen können, ob jemand z.B. invalidiere oder nicht. Es treten zeitliche Schwankungen zufälliger Natur auf. Aus diesem Grund sollen sich die folgenden Ausführungen darauf beschränken, zeitabhängige Wahrscheinlichkeiten der gesuchten Bestandesumfänge anzugeben.

Allgemein sollen n Bestände als gegeben betrachtet werden, zwischen denen auf Grund stetiger Übergangsintensitäten in der zeitlichen Folge Übergänge stattfinden. Betrachtet werden N Personen, die sich gemäss einer Anfangsbedingung über die verschiedenen Bestände verteilen. Die Summe sämtlicher Personen aller n Bestände ist zu jedem Zeitpunkt gleich N, was keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, da natürlich in einem bestimmten Modell nicht alle n Bestände betrachtet werden müssen.

Definition des Systems

Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mittels der Zahlenfolge

$$p_{y_1 \dots y_n}(t) \; (y_v = 0, 1, 2, \dots, N) \text{ mit den Bedingungen}$$

$$p_{y_1 \dots y_n}(t) \geqq 0\,;$$

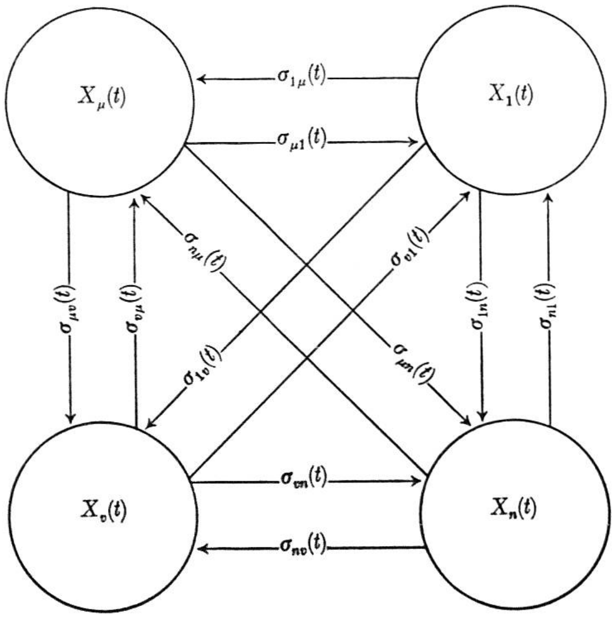
$$\sum_{y_1=0}^{\infty} \sum^{\infty} \dots \sum_{y_n=0}^{\infty} p_{y_1 \dots y_n}(t) = 1,$$

wobei $p_{y_1 \dots y_n}(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass zur Zeit t im Bestand $X_1(t) = y_1, \dots X_n(t) = y_n$ Elemente vorhanden sind.

$$p_{y_1 \dots y_n}(t) = P[X_1(t) = y_1, \dots, X_n(t) = y_n]. \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{y_1 \dots y_n}(t)$ setzen wir immer dann Null, falls mindestens ein $X_v(t)$ negativ ausfallen sollte. Im Sinne unserer Interpretation wäre nämlich $X_v(t) < 0$ gleichbedeutend mit dem Vorkommen negativer Bestände, was praktisch nie vorkommen wird.

Wir wollen im folgenden annehmen, die betrachteten Bestände können im Zeitintervall *dt* nur um die Einheit zu- oder abnehmen. In der Zeit *dt* kann z. B. im Aktivenbestand einer Versicherungsgesellschaft höchstens ein einzelner sterben. Die Wahrscheinlichkeit, dass 2 und mehr Versicherte sterben, wird Null gesetzt. Der Fehler, den wir dadurch begehen, strebt mit $dt \to 0$ auch gegen Null. Ein solcher Prozess, bei dem im Intervall *dt* nur Übergänge in den nächsthöheren oder nächstniedrigeren Zustand möglich sind, wird allgemein *Geburts- und Todesprozess* genannt.



Für das Zustandekommen des Zustandes $Z_{y_1 \dots y_n}$ bestehen folgende $(n(n-1)+1)$ Möglichkeiten:

1. Der Prozess erreicht während des Zeitintervalles (t_0, t) den Zustand $Z_{y_1 \dots y_\mu + 1 \dots y_v - 1 \dots y_n}$, wofür die Wahrscheinlichkeit $p_{y_1 \dots y_\mu + 1 \dots y_v - 1 \dots y_n}(t)$ ist. Dann erfolgte während des Zeitabschnittes $(t, t+dt)$ ein Übertritt aus dem μ-ten in den v-ten Bestand; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$(y_\mu + 1)\, \sigma_{\mu v}(t)\, dt.$$

Da nun μ und v alle Werte von 1 bis n annehmen können ausser $\mu = v$, erhalten wir hier $n(n-1)$ Fälle.

2. Der Prozess ging während des Zeitabschnittes (t_0, t) in den Zustand $Z_{y_1 \dots y_n}$ über; die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p_{y_1 \dots y_n}(t)$. Während des Zeitabschnittes $(t, t+dt)$ erfuhr der Zustand keine Veränderung mehr; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\Bigl(1 - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} y_\mu\, \sigma_{\mu v}(t)\, dt\Bigr).$$

Hieraus folgt das Gleichungssystem

$$p_{y_1 \dots y_n}(t+dt) = \Bigl(1 - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} y_\mu\, \sigma_{\mu v}(t)\, dt\Bigr) p_{y_1 \dots y_n}(t) + \\ + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} (y_\mu + 1)\, \sigma_{\mu v}(t)\, dt\, p_{y_1 \dots y_\mu + 1 \dots y_v - 1 \dots y_n}(t).$$

Lösen wir dieses System nach

$$\frac{p_{y_1 \dots y_n}(t+dt) - p_{y_1 \dots y_n}(t)}{dt}$$

auf und führen den Grenzübergang $dt \to 0$ durch, so resultiert

$$\frac{d}{dt} p_{y_1 \dots y_n}(t) = -\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} y_\mu\, \sigma_{\mu v}(t)\, p_{y_1 \dots y_n}(t) + \\ + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} (y_\mu + 1)\, \sigma_{\mu v}(t)\, p_{y_1 \dots y_\mu + 1 \dots y_v - 1 \dots y_n}(t). \quad (2)$$

Unsere Aufgabe wird es sein, dieses Differentialgleichungssystem zu lösen. Hierzu bedienen wir uns der erzeugenden Funktion 1. Art.

$$g(s_1, \ldots, s_n, t) = \sum_{y_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{y_n=0}^{\infty} p_{y_1 \ldots y_n}(t)\, s_1^{y_1} \ldots s_n^{y_n}. \tag{3}$$

Erweitern wir Beziehung (2) mit $s_1^{y_1} \ldots s_n^{y_n}$ und summieren über $y_1 \ldots y_n$, so resultiert

$$\frac{\delta}{\delta t}\, g(s_1, \ldots, s_n, t) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} \sigma_{\mu v}(t)\, (s_v - s_\mu)\, \frac{\delta}{\delta s_\mu}\, g(s_1, \ldots, s_n, t)\,. \tag{4}$$

Wir haben es bei der obigen Differentialgleichung mit einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu tun.

Es ist für die folgenden Betrachtungen zweckmässig, die erzeugende Funktion II. Art

$$G(z_1, .., z_n, t) = ln \sum_{y_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{y_n=0}^{\infty} p_{y_1 \ldots y_n}(t)\, e^{y_1 z_1} \ldots e^{y_n z_n} \tag{5}$$

einzuführen. Diese Funktion erfüllt die Beziehung

$$G(z_1, \ldots, z_n, t) = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu E[X_\mu(t)] + 1/2 \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} z_\mu z_v \operatorname{cov}\, [X_\mu(t), X_v(t)] + 1/2 \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2 \operatorname{var} [X_\mu(t)] + \ldots, \tag{6}$$

was aus dem allgemeinen Taylor-Ansatz gefolgert werden kann, wenn man $G(u_1 + z_1, \ldots, u_n + z_n, t)$ entwickelt und $u_1 = \ldots = u_n = 0$ setzt. In dieser Beziehung bezeichnen wir den Erwartungswert sowie die Varianz des μ-ten Bestandes mit $E[X_\mu(t)]$ bzw. var $[X_\mu(t)]$ und die Kovarianz je zweier Bestände mit cov $[X_\mu(t), X_v(t)]$.

Wird die partielle Differentialgleichung (4) in der erzeugenden Funktion II. Art ausgedrückt, so resultiert, unter Berücksichtigung der Substitution $s_\mu = e^{z_\mu}$ nach einigen Umformungen,

$$\frac{\delta}{\delta t}\, G(z_1, \ldots, z_n, t) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} \sigma_{\mu v}(t)\, (e^{z_v - z_\mu} - 1)\, \frac{\delta}{\delta z_\mu}\, G(z_1, \ldots, z_n, t)\,. \tag{7}$$

Es wird unser Bestreben sein, die gefundene Beziehung (7) mit der allgemein gültigen Reihe (6) zu vergleichen. Zu diesem Zweck hat man (7) nach z zu entwickeln. Da uns quadratische und höhere Terme in z keine zusätzliche Information liefern werden, können wir diese vernachlässigen.

$$\frac{\delta}{\delta t} G(z_1, \ldots, z_n, t) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} \sigma_{\mu v}(t)\,(z_v - z_\mu) \cdot \frac{\delta}{\delta z_\mu} G(z_1, \ldots, z_n, t) + \ldots \tag{8}$$

Ersetzen wir noch die partiellen Ableitungen auf der rechten Seite gemäss (6), so resultiert bei alleiniger Berücksichtigung konstanter und linearer Terme in z

$$\frac{\delta}{\delta t} G(z_1, \ldots, z_n, t) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} \sigma_{\mu v}(t)\, z_v\, E[X_\mu(t)] - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} \sigma_{\mu v}(t)\, z_\mu\, E[X_\mu(t)] + \ldots\,.$$

Leiten wir ebenfalls die Beziehung (6) partiell nach t ab, so folgt durch Vergleich der Koeffizienten von z

$$\frac{d}{dt} E[X_\mu(t)] = \sum_{\substack{v=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sigma_{v\mu}(t)\, E[X_v(t)] - E[X_\mu(t)] \sum_{\substack{v=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sigma_{\mu v}(t). \tag{9}$$

Gemäss dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme hat das Anfangswertproblem *genau eine* Lösung, da die Koeffizienten in allen endlichen Intervallen stetig und damit beschränkt sind.

Verteilung des Systems

Wir stellen die Behauptung auf, die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsfunktion (1) sei *multinomialverteilt*, d.h. es gelte

$$p_{y_1 \ldots y_n}(t) = \frac{N!}{y_1! \ldots y_n!}\, \bar{p}_1(t)^{y_1} \ldots \bar{p}_n(t)^{y_n}, \tag{10}$$

mit der Anfangsbedingung $p_{N,0,0,\ldots,0}(0) = 1$.

Den Beweis erbringen wir, indem wir die erzeugende Funktion der Multinomialverteilung

$$g(s_1, \dots, s_n; t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j(t)\, s_j\right)^N \tag{11}$$

als Lösung in die partielle Differentialgleichung (4) einsetzen, wodurch eine Identität resultieren muss. Wir erhalten

$$-\sum_{j=1}^{n} \bar{p}'_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \bar{p}'_j(t)\, s_j = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sum_{v=1}^{n} \sigma_{\mu v}(t)\,(s_v - s_\mu)\, \bar{p}_\mu(t),$$

wobei für $\frac{d}{dt}\, \bar{p}_j(t) = \bar{p}'_j(t)$ gesetzt wurde.

Stimmt die Behauptung, müssen auch die Erwartungswerte $E[X_\mu(t)]$ diejenigen einer Multinomialverteilung sein, d.h. $E[X_\mu(t)] = N\bar{p}_\mu(t)$, womit aus (9) folgt

$$\bar{p}'_\mu(t) = \sum_{\substack{v=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sigma_{v\mu}(t)\, \bar{p}_v(t) - \bar{p}_\mu(t) \sum_{\substack{v=1 \\ \mu \neq v}}^{n} \sigma_{\mu v}(t). \tag{12}$$

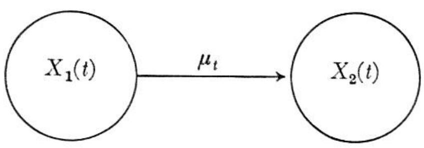
Setzen wir diese Beziehung oben ein, ist der Beweis erbracht. Die Eindeutigkeit der Lösung von (4) lässt sich mittels der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ebenfalls leicht erbringen.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (1) ist somit durch (10) bestimmt. Das multinomiale Verteilungsgesetz bestimmt uns ebenfalls die gebräuchlichen statistischen Masszahlen, die sich alle als Funktion von $\bar{p}_j(t)$ darstellen lassen. Wir sind somit bei Kenntnis aller $\bar{p}_j(t)$ vollumfänglich über unser System informiert.

Trotzdem das lineare homogene Differentialgleichungssystem (12) erster Ordnung für konstante Koeffizienten prinzipiell gelöst ist, stossen wir doch bei der Bestimmung der Eigenwerte im allgemeinen auf Schwierigkeiten. Für variable Übergangsintensitäten lässt sich (12) nur für Spezialfälle lösen.

Berechnung der $\bar{p}_j\,(t)$ für Spezialfälle

1. Ordnung der Lebenden und Gestorbenen



Wir wollen das hergeleitete Differentialgleichungssystem (12) für den einfachsten nichttrivialen Fall betrachten, wo alle Übergangsintensitäten identisch Null verschwinden, ausser $\sigma_{12}(t)$, die wir gleich der Sterblichkeitsintensität μ_t setzen. Zusätzlich nehmen wir für die folgenden Betrachtungen an, dass in jedem Zeitpunkt Alter und Zeit äquivalent seien, d.h. im Zeitpunkt t_0 alle Personen das Alter t_0 aufwiesen.

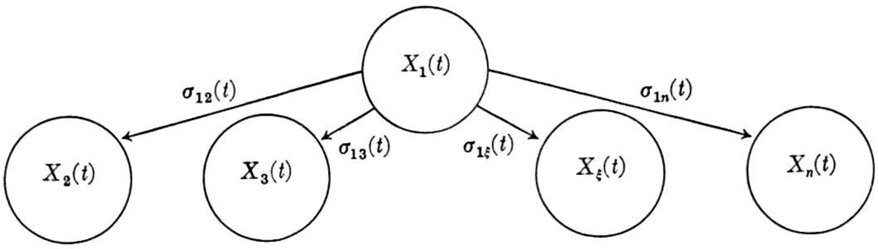
Das Gleichungssystem (12) nimmt hier folgende Form an

$$\begin{aligned} \bar{p}_1'(t) &= -\mu_t\, \bar{p}_1(t) \\ \bar{p}_2'(t) &= \quad \mu_t\, \bar{p}_1(t)\,. \end{aligned}$$

Durch Integration dieser beiden Beziehungen resultiert bei einer Anfangsbedingung $\bar{p}_1(t)_{|t=0} = 1$

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\int_0^t \mu_\theta d\theta} \quad ; \; \bar{p}_2(t) = 1 - \bar{p}_1(t)\,.$$

2. Zusammengesetzte Ordnung mit n-1 versicherten Ereignissen



Als Ausscheideursache aus dem Bestand $X_1(t)$ gelte nicht nur Tod, sondern weitere, wie z.B. Invalidität, Krankheit usw. Als Übergangsintensitäten fallen lediglich die $\sigma_{1\zeta}(t)$ $\zeta = 2, 3, \ldots, n$ in Betracht, womit sich das Differentialgleichungssystem (12) wie folgt vereinfacht

$$\begin{aligned} \bar{p}_1'(t) &= -\left(\sigma_{12}(t) + \ldots + \sigma_{1n}(t)\right) \bar{p}_1(t) \\ \bar{p}_\zeta'(t) &= \quad \sigma_{1\zeta}(t)\, \bar{p}_1(t)\,; \; 2 \leqq \zeta \leqq n\,. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\bar{p}_1(t)_{|t=0} = 1$ ergeben sich die nachstehenden Ausdrücke

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\int\limits_0^t \sum\limits_{v=2}^{n} \sigma_{1v}(\theta)\, d\theta}$$

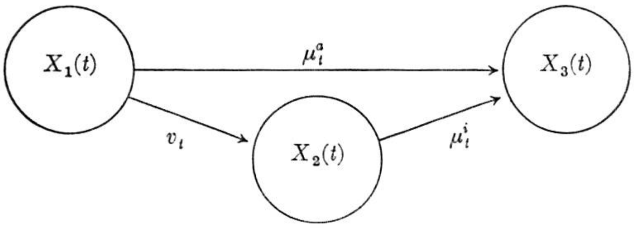
$$\bar{p}_\zeta(t) = \int\limits_0^t \sigma_{1\zeta}(\tau)\, e^{-\int\limits_0^\tau \sum\limits_{v=2}^{n} \sigma_{1v}(\theta)\, d\theta} d\tau;\; 2 \leqq \zeta \leqq n.$$

Sind die verwendeten Übergangsintensitäten $\sigma_{1\zeta}(t) = \sigma_{1\zeta} =$ konstant, d.h. nicht mehr von der Zeit abhängig, so lauten die gesuchten Werte

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\sum\limits_{v=2}^{n} \sigma_{1v} \cdot t}$$

$$\bar{p}_\zeta(t) = \sigma_{1\zeta} \frac{1 - e^{-\sum\limits_{v=2}^{n} \sigma_{1v} \cdot t}}{\sum\limits_{v=2}^{n} \sigma_{1v}};\; 2 \leqq \zeta \leqq n.$$

3. Ordnung der Aktiven, Invaliden und Gestorbenen



Es sei nun möglich, nicht nur direkt zufolge Todes in den Endbestand $X_3(t)$ auszuscheiden, sondern zuerst in den Zwischenbestand $X_2(t)$ zu invalidieren und hernach auszuscheiden. Werden in Anlehnung an die gebräuchliche Bezeichnungsweise die vorkommenden Intensitäten $\sigma_{12}(t) = v_t$, $\sigma_{13}(t) = \mu_t^a$ und $\sigma_{23}(t) = \mu_t^i$ als einzige $\sigma_{\mu v}(t) \neq 0$ gesetzt, so nimmt das Gleichungssystem (12) folgende Form an:

$$\bar{p}_1'(t) = -(\mu_t^a + v_t)\, \bar{p}_1(t)$$

$$\bar{p}_2'(t) = -\mu_t^i\, \bar{p}_2(t) + v_t\, \bar{p}_1(t)$$

$$\bar{p}_3'(t) = \mu_t^a\, \bar{p}_1(t) + \mu_t^i\, \bar{p}_2(t).$$

Mit der Anfangsbedingung $\bar{p}_1(t)_{|t=0} = 1$ erhalten wir durch Integration

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\int\limits_0^t (\mu_\theta^a + v_\theta) d\theta}$$

$$\bar{p}_2(t) = e^{-\int\limits_0^t \mu_\theta^i d\theta} \int\limits_0^t v_\tau \, e^{\int\limits_0^\tau (\mu_\theta^i - \mu_\theta^a - v_\theta) d\theta} d\tau$$

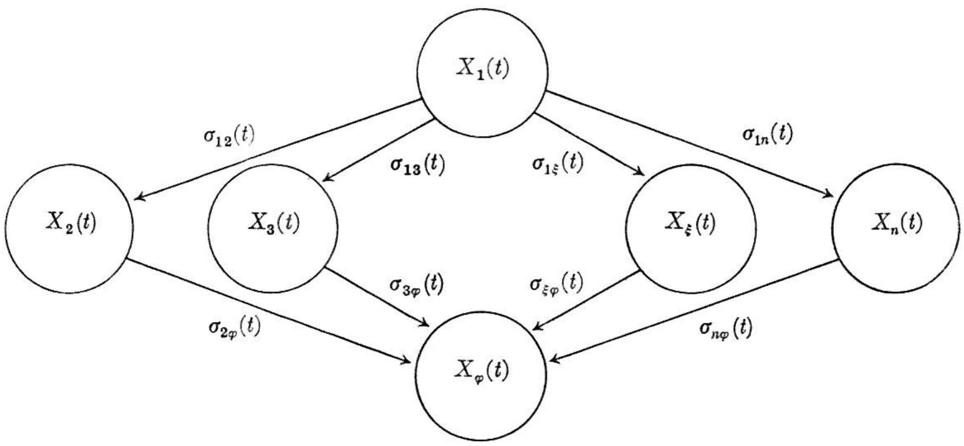
$$\bar{p}_3(t) = 1 - \bar{p}_1(t) - \bar{p}_2(t).$$

Für den Spezialfall konstanter Intensitäten μ^a, μ^i und v vereinfachen sich die gefundenen Ansätze zu

$$\bar{p}_1(t) = e^{-(\mu^a + v)t}$$

$$\bar{p}_2(t) = \frac{v}{\mu^i - \mu^a - v} \left(e^{-(\mu^a + v)t} - e^{-\mu^i t}\right).$$

4. Ausscheidung mit $n-1$ Zwischenbeständen



Es soll die Verallgemeinerung untersucht werden, dass der Anfangsbestand von N Personen, d.h. $X_1(t)_{|t=0} = N$, vor dem Übergang in den Bestand der Toten X_φ in n—1 Zwischenbestände mit den zugehörigen Intensitäten $\sigma_{1\zeta}(t)$ übergehen könne. Setzen wir in System (12) ausser $\sigma_{1\zeta}(t) \neq 0$ und $\sigma_{\zeta\varphi}(t) \neq 0$ alle übrigen $\sigma_{\mu v}(t) = 0$, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\bar{p}_1'(t) = -(\sigma_{12}(t) + \ldots + \sigma_{1n}(t))\,\bar{p}_1(t)$$

$$\bar{p}_\zeta'(t) = \sigma_{1\zeta}(t)\,\bar{p}_1(t) - \sigma_{\zeta\varphi}(t)\,\bar{p}_\zeta(t);\ 2 \leqq \zeta \leqq n$$

$$\bar{p}_\varphi'(t) = \sigma_{2\varphi}(t)\,\bar{p}_2(t) + \ldots + \sigma_{n\varphi}(t)\,\bar{p}_n(t).$$

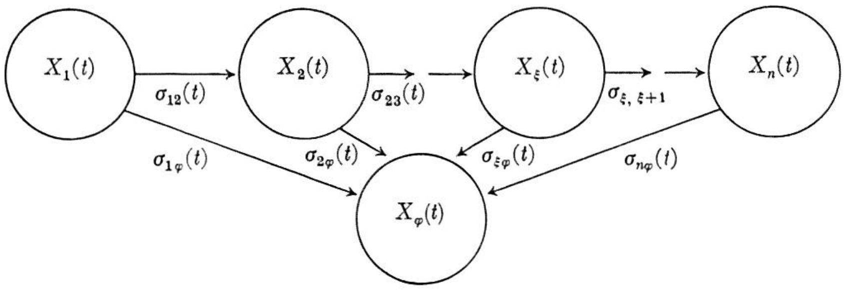
Durch Integration resultiert

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\int\limits_0^t \sum\limits_{v=2}^n \sigma_{1v}(\theta)\,d\theta}$$

$$\bar{p}_\zeta(t) = e^{-\int\limits_0^t \sigma_{\zeta\varphi}(\theta)\,d\theta} \int\limits_0^t \sigma_{1\zeta}(\tau)\, e^{\int\limits_0^\tau \sigma_{\zeta\varphi}(\theta)d\theta}\, e^{-\int\limits_0^\tau \sum\limits_{v=2}^n \sigma_{1v}(\theta)\,d\theta}\, d\tau;\ 2 \leqq \zeta \leqq n$$

$$\bar{p}_\varphi(t) = 1 - \sum_{v=1}^n \bar{p}_v(t).$$

5. Fortlaufende Übergänge mit Berücksichtigung der Ausscheidung zufolge Todes



Ausgegangen werde wieder vom Bestand $X_1(t)$, der für $t = 0$ N Mitglieder aufweisen soll. Wir studieren hier das Modell, dass jeder vorhandene Bestand nur aus dem vorhergehenden entstehen kann, wobei neben der Änderung des Zustandes $X_\zeta \to X_{\zeta+1}$ auch das Ausscheiden $X_\zeta \to X_\varphi$ vorkommen kann. Gemäss Voraussetzung sind nur $\sigma_{\zeta,\zeta+1}(t) \neq 0$ und $\sigma_{\zeta\varphi}(t) \neq 0$ und sonst alle $\sigma_{\mu v}(t) = 0$. Somit nimmt das Gleichungssystem (12) folgende Form an:

$$\bar{p}_1'(t) = -(\sigma_{12}(t) + \sigma_{1\varphi}(t))\,\bar{p}_1(t)$$

$$\bar{p}_\zeta'(t) = \sigma_{\zeta-1,\zeta}(t)\,\bar{p}_{\zeta-1}(t) - (\sigma_{\zeta,\zeta+1}(t) + \sigma_{\zeta\varphi}(t))\,\bar{p}_\zeta(t);\ 2 \leqq \zeta \leqq n$$

$$\bar{p}_\varphi'(t) = \sigma_{1\varphi}(t)\,\bar{p}_1(t) + \ldots + \sigma_{n\varphi}(t)\,\bar{p}_n(t).$$

Die Auflösung dieser Beziehungen führt auf die Wahrscheinlichkeiten

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\int_0^t (\sigma_{12}(\theta)+\sigma_{1\varphi}(\theta))\, d\theta}$$

$$\bar{p}_\zeta(t) = e^{-\int_0^t (\sigma_{\zeta,\zeta+1}(\theta)+\sigma_{\zeta\varphi}(\theta))\, d\theta} \prod_{v=1}^{\zeta-1} \int_0^{t} {}^{\zeta-v+1} u(v)\, dt\,;\ 2 \leqq \zeta \leqq n$$

mit $u(v) = \sigma_{\zeta-v,\,\zeta-v+1}(t_{\zeta-v})\, e^{\int_0^t {}^{\zeta-v} (\sigma_{\zeta-v+1,\,\zeta-v+2}(\theta)+\sigma_{\zeta-v+1,\,\varphi}(\theta)-\sigma_{\zeta-v,\,\zeta-v+1}(\theta)-\sigma_{\zeta-v,\,\varphi}(\theta))\, dt}$

und $dt = dt_1 \dots dt_{\zeta-1}$ wobei $\sigma_{n,\,n+1}(t) = 0$ ist.

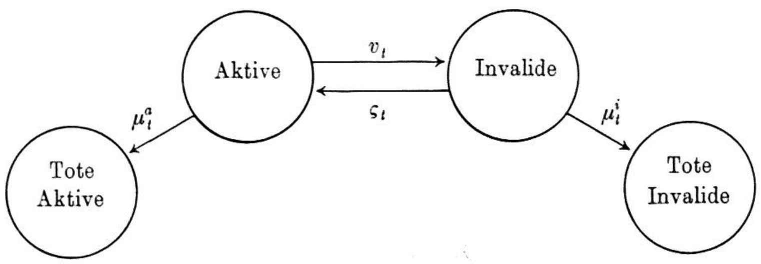
$$\bar{p}_\varphi(t) = 1 - \sum_{\zeta=1}^{n} \bar{p}_\zeta(t)\,.$$

Für den Fall konstanter Intensitäten erhält man

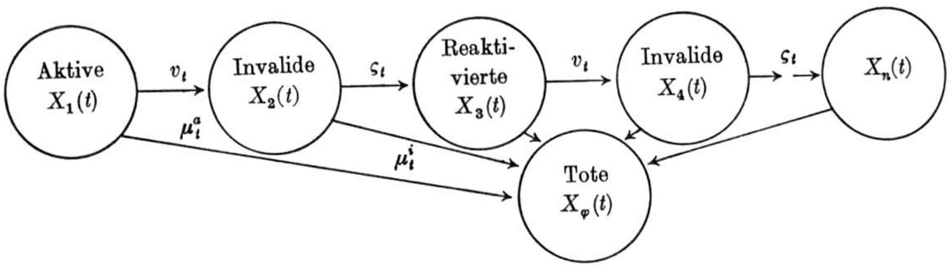
$$\bar{p}_1(t) = e^{-(\sigma_{12}+\sigma_{1\varphi})t}$$

$$\bar{p}_\zeta(t) = (-1)^{\zeta+1} \prod_{\lambda=1}^{\zeta-1} \sigma_{\lambda,\,\lambda+1} \left(\sum_{\mu=1}^{\zeta} \frac{e^{-(\sigma_{\mu,\,\mu+1}+\sigma_{\mu\varphi})t}}{\prod\limits_{v\neq\mu}^{\zeta} (\sigma_{\mu,\,\mu+1}+\sigma_{\mu\varphi}-\sigma_{v,\,v+1}-\sigma_{v\varphi})} \right);\ \begin{array}{l} 2 \leqq \zeta \leqq n, \\ \sigma_{n,n+1} = 0. \end{array}$$

Wir wollen nun eine Nutzanwendung dieser Untersuchungen aufzeigen. Gegeben seien die beiden Bestände der Aktiven und Invaliden, aus denen die Mitglieder ausser der Invalidierung und Reaktivierung noch zusätzlich durch Tod ausscheiden.



Bei variablen Übergangsintensitäten führt die Berechnung dieser Grössen auf eine Differentialgleichung von Riccati, die im allgemeinen nicht lösbar ist. Auf unser Modell übertragen, lässt sich die Problemstellung jedoch wie folgt formulieren:



Die N Aktiven der Ausgangsbestandes $X_1(t)_{|t=0} = N$ können entweder mit der Übergangsintensität v_t in den Bestand $X_2(t)$ invalidieren oder mit der Sterblichkeit μ_t^a in den Bestand $X_\varphi(t)$ absterben. – Die Invaliden ihrerseits können mit der Übergangsintensität s in den Bestand $X_3(t)$ reaktivieren oder mit der Sterblichkeitsintensität μ_t^i in den Bestand $X_\varphi(t)$ absterben. Die Reaktivierten sind wiederum dem Ausscheideprozess der Aktiven unterworfen, ein Vorgang, der sich beliebig oft wiederholen kann.

Der Erwartungswert der Aktiven ist demnach gleich der Summe der Erwartungswerte aller Bestände ungerader Ordnung, und derjenige der Invaliden entspricht der Summe der Erwartungswerte aller Bestände gerader Ordnung. Für die Praxis ist die Annahme sicher realistisch, jede Person könne nicht mehr als zweimal invalidieren. Es sei für einen Aktiven also möglich, primär mit einer Invalidierungsintensität v_t zu invalidieren, sekundär mit der Reaktivierungsintensität s_t zu reaktivieren und schliesslich endgültig zu invalidieren, wobei er in jedem Augenblick unter dem entsprechenden Todesfallrisiko steht.

Die Aktiven ergeben sich zu

$$E[X_1(t)] + E[X_3(t)] = N(\bar{p}_1(t) + \bar{p}_3(t) =$$

$$Ne^{-\int_0^t (v_\theta + \mu_\theta^a)\,d\theta} + Ne^{-\int_0^{t_3} (v_\theta + \mu_\theta^a)\,d\theta} \int_0^{t_3} \varsigma_{t_2}\, e^{\int_0^{t_2} (v_\theta + \mu_\theta^a - \varsigma_\theta - \mu_\theta^i)\,d\theta} \int_0^{t_2} v_{t_1}\, e^{\int_0^{t_1} (\varsigma_\theta + \mu_\theta^i - v_\theta - \mu_\theta^a)\,d\theta}\, dt_1\, dt$$

Die Invaliden berechnen sich nach

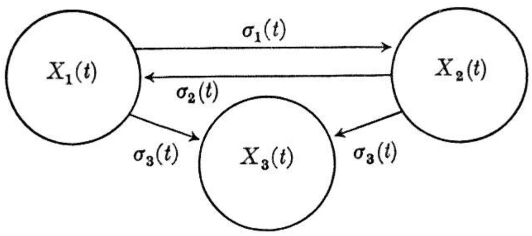
$$E[X_2(t)] + E[X_4(t)] = N(\bar{p}_2(t) + \bar{p}_4(t)) =$$

$$N e^{-\int_0^{t_2} (\varsigma_\theta + \mu_\theta^i)\, d\theta} \int_0^{t_2} v_{t_1} e^{\int_0^{t_1} (\varsigma_\theta + \mu_\theta^i - v_\vartheta - \mu_\theta^a)\, d\theta} dt_1 +$$

$$+ N e^{-\int_0^{t_4} \mu_\theta^i d\theta} \int_0^{t_4} v_{t_3} e^{\int_0^{t_3} (\mu_\theta^i - v_\theta - \mu_\theta^a)\, d\theta} \int_0^{t_3} \varsigma_{t_2} e^{\int_0^{t_2} (v_\theta + \mu_\theta^a - \varsigma_\theta - \mu_\theta^i)\, d\theta} \int_0^{t_2} v_{t_1} e^{\int_0^{t_1} (\varsigma_\theta + \mu_\theta^i - v_\theta - \mu_\theta^a)\, d\theta} dt_1\, dt_2\, dt_3 .$$

6. *Reversibler Prozess mit Berücksichtigung der Ausscheidung*

Das Differentialgleichungssystem (12) mit der Anfangsbedingung $X_1(t)_{|t=0} = N$ werde für folgenden Spezialfall untersucht:



$X_1(t)$ wird bei der versicherungstechnischen Betrachtungsweise im allgemeinen dem Bestand der Aktiven entsprechen, der einerseits mittels der Übergangsintensität $\sigma_{12}(t) = \sigma_1(t)$ nach $X_2(t)$ übergeht (Invalidierung, Erkrankung usw.) und anderseits nach $X_3(t)$ gemäss der Sterblichkeitsintensität $\sigma_{13}(t) = \sigma_3(t)$ ausscheidet. Die Personen im Bestand $X_2(t)$ vermindern sich entweder zufolge Reaktivierung $\sigma_{21}(t) = \sigma_2(t)$ oder Todes $\sigma_{23}(t) = \sigma_3(t)$. Somit haben wir für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten folgendes System zu betrachten:

$$\bar{p}_1'(t) = -\left(\sigma_1(t) + \sigma_3(t)\right) \bar{p}_1(t) + \sigma_2(t)\, \bar{p}_2(t)$$

$$\bar{p}_2'(t) = \sigma_1(t)\, \bar{p}_1(t) - \left(\sigma_2(t) + \sigma_3(t)\right) \bar{p}_2(t)$$

$$\bar{p}_3'(t) = \sigma_3(t)\, \bar{p}_1(t) + \sigma_3(t)\, \bar{p}_2(t) .$$

Durch Integration folgt

$$\bar{p}_1(t) = e^{-\int_0^t (\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta))\,d\theta} + \int_0^t \sigma_2(\tau)\, e^{-\int_\tau^t (\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta))\,d\theta}\, d\tau$$

$$-\int_0^t \sigma_2(\tau)\, e^{-\int_\tau^t (\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta))\,d\theta} \int_0^\tau \sigma_3(\tau_1)\, e^{-\int_{\tau_1}^\tau \sigma_3(\theta)\,d\theta}\, d\tau_1 d\tau\,.$$

$$\bar{p}_2(t) = \int_0^t \sigma_1(\tau)\, e^{-\int_\tau^t (\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta))\,d\theta}\, d\tau$$

$$-\int_0^t \sigma_1(\tau)\, e^{-\int_\tau^t (\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta))\,d\theta} \int_0^\tau \sigma_3(\tau_1)\, e^{-\int_{\tau_1}^\tau \sigma_3(\theta)\,d\theta}\, d\tau_1 d\tau.$$

$$\bar{p}_3(t) = \int_0^t \sigma_3(\tau)\, e^{-\int_\tau^t \sigma_3(\theta)\,d\theta}\, d\tau\,.$$

Zusammenfassung

Wir sind allgemein von einem Bestandessystem ausgegangen, in dem die einzelnen Elemente die Bestände als Funktion der Zeit wechseln. Unser primäres Bestreben war es abzuklären, wie viele Elemente sich nach einer bestimmten Zeitspanne bei gegebenen Anfangsbedingungen und stetigen Übergangsintensitäten in den einzelnen Beständen befinden.

Ein lineares Differentialgleichungssystem wurde hergeleitet, das zu jedem Zeitpunkt den Erwartungswert der vorhandenen Bestände angibt, sofern die Bestandesvariationen die Voraussetzungen eines Geburts- und Todesprozesses erfüllen. Wie die Untersuchungen zeigten, wird das ganze System von einer Multinomialverteilung beherrscht, womit auch die weitern Masszahlen wie Varianz und Kovarianz sich bestimmen lassen.

Als Nutzanwendung wurde zuerst der Spezialfall nur zweier Bestände behandelt, nämlich derjenige der Lebenden und Gestorbenen. Die bekannte Tatsache erwies sich als zutreffend, dass dieses Modell eine Binomialverteilung befolgt. Als weiteres Modell sei jenes erwähnt, in welchem jedes Element vor dem Ausscheiden in den Endbestand in einen der verschiedenen Zwischenbestände übergehen kann. Ebenfalls das Modell der fortlaufenden Übergänge hat sich explizit auflösen lassen.

Am Schlusse unserer Ausführungen ist es gelungen, den reversiblen Vorgang zweier Bestände – der in der einschlägigen Literatur bereits bekannt ist – zu erweitern unter Einbezug des einseitigen Ausscheidens zufolge Todes.

Literaturverzeichnis

Arley, N.: On the «Birth- and Death» Processes. SAT 1949.
Chiang, C.L.: Introduction to Stochastic Processes in Biostatics. New York 1968.
Kamke, E.: Differentialgleichungen. New York 1948.
van Klinken, J.: The Theory of Random Processes. MVSM 1959.
Lahres, H. Einführung in die diskreten Markoff-Prozesse. Braunschweig 1964.
Türler, H.: Versicherungstechnische Bestandesentwicklungen. Diss.