Statistik und Entscheidungstheorie : Untersuchungen über das 2-Aktionen-Problem

Autor(en): **Loeffel, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **70 (1970)**

PDF erstellt am: **30.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967019

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Statistik und Entscheidungstheorie

(Untersuchungen über das 2-Aktionen-Problem)

Von Hans Loeffel, St. Gallen

1. Einführung und Problemstellung

In den vergangenen 10–15 Jahren ist die praktische Bedeutung der *allgemeinen Entscheidungstheorie* für viele Zweige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften enorm gewachsen.

Jedes Individuum (oder jede soziale Gruppe) steht oft vor dem Dilemma, zum Teil folgenschwere Entscheidungen treffen zu müssen. Die Entscheidungstheorie lehrt, wie man in gewissen, modellartig beschriebenen Situationen unter vielen möglichen Entscheidungen die sogenannte «*optimale*» *Entscheidung* finden kann.

Hierbei stützt man sich auf sogenannte *Entscheidungskriterien*, das sind Richtlinien, nach denen ein «rational» handelndes Individuum seinen Präferenzen im Raum der möglichen Entscheidungen Ausdruck verleiht.

Eine ganz konkrete Anwendungsmöglichkeit in der Automobilversicherung hat *Hans Bühlmann* [1] aufgezeigt. In der Theorie der sequentiellen *Schätzverfahren* wird die Konstruktion von sogenannten «*optimalen Prämienstufensystemen*» behandelt, wobei die entscheidungstheoretische Interpretation auf der Hand liegt.

2. Das Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie

2.1. *Begriffe*

Ein Individuum, konfrontiert mit der *Umwelt* oder der *Natur*, steht in der Konfliktsituation, aus mehreren möglichen *Aktionen*, *Strategien* oder *Entscheidungen* die bestmögliche auszuwählen.

Die Umwelt kann dabei gewisse *Zustände* annehmen, die dem Entscheidenden entweder vollständig bekannt, nur hinsichtlich der Häufigkeiten ihres Auftretens bekannt oder vollständig unbekannt sein können. Je nachdem spricht man von der *Sicherheitssituation*, der *Risikosituation* oder der *Unsicherheitssituation* im engern Sinne (i. e. S.).

Die Sicherheitssituation (z. B. bei der linearen Optimierung) soll uns im folgenden nicht interessieren.

2.2. *Ökonomische Folgen von Entscheidungen – Nutzentheorie*

Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ [1]) der Raum (oder die Menge) der verfügbaren Aktionen oder Letztentscheidungen a_i.

Mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m\}$ [1]) bezeichnen wir den Raum der möglichen Zustände ω_j der Umwelt.

Wählt nun das Individuum (der Entscheidende) die Aktion $a_i \in A$ und herrscht gleichzeitig in der Umwelt der Zustand $\omega_j \in \Omega$, so resultiere daraus ein *Ergebnis*

$$e(a_i, \omega_j) = e_{ij}\,.$$

Die e_{ij} bilden den *Ergebnisraum* $\mathfrak{E}$.

Dieser Sachverhalt kann auch durch nachfolgende *Ergebnismatrix* dargestellt werden.

2.2.1.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_m \\
\hline
a_1 & e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\
a_2 & \cdot & & & \cdot \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_n & e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nm}
\end{array}$$

1) Wir beschränken uns vorerst auf endliche Räume.

Die Ergebnisse e_{ij} brauchen nicht zum vornherein quantifizierbar zu sein. Das folgende ist ein Beispiel eines möglichen Ergebnisses:

«Eine symmetrische Münze wird geworfen. Je nach Ausgang des Zufallsexperimentes hat man 14 Tage aufs Rauchen zu verzichten, oder man erhält eine Eintrittskarte ins Theater.»

Die Anwendung von Entscheidungskriterien erfordert eine *Quantifizierung des Ergebnisraumes* $\mathfrak{E}$. Dies leistet die moderne Nutzentheorie, die im wesentlichen auf *von Neumann* und *Morgenstern* [2] zurückgeht.

Sei $\qquad \mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \dots e_r\} \qquad$ der Ergebnisraum und

$$\mathfrak{E}^* = \{(p_1, p_2, \dots p_r)\}\,; \qquad p_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

der Raum aller *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* (inkl. der degenerierten) oder *Lotterien über* $\mathfrak{E}$.

In $\mathfrak{E}^*$ ist eine lineare und transitive Präferenzrelation $\lesssim$ erklärt.

Auf Grund gewisser Axiome (bez. $\mathfrak{E}^*$), die im wesentlichen die «rationale» Handlungsweise des Entscheidenden charakterisieren, kann die Existenz einer reellwertigen sogenannten *Nutzenfunktion*

$$u(e_i) = u_i$$

gefolgert werden [3].

Insbesondere ist u_{ij} der messbare, ökonomische Nutzen, den eine Aktion a_1 im Zustand ω_j abwirft.

Die Präferenzrelation $\lesssim$ in $\mathfrak{E}^*$ überträgt sich dann auf die gewöhnliche $\leqq$*-Relation für den erwarteten Nutzen,* d.h.

2.2.2. $\quad (p_1, p_2, \dots p_r) \lesssim (p_1', p_2', \dots p_r') \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} u_i\, p_i \leqq \sum_{i=1}^{r} u_i\, p_i'\,.$

Die Problematik der Konstruktion der Nutzenfunktionen steht hier nicht zur Diskussion. Für das folgende wollen wir die u_{ij} stets als bekannt voraussetzen.

2.3 *Grundmodell der Entscheidungstheorie*

Wir gehen aus von 3 grundlegenden Elementen

a)	$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$	Raum der Aktionen, Strategien oder Letztentscheidungen a_i.
b)	$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m\}$	Raum der Zustände ω_j der Umwelt.
c)	$u(a_i, \omega_j) = u(e_{ij}) = u_{ij}$	reellwertige Nutzenfunktion über dem kartesischen Produkt $A \times \Omega$.

Diese Situation kann im Tripel (A, Ω, u) konzentriert und in der nachfolgenden sogenannten *Entscheidungsmatrix* dargestellt werden.

2.3.1.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_m \\
\hline
a_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\
a_2 & \cdot & & & \cdot \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_n & u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nm}
\end{array}$$

2.4. *Entscheidungstheorie und Spieltheorie*

Das Tripel (A, Ω, u) kann auch spieltheoretisch wie folgt interpretiert werden:

Spieler Nr. 1	= Statistiker, mit den verfügbaren Aktionen oder Strategien a_i.
Spieler Nr. 2	= Umwelt, mit den verfügbaren Zuständen oder Strategien ω_j.
u_{ij}	= Nutzen oder Gewinn des 1. Spielers und gleichzeitig der Verlust des 2. Spielers.

Wir haben somit ein 2-Personen-Nullsummenspiel. Ob der Umwelt oder der Natur die Rolle eines rational handelnden Gegenspielers übertragen werden kann, ist fraglich. Hier liegt die fundamentale Nuancierung zwischen allgemeiner Entscheidungstheorie und Spieltheorie.

Ein Beispiel:

	ω_1	ω_2
a_1	–4	+3
a_2	–1	0

Wäre die Umwelt ein rationaler Gegenspieler, so würde sie Strategie ω_1 wählen, und der Entscheidende (z.B. der Statistiker) würde mit a_2 antworten. Wenn hingegen die Umwelt ohne klare Vorstellung ihre Strategie wählt, z.B. ω_2, müsste der Statistiker mit a_1 reagieren.

Näheres über diese interessanten Querverbindungen findet man in Abschnitt 7; bei *H. Bühlmann* in [3], S. 114 ff., und [4] sowie bei *P. Nolfi* [5].

3. Statistik und Entscheidungstheorie

3.1. «*Klassische*» *Statistik*

Es mag auffallen, dass im Sachregister klassischer Standardwerke der mathematischen Statistik Begriffe wie Entscheidung, Entscheidungsfunktion oder ähnliches fehlen. Die fundamentalen Arbeiten von R. A. Fisher, J. Neyman, E. S. Pearson und andern mehr führten die klassische Schätz- und Testtheorie zu einem vorläufigen Höhepunkt.

Begriffe wie Sicherheitswahrscheinlichkeit, Fehler 1. und 2. Art, Güte und Macht von Tests, Konfidenzintervalle sind dabei von zentraler Bedeutung. *Eine Querverbindung zu allgemeinen ökonomischen Fragestellungen bestand aber kaum.*

3.2. *Neue Wege*

Abraham Wald (1902–1950) hat aus dem Sequentialtest heraus die Theorie der sogenannten *statistischen Entscheidungsfunktionen* entwickelt, die eine neue Ära statistischer Betrachtungsweise einleitete.

Seit 1950 (Erscheinungsjahr des fundamentalen Werkes «Statistical decision functions» [6]) hat sich eine ansehnliche Literatur über diesen Gegenstand entwickelt, die bis heute über 600 Titel umfasst [7].

Der Anwendungsbereich der neuen Theorie ist sehr weit gesteckt und reicht von Statistik und Kybernetik über die Unternehmensforschung bis in die Psychologie und Soziologie.

Die Arbeiten von von Neumann und Wald haben versucht, statistische Schlüsse unter dem Blickwinkel der *Entscheidung* zu analysieren und *ökonomisch zu bewerten* (Nutzentheorie).

Wenn auch ursprünglich die zu erwartenden Erfolge vielleicht zu optimistisch prognostiziert wurden, ist doch zweifelsohne eine gewaltige Läuterung und Bereicherung statistischen Denkens im Zuge der neuen Betrachtungsweise zu verzeichnen.

Hat man früher von statistischen *Urteilen* gesprochen, so will man jetzt die Verfahren statistischer Inferenz (Schlussweisen) im Lichte der *Entscheidungen* interpretieren und lösen.

Wie das geschieht, wollen wir an einem bewusst einfach gehaltenen Beispiel nachfolgend darlegen.

3.3. *Das Wesen statistischer Entscheidung*

Ein grundlegendes Problem der *statistischen Qualitätskontrolle* soll auf das Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie nach 2.3. transformiert werden.

Standardbeispiel: Ein Warenposten enthält sehr viele gleichartige Massenartikel, die entweder gut oder defekt sind. Der Anteil ω defekter Stücke im Warenposten sei unbekannt.

Der *Produzent* behauptet beispielsweise, die Sendung enthalte 25% Ausschuss; soll der Abnehmer dies glauben oder nicht?

Der Statistiker (als Berater des Abnehmers) verfüge über *zwei Aktionen,* Strategien oder Letztentscheidungen, nämlich

3.3.1 $$\begin{cases} a_1: \text{«Akzeptiere den Warenposten».} \\ a_2: \text{«Lehne den Warenposten ab».} \end{cases}$$

Der Aktionsraum A enthält also nur 2 Elemente. Man spricht dann von «Testen von Hypothesen».

Die möglichen Anteile $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ defekter Stücke im Warenposten können wir als die Zustände oder Strategien der Umwelt interpretieren. Sie bilden den Zustandsraum Ω.

Wählt der Statistiker die Aktion a_i im Zustand ω_j, so resultiere daraus ein Nutzen $u(a_i, \omega_j) = u_{ij}$.

Das Tripel (A, Ω, u) oder die zugehörige Entscheidungsmatrix E_1

E_1 3.3.2

	ω_1	$\omega_2 \dots \omega_m$
a_1	u_{11}	$u_{12} \dots u_{1m}$
a_2	u_{21}	$u_{22} \dots u_{2m}$

kennzeichnet somit die ursprüngliche Entscheidungssituation eindeutig.

Vorläufig ist über die möglichen Zustände ω_j nichts bekannt.

Ein *echtes statistisches* Entscheidungsproblem entsteht durch Einholen von *zusätzlicher Information* über die $\omega_j \in \Omega$ *vermittels einer Zufallsstichprobe.*

Damit kommt ein stochastisches Element hinein, denn je nach dem zufallsbedingten Ergebnis der Stichprobe wird der Entscheidende diese oder jene Aktion wählen.

Präzisierung der Stichprobe

Aus der als hinreichend gross angenommenen Grundgesamtheit (Warenposten) werden zufallsartig n Elemente (Massenartikel) gezogen.

Dabei sind folgende Voraussetzungen gemacht:

1. die einzelnen Ziehungen erfolgen unabhängig voneinander;
2. die Wahrscheinlichkeit, ein defektes Stück zu ziehen, ist bei jedem Zug gleich, nämlich ω.

Die Ergebnisse x einer solchen Stichprobe

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n) \text{ mit } x_i = \begin{cases} 1, \text{ falls beim } i\text{-ten Zug defektes Stück} \\ 0, \text{ falls beim } i\text{-ten Zug gutes Stück} \end{cases}$$

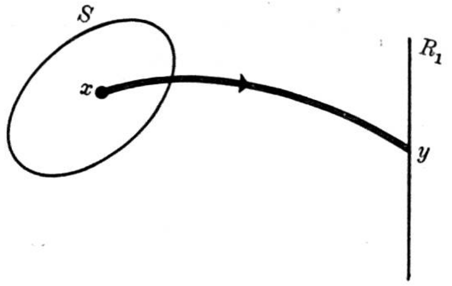
können als Realisationen des n-Tupels X

$X = (X_1, X_2, \dots X_n)$ von unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen X_i interpretiert werden, wobei

3.3.3. $p\{X_i = x_i|\omega\} = \omega^{x_i}(1-\omega)^{1-x_i}$; $x_i = 1{,}0$ falls ω der wahre Anteil in der Grundgesamtheit ist.

Alle Ergebnisse x bilden den sogenannten Stichprobenraum S (bestehend aus 2^n Punkten), den wir in R_1 abbilden durch folgende Zuordnungsvorschrift:

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n) \longrightarrow y = \sum_{i=1}^{1} x_i \,.$$



Die zugehörige Zufallsvariable $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (Anzahl defekter Stücke in Stichprobe) ist hinsichtlich des unbekannten Zustandes ω eine sogenannte *suffiziente Statistik* oder *Schätzfunktion*, d. h. Y schöpft die Information bezüglich ω voll aus. Die exakte Definition der suffizienten Statistik findet man etwa in [2], S. 113.

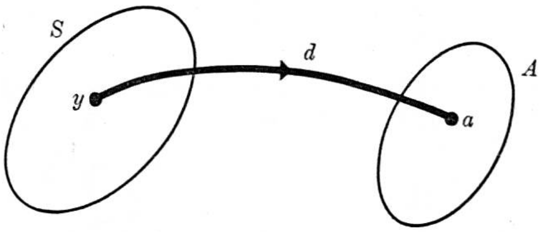
Damit reduziert sich der ursprüngliche Stichprobenraum von 2^n Elementen auf jenen bezüglich Y (er sei wieder mit S bezeichnet), der noch genau $(n+1)$-Elemente

$$y = 0, 1, 2, \dots n \qquad \text{enthält.}$$

3.3.4. $$p\{Y = y|\omega\} = p(y|\omega) = \binom{n}{y} \omega^y (1-\omega)^{n-y}; \quad y = 0, 1, \dots, n$$

ist dann die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang n genau y defekte Stücke zu finden.

Die Hauptaufgabe des Statistikers besteht nun darin, eine *Entscheidungsregel* oder *Strategie* d festzulegen, die jedem Stichprobenergebnis $y \in S$ eindeutig eine *Aktion* oder *Letztentscheidung* $a \in A$ zuordnet.



S = Stichprobenraum
A = Aktionsraum

Eine solche Strategie kann als *Abbildung* des Stichprobenraumes S auf den Aktionsraum A aufgefasst werden und heisst seit A. Wald eine *statistische Entscheidungsfunktion* oder *statistische Entscheidungsregel*.

Wie man leicht abzählen kann, gibt es genau 2^{n+1} Entscheidungsfunktionen $d_i (i = 1, 2, \ldots 2^{n+1})$, die den sogenannten *Entscheidungsraum* D bilden.

Der ursprüngliche Raum A der Aktionen oder Letztentscheidungen a_i wird somit durch den Raum D der Entscheidungsfunktionen oder Strategien d_i ersetzt.

Wie sind nun die ökonomischen Folgen einer Strategie d zu bewerten, falls sie im Zustand ω_j erfolgt? Eine Entscheidungsfunktion d_i ordnet jedem zufallsbedingten Stichprobenergebnis $y \in S$ eine ebenso zufallsbedingte Aktion $a_i \in A$ zu.

Jeder Strategie d_i kann deshalb lediglich ein *mittlerer* Nutzen, die sogenannte *Nutzenerwartung* oder das *Risiko* $r(d_i, \omega_j) = r_{ij}$, zugeordnet werden, das wie folgt definiert ist:

3.3.5. $$r(d_i, \omega_j) = \sum_{y \in S} u[d_i(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \,.$$

$r(d_i, \omega_j)$ ist also der im Mittel zu erwartende Nutzen bei Anwendung der Entscheidungsfunktion d_i im Zustand ω_j.

Falls S nicht endlich ist, sondern etwa eine beliebige, Borel-messbare Teilmenge des R_1, müsste auf der Klasse der Borel-messbaren Teilmengen von S für jedes $\omega \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmass P_ω definiert sein. Die Summe 3.3.5. ginge dann über in das Lebesguesche Integral

$$r(d, \omega) = \int_S u[d(y), \omega] \, dP_\omega(y) \,,$$

und D bestünde aus jenen Funktionen d, für welche $u[d(y), \omega]$ für alle $\omega \in \Omega$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion von y ist.

Die Entscheidungsmatrix E_1 nach 3.3.2. oder mit andern Worten das Tripel (A, Ω, u) wird somit transformiert in die nachfolgende Entscheidungsmatrix E_2 oder in das Tripel (D, Ω, r).

E_2 3.3.6.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \omega_1 & \omega_2 & \dots \ \omega_j & \dots & \omega_m \\
\hline
d_1 & r_{11} & r_{12} & \dots \ r_{1j} & \dots & r_{1m} \\
d_2 & \cdot & & & & \cdot \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
d_i & r_{i1} & r_{i2} & r_{ij} & \dots & \cdot \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
d_{2^{n+1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{2^{n+1},\, m}
\end{array}
$$

Es ist uns also gelungen, das in Kapitel 3.3 formulierte statistische Inferenzproblem (Testen von Hypothesen) auf die Form E_2, d.h. auf das *Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie*, zu transformieren.

Der Statistiker hat aus der Menge D von möglichen Entscheidungsfunktionen eine bestimmte, z.B. d_i, zu wählen, die, erfolgt sie im Zustand ω_j, einen mittleren Nutzen r_{ij} abwirft.

Da die Zustände ω_j der Umwelt unbekannt sind, herrscht die *Unsicherheitssituation im engeren Sinne,* auf die sich jedes statistische Inferenzproblem zurückführen lässt.

4. Testen einer einfachen Hypothese gegen eine einfache Alternative

Wir gehen aus von 3.3., dem Standardbeispiel der Qualitätskontrolle, und treffen folgende Annahmen:

a) *Bezüglich des Zustandsraumes*

Beschränkung auf zwei mögliche Zustände der Umwelt, d.h. auf zwei mögliche Anteile defekter Stücke im Warenposten.

$\omega = \omega_1$ Warenposten ist «gut»,

$\omega = \omega_2$ Warenposten ist «schlecht».

Wir haben den klassischen Fall des Testens einer einfachen *Nullhypothese* H_0 gegen eine einfache *Alternativhypothese* H_1, wobei

4.1. $$H_0: \ \omega = \omega_1$$
$$H_1: \ \omega = \omega_2$$

Der Zustandsraum $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ ist somit auch der Hypothesenraum, und der Aktionsraum $A = (a_1, a_2)$ enthält lediglich die beiden Aktionen oder Letztentscheidungen

a_1: Annehmen der Nullhypothese,

a_2: Verwerfen der Nullhypothese oder Annehmen der Alternativhypothese.

b) *Bezüglich des Entscheidungsraumes D*

In der Menge D der 2^{n+1} theoretisch möglichen Entscheidungsfunktionen betrachten wir eine ausgezeichnete Teilmenge D^*, deren Elemente wie folgt definiert sind:

$y \in S$ Anzahl defekter Stücke in der Stichprobe vom Umfang n

4.2. $$d_k(y) = \begin{cases} a_1, & \text{falls } y \leqq k \\ a_2, & \text{falls } y > k \end{cases}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

k heisst auch *Annahmekennzahl.*

Die Auswahl der Teilmenge D^* nach 4.2. ist zumindest von der praktischen Seite her intuitiv klar. Sie lässt sich aber auch nach dem sogenannten Fundamentallemma von Neyman-Pearson begründen.

c) *Bezüglich der Nutzenfunktion* u_{ij}

Mit

4.3. $$\begin{cases} K = \text{Kosten des Abnehmers,} \\ fK = \text{Gewinn des Abnehmers, falls } \omega = \omega_1; \ 0 < f < 1, \\ s = s(n) = \text{Stichprobenkosten} \end{cases}$$

setzen wir fest

4.4. $$\begin{cases} u_{11} = fK - s; & u_{12} = -K - s \\ u_{21} = -s; & u_{22} = -s . \end{cases}$$

Das Tripel (A, Ω, u) ist somit eindeutig festgelegt.

Gemäss 3.3.5. berechnen wir nun die Nutzenerwartung oder das (negative) Risiko $r(d_k, \omega_j)$.

4.5. $$r(d_k, \omega_j) = \sum_{y=0}^{n} u[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j)\,; \qquad \begin{array}{l} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ j = 1, 2, \end{array}$$

wobei $$p(y|\omega_j) = \binom{n}{y} \cdot \omega_j^y (1-\omega_j)^{n-y}.$$

Unter Berücksichtigung von 4.2. geht 4.5. über in

4.6. $$\begin{aligned} r(d_k, \omega_1) &= u_{11} \sum_{y \leq k} p(y|\omega_1) + u_{21} \sum_{y>k} p(y|\omega_1) \\ r(d_k, \omega_2) &= u_{12} \sum_{y \leq k} p(y|\omega_2) + u_{22} \sum_{y>k} p(y|\omega_2)\,, \end{aligned}$$

wobei in natürlicher Weise die *Wahrscheinlichkeiten* α_k bzw. β_k *für einen Fehler 1. Art bzw. 2. Art* auftreten.

$$\alpha_k = \sum_{y>k} p(y|\omega_1)$$

$$\beta_k = \sum_{y \leq k} p(y|\omega_2)\,.$$

α_k ist dabei die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, obschon sie richtig ist.

β_k ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese anzunehmen, obschon sie falsch ist.

Aus 4.6. wird nun

4.6a. $$\begin{aligned} r(d_k, \omega_1) &= fK(1-\alpha_k) - s \\ r(d_k, \omega_2) &= -K \cdot \beta_k - s \end{aligned} \qquad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

$r(d_k, \omega_2) < 0$ für alle k.

Numerische Durchführung an einem Beispiel [3]

4.6b. $\begin{cases} \omega_1 = 0{,}25 \\ \omega_2 = 0{,}75 \\ n = 10 \end{cases}$ $\qquad K = 1000$ Fr., $f = 0{,}1$, $s = 10$ Fr.

Offenbar gilt: $p(y|\omega_2) = p(10-y|\omega_1)$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(y\|\omega_1)$	.056	.188	.283	.250	.146	.058	.016	.003	0	0	0
$p(y\|\omega_2)$	0	0	0	.003	.016	.058	.146	.250	.283	.188	.056

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werte α_k und β_k in Funktion der Annahmekennzahl k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α_k	.944	.756	.473	.223	.077	.019	.003	0	0	0
β_k	0	0	0	.003	.019	.077	.223	.473	.756	.944

Nach 4.6a. lassen sich nun die Nutzenerwartungen $r(d_k, \omega_j)$ berechnen, und man erhält

4.7.

	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
ω_1	–4,4	14,4	42,7	67,7	82,3	88,1	89,7	90	90	90
ω_2	–10	–10	–10	–13	–29	–87	–233	–483	–766	–954

Damit ist es uns gelungen, das Testen einer einfachen Nullhypothese $H_0: \omega = \omega_1$ gegen eine einfache Alternativhypothese $H_1: \omega = \omega_2$ in die Entscheidungsmatrix 4.7. oder in die Form (D, Ω, r) überzuführen, d.h. in das *Grundmodell der allgemeinen Entscheidungstheorie.*

Der Statistiker hat aus der Menge $D = \{d_0, d_1, \ldots, d_9\}$ eine Strategie d_k zu wählen, die, erfolgt sie im Zustand ω_j $(j = 1, 2)$, eine Nutzenerwartung $r(d_k, \omega_j) = r_{kj}$ besitzt.

Wählt er etwa d_2, so steht einem Gewinn von 42,7 ein Verlust von 10 gegenüber. Fällt die Wahl auf d_7, so kann der mögliche Gewinn auf 90 erhöht werden, wenn gleichzeitig ein massiv erhöhter Verlust von 483 riskiert wird.

Nach welchen Richtlinien oder Kriterien soll die Auswahl der «besten» oder «optimalen» Strategie d^* erfolgen?

5. Konstruktion optimaler Entscheidungsfunktionen

5.1. *Allgemeines*

Soeben haben wir gezeigt, wie sich ein statistisches Inferenzproblem in die allgemeine Entscheidungstheorie einbauen lässt.

Der ursprüngliche Raum A der (konstanten) Aktionen a_i ist ersetzt worden durch den Raum D der Entscheidungsfunktionen d_k, und über dem kartesischen Produkt $D \times \Omega$ ist nach 3.3.5. der mittlere Nutzen r definiert.

Da die Zustände $\omega_j \in \Omega$ *zum vornherein unbekannt* sind, befinden wir uns in der sogenannten Unsicherheitssituation im engern Sinne (siehe Abschnitt 2.1.).

5.2. *Die Unsicherheitssituation im engern Sinne*

In der modernen Literatur [8] findet man eine Reihe von Entscheidungskriterien, wobei das sogenannte *Minimax-Kriterium* von von Neumann eine besondere Stellung einnimmt.

Nach dem *Minimax-Kriterium* suchen wir jene Strategie d_k, für die die minimale Nutzenerwartung maximal ist (es ist in diesem Sinne eigentlich ein Maximin-Kriterium).

Gestützt auf den allgemeinen Fall 3.3.6. definieren wir d_k als optimal, falls

5.2.1.
$$\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{j} r_{kj} = \max\limits_{i} (\min\limits_{j} r_{ij}) \\ \text{oder} \\ \min\limits_{\omega_j \in \Omega} r(d_k, \omega_j) = \max\limits_{d_i \in D} \min\limits_{\omega_j \in \Omega} r(d_i, \omega_j)\,. \end{array}\right.$$

Tabelle 5

			Minimax	Bayessche Risiken $\bar{r}(\pi_1)$		
d_k	(1) $r(d_k, \omega_1)$	(2) $r(d_k, \omega_2)$	(3) $\min\limits_{j} r(d_k, \omega_j)$	(4) $\pi_1 = 0{,}1$	(5) $\pi_1 = 0{,}5$	(6) $\pi_1 = 0{,}9$
d_0	–4,4	–10	$\boxed{-10}$	–9,44	–7,2	–4,96
d_1	14,4	–10	$\boxed{-10}$	–7,56	2,2	11,96
d_2	42,7	–10	$\boxed{-10}$	$\boxed{-4{,}73}$	16,3	37,43
d_3	67,7	–13	–13	–4,93	$\boxed{27{,}3}$	59,63
d_4	82,3	–29	–29	–17,87	26,6	$\boxed{71{,}17}$
d_5	88,1	–87	–87	–69,49	0,5	70,59
d_6	89,7	–233	–233	–200,7	–71,6	57,43
d_7	90	–483	–483	–425,7	–196	32,7
d_8	90	–766	–766	–680,4	–338	4,4
d_9	90	–954	–954	–849,6	–432	–0,5

Aus Kolonne (3) obiger Tabelle entnehmen wir:

$$\max_{i} \min_{j} r(d_k, \omega_j) = -10\,.$$

Das Minimaxkriterium führt somit auf eine der 3 Strategien d_0, d_1, d_2; die Lösung ist nicht eindeutig. Aus praktischen Gründen entschliessen wir uns für d_2, um das Risiko 1. Art möglichst tiefzuhalten.

Über mehrdeutige Minimax-Lösungen siehe u.a. [9].

Dass wir bereits ab 3 defekten Stücken in der Stichprobe den Warenposten abweisen, zeigt, wie pessimistisch unsere optimale Strategie ausfiel. In der Tat ist das Minimax-Kriterium naturgemäss von einer «ängstlichen Vorsicht» gekennzeichnet, die in einer realen Situation nicht immer angebracht erscheint.

5.3. *Das Kriterium von Savage-Niehans*

Wenn wir anstelle der Nutzen oder Gewinne u_{ij} die sogenannten *entgangenen Nutzen* oder entgangenen Gewinne $l\,(a_i,\, \omega_j)$ einsetzen, so führt das Minimaxkriterium (es heisst in diesem Fall auch Kriterium von *Savage-Niehans*) auf eine *eindeutige* Lösung.

Unter dem *entgangenen* Gewinn oder entgangenen Nutzen $l\,(a_i, \omega_j)$ verstehen wir die Differenz zwischen dem effektiv erzielten Gewinn $u\,(a_i, \omega_j)$ und jenem, der bei optimaler Entscheidung (im Zustand ω_j) hätte realisiert werden können.

Def. 5.3.1. $\quad l\,(a_i,\, \omega_j) = \max\limits_k u\,(a_k,\, \omega_j) - u\,(a_i,\, \omega_j)\,; \qquad i, j, k = 1, 2.$

Die ursprüngliche Nutzenmatrix

	ω_1	ω_2
a_1	$fK - s$	$-K - s$
a_2	$-s$	s

geht dann über in die Matrix der entgangenen Gewinne

	ω_1	ω_2
a_1	0	K
a_2	fK	0

mit $K = 1000$
$f = 0{,}1$

$$\bar{l}(d_k,\, \omega_1) = fK \cdot \alpha_k = 100 \cdot \alpha_k$$

und

$$\bar{l}\,(d_k,\, \omega_2) = K \cdot \beta_k = 1000 \cdot \beta_k$$

sind dann die *mittleren entgangenen Gewinne* bei Verwendung der Strategie d_k im Zustand ω_j.

Kriterium von Savage-Niehans:

5.3.2. $\quad d_k$ heisst optimal, wenn

$$\max_j \bar{l}(d_k,\, \omega_j) = \min_i \max_j \bar{l}\,(d_i,\, \omega_j)\,.$$

Aus der nachstehenden Tabelle können wir die *eindeutige* Lösung, nämlich Strategie d_4, ablesen.

Tabelle 5.3.

d_k	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
$\bar{l}(d_k, \omega_1)$	94,4	75,6	47,3	22,3	7,7	1,9	0,3	0	0	0
$\bar{l}(d_k, \omega_2)$	0	0	0	3	19	77	223	473	756	944
$\max\limits_j \bar{l}(d_k, \omega_j)$	94,4	75,6	47,3	22,3	$\boxed{19}$ min max	77	223	473	756	944

5.4. *Die Risikosituation* [10]

Kann über dem Raum Ω der Zustände ω_j eine Wahrscheinlichkeitsverteilung W als bekannt vorausgesetzt werden, so befinden wir uns in der sogenannten Risikosituation.

Sei $p(\omega_j) = \pi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Umwelt sich im Zustand ω_j befindet.

Die π_j heissen *A-priori-Wahrscheinlichkeiten* und $W = \{\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m\}$ die A-priori-Verteilung über Ω.

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$$

Definition: Unter dem *Bayesschen Risiko* $\bar{r}(d_k)$ einer Strategie d_k verstehen wir den Erwartungswert von r_{kj} bezüglich der Verteilung W über Ω.

5.4.1. $$\bar{r}(d_k) = \sum_{j=1}^{m} r(d_k, \omega_j) \cdot \pi_j \,.$$

Nach dem sogenannten *Bayesschen Kriterium* ist eine Strategie oder Entscheidungsfunktion d_k genau dann optimal, wenn

5.4.2. $$\bar{r}(d_k) \geqq \bar{r}(d_i) \qquad \text{für alle } i \neq k \,.$$

Das Bayessche Kriterium fordert also die Maximierung der Bayesschen Risiken, welche im Sinne unserer Betrachtung negative Risiken, nämlich Nutzenerwartungen sind.

Da oft die A-priori-Verteilung $W = \{\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m\}$ über Ω nicht bekannt ist oder aus *subjektiven* Schätzungen hervorgeht, kann man etwa annehmen (Prinzip des unzureichenden Grundes), alle π_j seien gleich. Man spricht dann vom sogenannten *Laplaceschen Entscheidungskriterium,* das auf der Gleichverteilung über Ω beruht.

Die Strategie $d_k \in D$ ist nach Laplace genau dann optimal. wenn

5.4.3. $$\sum_{j=1}^{m} r(d_k, \omega_j) \geqq \sum_{j=1}^{m} r(d_i, \omega_j) \qquad \text{für alle } i \neq k\,.$$

6. Anwendung des Bayesschen Kriteriums auf die Entscheidungssituation 4.7.

Über dem Zustandsraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W = (\pi_1, \pi_2) \quad \text{mit} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \text{gegeben.}$$

$\pi_1 = p(\omega_1)$ ist dabei als Idealmass aufzufassen für die Glaubwürdigkeit, dass der Lieferant einen «guten» Warenposten anbietet (d.h. dass sich die Umwelt im Zustand $\omega = \omega_1$ befindet).

Wir werden nun zwei verschiedene Wege zur Bestimmung der optimalen Strategie beschreiten, nämlich die «*integrale*» und die «*konstruktive*» Methode.

6.1. *Die «integrale» Methode*

Wir gehen aus von der Entscheidungsmatrix 3.3.6. oder vom Tripel (D, Ω, r).

Nach 5.4.1. berechnen sich die Bayesschen Risiken $\bar{r}(d_k)$ wie folgt:

6.1.1. $$\begin{aligned} \bar{r}(d_k) &= \sum_{\omega_j \in \Omega} r(d_k, \omega_j) \cdot p(\omega_j) \\ &= \sum_{\omega_j \in \Omega} \left(\sum_{y \in s} u[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \right) \cdot p(\omega_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{y=0}^{n} u[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \right) \cdot \pi_j\,. \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck von 6.1.1. geht auf Grund von 4.6a und 4.6b über in

6.1.2. $$\bar{r}(d_k) = \{fK(1-\alpha_k)-s] \cdot \pi_1 + [-K\beta_k - s] \cdot \pi_2$$
$$= 100(1-\alpha_k) \cdot \pi_1 - 1000 \cdot \beta_k \cdot \pi_2 - 10\,.$$

Tabelle 5 enthält in den Kolonnen (4), (5) und (6) die Bayesschen Risiken für verschiedene Werte von π_1, d.h. für verschiedene A-priori-Verteilungen über Ω.

So findet man etwa in Kolonne (6) für $\pi_1 = 0{,}9$ ein maximales Bayessches Risiko von 71,17, und die zugehörige optimale Strategie ist d_4.

Praktische Interpretation

Sobald der Abnehmer mit guten Gründen annehmen darf, es werde ihm höchstwahrscheinlich (π_1=0,9) ein guter Warenposten ($\omega = \omega_1$) angeboten, so wird er die Entscheidungsregel d_4 zugrunde legen. Diese fällt gemäss unserem A-priori-Wissen viel optimistischer aus als jene nach der Minimaxregel, was auch rein intuitiv zu erklären ist.

Für jedes feste k ist das Bayessche Risiko eine lineare Funktion von π_1:

6.1.3. $$\bar{r}_k(\pi_1) = r(d_k, \omega_1) \cdot \pi_1 + r(d_k, \omega_2) \cdot (1-\pi_1)\,.$$

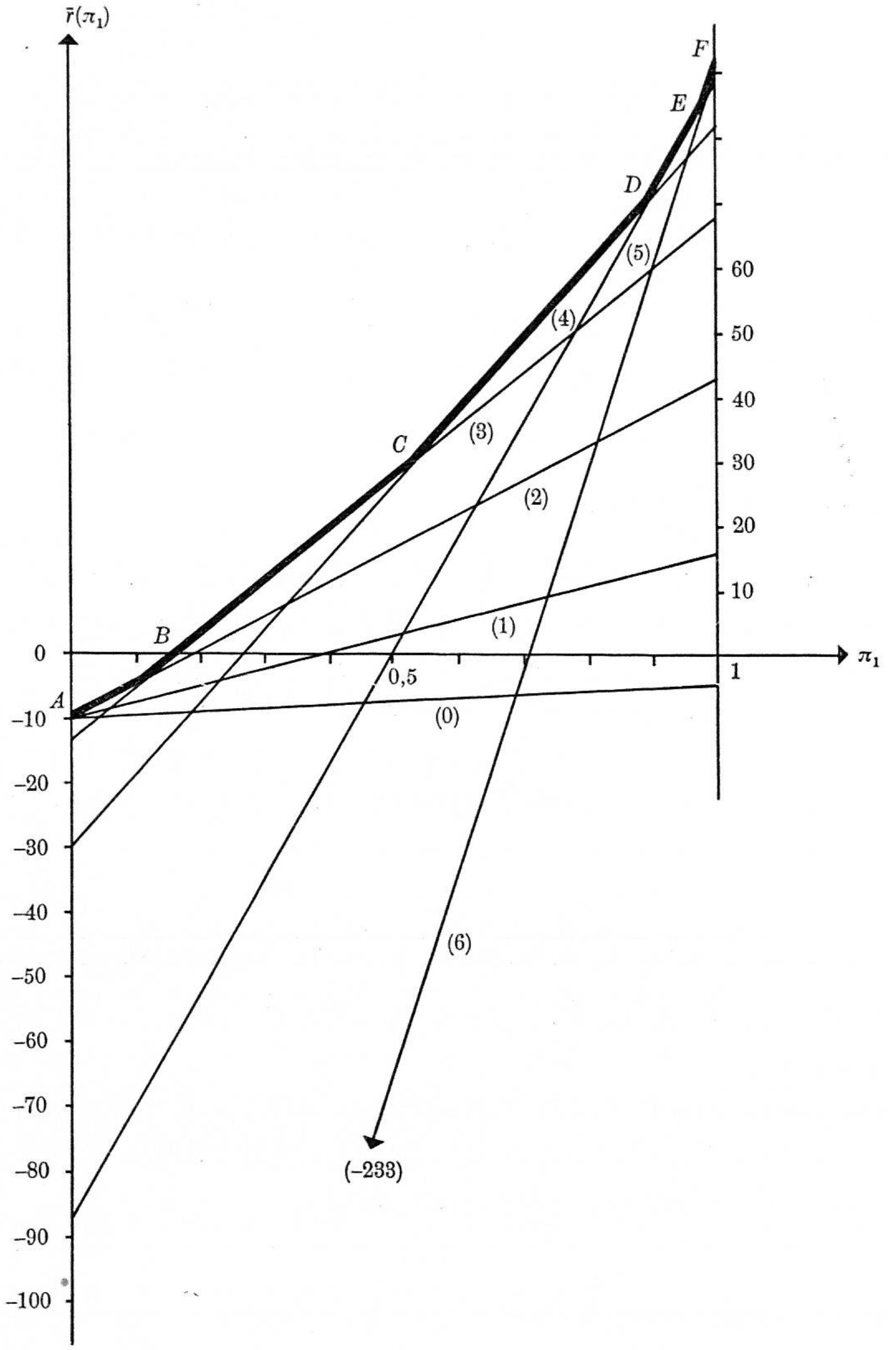
In der nachstehenden Figur 6 sind die Geraden für $k = 0, 1, \ldots 6$ eingezeichnet.

Der oberste einhüllende Streckenzug *ABCDEF* vermittelt uns zu jedem Wert $\pi_1 \in [0, 1]$ die optimale Bayessche Strategie. Für $\pi_1 = 0{,}8$ liest man z.B. die optimale Strategie d_4 ab.

6.2. *Die «konstruktive» Methode*

Im Gegensatz zur integralen Methode beziehen wir uns jetzt auf die ursprüngliche Entscheidungsmatrix E_1 in 3.3.2. oder auf das Tripel (A, Ω, u), und über Ω sei wieder eine A-priori-Verteilung $W = \{\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m\}$ gegeben.

Fig. 6


$\bar{r}(\pi_1)$
π_1
A
B
C
D
E
F
(0)
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(–233)
0
–10
–20
–30
–40
–50
–60
–70
–80
–90
–100
0,5
1
10
20
30
40
50
60

6.2.1

	π_1 ω_1	π_2 ω_2	$\dots$	π_m ω_m
a_1	u_{11}	u_{12}		u_{1m}
a_2	u_{21}	u_{22}		u_{2m}

Sei $y \in S$ die Realisation der Stichprobe, d.h. die Anzahl defekter Stücke. Diese Beobachtung y (Träger neuer Information) gibt nun Anlass zu einer Änderung der ursprünglichen A-priori-Wahrscheinlichkeiten $p(\omega_j) = \pi_j$.

Nach der *Bayesschen Regel* berechnen sich die sogenannten *A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten*

$$p(\omega_j|y) = \left\{\begin{array}{l}\text{Wahrscheinlichkeit, dass } \omega = \omega_j, \text{ gegeben die Beobachtung} \\ y \in S\end{array}\right\}$$

wie folgt:

6.2.2. $$p(\omega_j|y) = \frac{p(y|\omega_j) \cdot p(\omega_j)}{\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p(y|\omega_i) \cdot p(\omega_i)} = \frac{p(y|\omega_j) \cdot \pi_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} p(y|\omega_i) \cdot \pi_i)}.$$

Ein Zahlenbeispiel möge die Änderung illustrieren:

$m = 2$ (nach Abschnitt 4); $\omega_1 = 0{,}25$, $\omega_2 = 0{,}75$

$n = 10$ (Stichprobenumfang)

$y = 6$ beobachtete Anzahl defekter Stücke

$\pi_1 = 0{,}9$ A-priori-Wahrscheinlichkeit für guten Warenposten

$$p(\omega_1|6) = \frac{p(6|\omega_1) \cdot 0{,}9}{p(6|\omega_1) \cdot 0{,}9 + p(6|\omega_2) \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}016 \cdot 0{,}9}{0{,}016 \cdot 0{,}9 + 0{,}146 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}5.$$

Das ursprüngliche Vertrauen auf Lieferung eines guten Warenpostens, das sich in der nahe bei Eins gelegenen Wahrscheinlichkeit π_1 manifestierte, ist auf Grund der relativ hohen Anzahl von defekten Stücken ($y = 6$) auf rund 0,5 gesunken.

Konstruktion der optimalen Strategie

Zu jedem $y \in S$ $(y = 0, 1, \ldots, n)$ wählen wir jene Letztentscheidung $a_k \in A$ $(k = 1, 2)$ für die

der *A-posteriori-Erwartungswert* des Nutzens *möglichst gross* wird, d.h.

$$\text{6.2.3.} \qquad \sum_j u_{kj} \cdot p(\omega_j | y) \geqq \sum_j u_{ij} \cdot p(\omega_j | y)\,; \qquad i \neq k\,.$$

6.2.3. induziert somit eine Entscheidungsfunktion $d^* \in D$, und zwar eine optimale im Sinne der jeweiligen Maximierung der Nutzenerwartungen.

Im Falle $\pi_1 = \pi_2 = 0{,}5$ (Laplace-Kriterium) ergibt die Konstruktion:

Wenn	$y \leqq 3$	dann wähle a_1
Wenn	$y > 3$	dann wähle a_2.

Diese Strategie ist aber identisch mit d_3, d.h. mit der nach der integralen Methode im Falle $\pi_1 = 0{,}5$ gefundenen optimalen Strategie. Dies ist kein Zufall, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

6.3. *Äquivalenz der beiden Methoden*

Vorerst zeigen wir, dass eine im Sinne der konstruktiven Methode optimale Strategie d^* auch optimal ist nach der integralen Methode.

Zu zeigen: Das nach 6.1.1. definierte (negative) Bayessche Risiko ist für $d^* \in D$ am grössten, d.h.

$$\text{6.3.1.} \qquad \max_{d \in D} \bar{r}(d) = \bar{r}(d^*) = \sum_{\omega_j \in \Omega} \left(\sum_{y \in S} u[d^*(y), \omega_j] \cdot p(y|\omega_j) \right) \cdot p(\omega_j)\,.$$

Nach der Bayesschen Regel folgt:

$$\text{6.3.2.} \qquad p(y|\omega_j) \cdot p(\omega_j) = p(\omega_j|y) \cdot p(y)\,.$$

Die rechte Seite von 6.3.1. geht nun nach 6.3.2. und der Änderung der Reihenfolge der Summation über in

6.3.3. $$\bar{r}(d^*) = \sum_{y \in S} \underbrace{\left(\sum_{\omega_j \in \Omega} u[d^*(y), \omega_j] \cdot p(\omega_j | y) \right)}_{E_y} \cdot p(y) .$$

Nach Voraussetzung ordnet aber die optimale Strategie d^* jedem $y \in S$ jene Aktion $a_i \in A$ zu, für welche der A-posteriori-Erwartungswert E_y möglichst gross ist. Damit wird aber auch die äussere Summe in 6.3.3. maximal. q.e.d.

Sei nun $\tilde{d}$ die optimale Strategie nach der integralen Methode, d.h.

6.3.4. $$\bar{r}(\tilde{d}) \geqq \bar{r}(d) \quad \text{für alle} \quad d \in D .$$

Andererseits haben wir für d^* soeben bewiesen

6.3.5. $$\bar{r}(d^*) \geqq \bar{r}(d) \quad \text{für alle} \quad d \in D .$$

Da 6.3.4. insbesondere für $d = d^*$ und 6.3.5. für $d = \tilde{d}$ gilt, folgt schliesslich

$$\bar{r}(\tilde{d}) \geqq \bar{r}(d^*) \geqq \bar{r}(d)$$

und $$\bar{r}(\tilde{d}) = \bar{r}(d^*) .$$

Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

6.4. *Zusammenfassung und symbolische Übersicht*

Nach der *integralen* Methode wird, ausgehend vom Tripel (A, Ω, u), über dem Stichprobenraum S der Raum D der Entscheidungsfunktionen aufgebaut, was zum Tripel (D, Ω, r) führt.

Die Maximierung der A-priori-Erwartungswerte führt zur optimalen Strategie $\tilde{d}$.

Nach der *konstruktiven* Methode wird die A-priori-Wahrscheinlichkeit π_j auf Grund der Stichprobeninformation $y \in S$ nach der Bayesschen Formel modifiziert. Die Maximierung der A-posteriori-Erwartunswerte definiert dann die optimale Strategie d^*.

Das nachfolgende Diagramm symbolisiert die beiden Varianten, die zum selben Ziel führen; dabei bedeuten:

$\bar{\Omega}$:	Zustandsraum, versehen mit A-priori-Verteilung.
Ω^*:	Zustandsraum, versehen mit A-posteriori-Verteilung.
$\xrightarrow{S}$:	über dem Stichprobenraum S erfolgt die Konstruktion von …
$E_{\bar{\Omega}}$ bzw. E_{Ω^*}:	Erwartungswert bezüglich $\bar{\Omega}$ bzw. Ω^*

$$\begin{tikzcd}
(A, \bar{\Omega}, u) \arrow[d, "S"'] & & (A, \Omega, u) \arrow[ll] \arrow[rr, "S"] & & (D, \Omega, r) \arrow[d] \\
(A, \Omega^*, u) \arrow[rr, "\text{Max}", "E_{\Omega^*}"'] & & d^* = \tilde{d} & & (D, \bar{\Omega}, r) \arrow[ll, "\text{Max}"', "E_{\bar{\Omega}}"]
\end{tikzcd}$$

7. Spieltheoretische Interpretation

Wir beziehen uns auf die Bemerkungen von Abschnitt 2.4. und interpretieren das Tripel (A, Ω, u) als Spielmatrix 2. Ordnung eines sogenannten 2-*Personen-Nullsummenspiels* des Entscheidenden (Statistiker) als 1. Spieler gegen die Umwelt oder Natur als 2. Spieler.

u_{ij} ist dann der Nutzen oder Gewinn des 1. Spielers und gleichzeitig der Verlust des 2. Spielers bei Anwendung der Strategien a_i bzw. ω_j.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_1 = (\pi_1, \pi_2)$ über Ω können wir dann als sogenannte *gemischte Strategie* der Umwelt bezeichnen und entsprechend eine Verteilung $W_2 = (p_1, p_2)$ über dem Aktionsraum A als gemischte Strategie des Entscheidenden.

Die erstere bezeichnen wir fortan mit $(\pi_1, \omega_1, \pi_2\, \omega_2)$ und die letztere mit $(p_1\, a_1, p_2\, a_2)$.

Eine Strategie mit $\pi_i = 1$ (bzw. $p_i = 1$) heisst eine *reine* Strategie.

7.1.

		π_1	π_2
		ω_1	ω_2
p_1	a_1	u_{11}	u_{12}
p_2	a_2	u_{21}	u_{22}

Nach 4.4. geht 7.1. über in

7.2.

	ω_1	ω_2
a_1	$fK-s$	$-K-s$
a_2	$-s$	$-s$

Grundsätzlich ist festzuhalten, dass die Lösung des Spiels 7.1. entweder im Bereich der reinen oder der gemischten Strategien liegt. Im 1. Fall besitzt die Spielmatrix einen sogenannten *Sattelpunkt,* im 2. Fall nicht.

Die folgenden Sätze beziehen sich auf 2-Personen-Nullsummenspiele.

Satz 7.1. Wenn u_{ij} zugleich Zeilenminimum und Kolonnenmaximum ist, ist (i, j) ein Sattelpunkt und umgekehrt.

Satz 7.2. Kriterium von *von Neumann* [11]. Eine Spielmatrix 2. Ordnung besitzt genau dann keinen Sattelpunkt, wenn die Elemente in den Diagonalen «separierbar» sind, d. h. wenn

$$u_{11} > u_{12} \quad \text{und} \quad u_{22} > u_{21}$$

oder

$$u_{11} < u_{12} \quad \text{und} \quad u_{22} < u_{21}\,.$$

Satz 7.3. Wenn die Voraussetzungen von Satz 7.2. erfüllt sind, hat das Spiel eine eindeutige Lösung im Bereich der gemischten Strategien, und zwar

1. Spieler: $(p_1^* a_1, p_2^* a_2)$ mit $p_1^* = \dfrac{u_{22}-u_{21}}{u_{11}+u_{22}-u_{12}-u_{21}}$

$$p_2^* = 1 - p_1^*$$

2. Spieler: $(\pi_1^* \omega_1, \pi_2^* \omega_2)$ mit $\pi_1^* = \dfrac{u_{22}-u_{12}}{u_{11}+u_{22}-u_{12}-u_{21}}$

$$\pi_2^* = 1 - \pi_1^*.$$

Das spezielle Spiel 7.2. hat nach Satz 7.1. einen Sattelpunkt in (2,2) mit einer eindeutigen Lösung im Bereich der reinen Strategien:

«Der Entscheidende wählt Aktion a_2 und die Umwelt den Zustand ω_2.»

Damit resultiert der Nutzen $u_{22} = -s$, der sogenannte *Wert* des Spiels. Wählt man anstelle der ursprünglichen Nutzen oder Gewinne u_{ij} die nach 5.3.1. definierten *entgangenen Gewinne* $l(a_i, \omega_j)$, so geht 7.2. über in

7.3.

	ω_1	ω_2
a_1	0	K
a_2	fK	0

Diese Matrix wird als Nullsummenspiel aufgefasst, wobei die entgangenen Gewinne als «Schaden» des 1. Spielers (Statistiker) und gleichzeitig als Nutzen des 2. Spielers (Umwelt) zu interpretieren sind. Nach den Sätzen 7.2. und 7.3. besitzt dieses Spiel eine eindeutige Lösung im Bereich der gemischten Strategien, nämlich:

1. Spieler: $$\left(\frac{f}{1+f}a_1,\ \frac{1}{1+f}a_2\right);$$

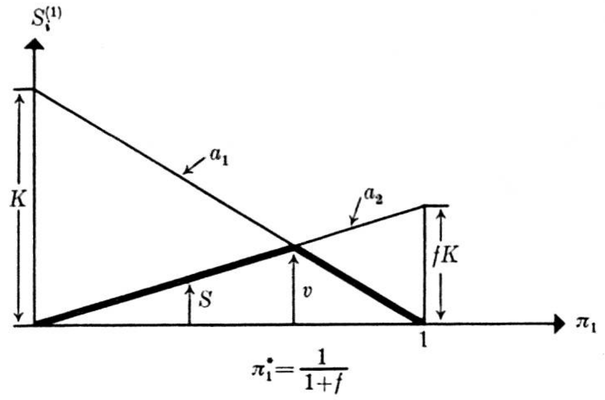
2. Spieler: $$\left(\frac{1}{1+f}\omega_1,\ \frac{f}{1+f}\omega_2\right).$$

Geometrische Interpretation

Sei $S_i^{(1)}$ der erwartete Schaden des Statistikers, wenn er a_i wählt und die Umwelt $(\pi_1\omega_1, \pi_2\omega_2)$ mit $\pi_2 = 1-\pi_1$.

Man findet: $$S_1^{(1)} = K(1-\pi_1)$$ $$S_2^{(1)} = fK \cdot \pi_1$$ $$0 \leqq \pi_1 \leqq 1.$$

Fig. 7.1.



$$S = \min_{i=1,2} S_i^{(1)}$$

$$v = \max_{\pi_1 \in [0,1]} \min_{i=1,2} S_i^{(1)} = \frac{fK}{1+f}$$

$(\pi_1^* \omega_1, \pi_2^* \omega_2)$ mit $\pi_1^* = \dfrac{1}{1+f}$ ist die optimale Strategie der Umwelt (auch ungünstigste A-priori-Verteilung genannt), zwecks Maximierung der minimalen Schäden ihres Gegenspielers.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie $\pi_1^* = \dfrac{1}{1+f}$ bei der Bestimmung der optimalen Strategie (nach der sogenannten konstruktiven Mehtode und unter Benützung der entgangenen Gewinne – siehe 6.2.3) eine Rolle spielt.

8. Brückenschlag zur «klassischen Statistik»

Wir gehen aus vom Tripel (A, Ω, l), das wir soeben spieltheoretisch interpretiert haben.

Aus Figur 7.1 liest man für den 1. Spieler folgende Entscheidungsregel ab:

8.1.
$$\pi_1 < \frac{1}{1+f} \longrightarrow \text{Aktion } a_2$$

$$\pi_1 = \frac{1}{1+f} \longrightarrow \text{Aktion } a_1 \text{ oder Aktion } a_2$$

$$\pi_1 > \frac{1}{1+f} \longrightarrow \text{Aktion } a_1,$$

Nach der sogenannten *konstruktiven* Methode (siehe 6.2.3.) ordnen wir jedem Stichprobenergebnis $y \in S$ jene Aktion a_i zu, für die der *A-posteriori-Erwartungswert der entgangenen Gewinne möglichst klein ist.*

Ersetzt man daher in 8.1. die A-priori-Wahrscheinlichkeiten $\pi_1 = p(\omega_1)$ durch die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $p(\omega_1|y)$, so modifiziert sich die *statistische* Entscheidungsregel nach der konstruktiven Methode wie folgt:

8.2.
$$p(\omega_1|y) < \frac{1}{1+f} \longrightarrow a_2$$
$$p(\omega_1|y) = \frac{1}{1+f} \longrightarrow a_1 \text{ oder } a_2$$
$$p(\omega_1|y) > \frac{1}{1+f} \longrightarrow a_1 .$$

Nach 6.2.2. folgt für $p(\omega_1|y)$ nach einer kleinen Umformung:

8.3.
$$p(\omega_1|y) = \frac{1}{1+\dfrac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)}\cdot\dfrac{1-\pi_1}{\pi_1}}\,; \qquad \frac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} = Q\,.$$

8.2. geht dann über in die äquivalente Form

8.4.
$$\begin{cases} \dfrac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} > C \longrightarrow a_2 \\[2ex] \dfrac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} > C \longrightarrow a_1 \text{ oder } a_2 \\[2ex] \dfrac{p(y|\omega_2)}{p(y|\omega_1)} < C \longrightarrow a_1, \end{cases}$$

wobei C Lösung der Gleichung

8.5.
$$\frac{1}{1+Q\dfrac{1-\pi_1}{\pi_1}} = \pi_1^* = \frac{1}{1+f}$$ in der Unbekannten Q ist.

Aus 8.5. folgt:

8.6.
$$C = f\frac{\pi_1}{1-\pi_1} .$$

Mit 8.4., dem sogenannten *Likelihood-Quotiententest*, haben wir die Nahtstelle mit der «klassischen» Statistik gefunden.

Es ist uns gelungen, die Grenzzahl C durch eine ökonomische Bewertung einerseits (f = Gewinnsatz) *und sogenannte A-priori-Vorurteile andererseits* (π_1 = Idealmass für die Glaubwürdigkeit in «guten» Warenposten) *zu motivieren und mittels 8.6. funktionell darzustellen.*

Interessant ist die Feststellung, dass sich die *ungünstigste A-priori-Verteilung* $\pi_1^* = \frac{1}{1+f}$ (vom Entscheidenden aus gesehen) auch von den ursprünglichen Nutzen oder Gewinnen her (7.2.) ableiten lässt.

*Berechnung der optimalen Annahmekennzahl k**

Ersetzt man in 8.4. die $p(y|\omega_i)$ durch

$$p(y\,|\omega_i) = \binom{n}{y}\omega_i^y(1-\omega_i)^{n-y} ,$$

so geht etwa die linke Seite der 1. Zeile von 8.4. über in

8.4a.
$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^y \cdot \left(\frac{1-\omega_2}{1-\omega_1}\right)^{n-y} > C ; \qquad \omega_2 > \omega_1$$

weiter folgt durch Logarithmieren

$$Ay - B(n-y) > \log C \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} A &= \log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0 \\ B &= -\log\left(\frac{1-\omega_2}{1-\omega_1}\right) > 0 \end{aligned}$$

oder
$$y > \frac{\log C + nB}{A+B} .$$

Da $y \in S$ nur ganzzahlige Werte (oder Null) annehmen kann, folgt für die optimale Annahmekennzahl k^* im Sinne des Bayesschen Kriteriums

8.7. $$k^* = \left[\frac{\log C + nB}{A + B}\right],$$ wobei $[x]$ = grösste ganze Zahl kleiner als x.

Ersetzt man C nach 8.6., so folgt endlich:

8.8. $$k^* = \left[\frac{\log\left[f\dfrac{\pi_1}{1-\pi_1}\right] + n\log\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\log\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\cdot\dfrac{1-\omega_1}{1-\omega_2}\right)}\right].$$

Obige Formel gestattet uns im Falle des Testens einer einfachen Hypothese $\omega = \omega_1$ gegen eine einfache Alternative $\omega = \omega_2$ $(\omega_2 > \omega_1)$ bei gegebener ökonomischer Bewertung nach 7.2. bzw. 7.4. (f = Gewinnsatz) und bekannter A-priori-Verteilung $W = (\pi_1, 1-\pi_1)$ über Ω die nach dem *Bayesschen Kriterium* optimale Annahmekennzahl k^* bzw. die optimale Entscheidungsfunktion d_k^* zu berechnen.

Ein Zahlenbeispiel: $f = 0{,}1$; $\pi_1 = 0{,}7$; $n = 10$
$\omega_1 = 0{,}25$; $\omega_2 = 0{,}75$.

Nach Figur 6 müsste k^* offenbar 4 sein.

Nach 8.8:

$$k^* = \left[\frac{\log\left(\dfrac{7}{30}\right) + 10\cdot\log 3}{\log 9}\right] = [4{,}03] = 4\,.$$

9. Planung bei Unsicherheit

9.1. *Einleitung*

Die bisherigen Betrachtungen erstreckten sich auf die entscheidungstheoretische Interpretation und Lösung eines innerstatistischen Problems, nämlich auf das *Testen von Hypothesen.* Dabei beschränkten wir uns (besonders bei den Konstruktion optimaler Strategien) auf den Zustandsraum Ω mit 2 möglichen Zuständen ω_1 und ω_2.

Wir wollen im folgenden den Anwendungsbereich etwas weiter fassen und die *Planung bei Unsicherheit* entscheidungstheoretisch motivieren und in gewissen Fällen die *optimale Strategie konstruieren.*

Dabei kommen neue Aspekte hinzu, nämlich:

a) anstelle der Gewinne (Nutzen) werden jetzt grundsätzlich die *entgangenen Gewinne* oder «opportunity losses» der ökonomischen Bewertung zugrunde gelegt;

b) die oben definierten Gewinne werden als *lineare Funktion* der Zustandsvariablen ω angenommen;

c) der Zustandsraum Ω wird auch auf das ganze Intervall $\Omega = [0, 1]$ erstreckt (unendlicher Zustandsraum);

d) über $\Omega = [0, 1]$ wird eine besonders umfassende Klasse von A-priori-Verteilungen näher studiert.

9.2. *Formulierung des Problems*

Ein Unternehmen plant die Fabrikation eines neuen Artikels, der nur während einer kurzen Zeit auf dem Markt abgesetzt werden kann. Dabei sei unbekannt, welcher *Anteil* ω $(0 \leqq \omega \leqq 1)$ der potentiellen Käuferschaft (N Personen) den Artikel beschaffen wird.

Vereinfachende Annahmen (unter Ceteris-paribus-Voraussetzung):

9.2.1.

$F =$ fixe Herstellungskosten, die bei der Fabrikation neu erwachsen.

$g =$ Nettogewinn pro Stück (dieser Gewinn versteht sich als Restgrösse aus Verkaufspreis abzüglich variable Kosten pro Stück).

$\bar{\omega} =$ Anteil der potentiellen Käuferschaft, für den die fixen Kosten durch den Verkauf gerade gedeckt werden, d.h. $N \cdot \bar{\omega} \cdot g = F$.

Die Unternehmensleitung verfüge über *zwei Aktionen* oder Letztentscheidungen:

a_1: nicht fabrizieren

a_2: fabrizieren.

Die Zustände $\omega \in [0,1]$ (oder ω_j, wenn es nur endlich viele Zustände gibt) sind die theoretisch möglichen Absatz- oder Verkaufsziffern.

Erfolgt die Aktion $a_i\,(i = 1, 2)$ im Zustand ω, so resultiere daraus ein Gewinn $u(a_i, \omega)$ bzw. $u(a_i, \omega_j)$, für den wir folgenden Ansatz machen.

9.2.2.
$$\begin{cases} u(a_1, \omega) = 0 \\ u(a_2, \omega) = c(\omega - \bar{\omega})\,; \qquad c > 0, \qquad 0 < \bar{\omega} < 1, \end{cases}$$

wobei noch gilt: $$c\,\bar{\omega} = F = N\bar{\omega}g$$

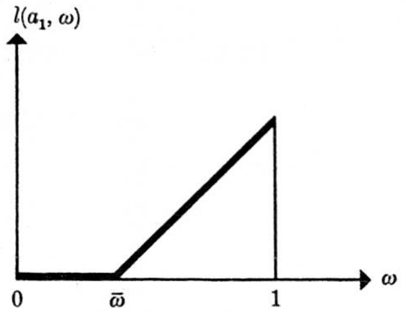
oder $$c = Ng\,.$$

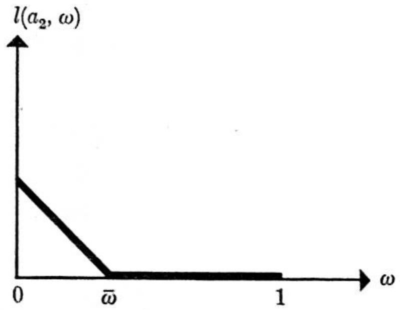
Praktisch wohl von grösserer Bedeutung sind die sogenannten *entgangenen Gewinne* oder «opportunity losses» $l(a_i, \omega)$, die nach 5.3.1. wie folgt definiert sind:

9.2.3.
$$l(a_i, \omega) = \max_{h=1,2} u(a_h, \omega) - u(a_i, \omega) \qquad [12]$$

Nach 9.2.2. folgt dann

9.2.4.
$$\begin{cases} l(a_1, \omega) = \begin{cases} 0\,; & \omega \leqq \bar{\omega} \\ c(\omega - \bar{\omega})\,; & \omega \geqq \bar{\omega} \end{cases} \\[2ex] l(a_2, \omega) = \begin{cases} c(\bar{\omega} - \omega)\,; & \omega \leqq \bar{\omega} \\ 0\,; & \omega \geqq \bar{\omega}\,. \end{cases} \end{cases}$$





Stichprobenerhebung. Entscheidungsfunktionen

Mittels einer Stichprobe werden wir auch hier versuchen, Information über die unbekannten Zustände $\omega \in \Omega$ einzuholen.

Konkret werden z. B. n *Personen* aus dem potentiellen Käuferkreis *zufällig* befragt, ob sie den besagten Artikel kaufen werden oder nicht.

Unter gewissen, in 3.3. formulierten Voraussetzungen ist wiederum die Anwendung der Binomialverteilung erlaubt.

Y = Anzahl Personen unter den n befragten, die mit *ja* antworten.

9.2.5.
$$p\{Y = y \mid \omega\} = p(y \mid \omega) = \binom{n}{y} \cdot \omega^y (1-\omega)^{n-y}$$
$$p\{Y \leqq k \mid \omega\} = \sum_{y \leq k} p(y \mid \omega) \overset{\text{Def.}}{=} \Phi(k \mid \omega)\,.$$

$\Phi(k \mid \omega)$ ist die sogenannte *Verteilungsfunktion.*

Dabei haben wir wiederum eine Entscheidungsfunktion oder Strategie d_k festzulegen, die jedem $y \in S$ genau eine Aktion $a_i\,(i = 1, 2)$ zuordnet.

Analog 4.2. definieren wir die folgende Teilmenge von Entscheidungsfunktionen

9.2.6.
$$d_k(y) = \begin{cases} a_1, & \text{falls } y \leqq k \\ a_2, & \text{falls } y > k \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Zu jedem Zustand $\omega \in \Omega$ berechnet sich jetzt das sogenannte *Risiko* oder der *mittlere entgangene Gewinn* $r(d_k, \omega)$

$$r(d_k, \omega) = \sum_{y=0}^{n} l[d_k(y), \omega] \cdot p(y \mid \omega)$$

oder gemäss 9.2.5. und 9.2.6.

9.2.7.
$$r(d_k, \omega) = \Phi(k \mid \omega) \cdot l(a_1, \omega) + [1 - \Phi(k \mid \omega)] \cdot l(a_2, \omega)\,.$$

Konstruktion optimaler Strategien

10. Unsicherheitssituation i. e. S. Endlicher Zustandsraum. Minimax-Kriterium

Über die Häufigkeit des Auftretens der $\omega_j \in \Omega$ $(j = 1, 2, \ldots m)$ sei nichts bekannt. In einer solchen Situation kann man etwa mit dem

Minimax-Kriterium die optimale Strategie d_k bestimmen. d_k heisst dann optimal, wenn

10.1. $$\max_{\omega_j \in \Omega} r(d_k, \omega_j) = \min_{d_i \in D} \max_{\omega_j \in \Omega} r(d_i, \omega_j) .$$

Konkrete Durchführung an einem praktischen Beispiel

In der Praxis mag es vorkommen, dass lediglich einige wenige Zustände oder Anteile ω_j als möglich erscheinen.

Wir treffen deshalb folgende Annahmen:

10.2. $$\begin{cases} \omega_j = \dfrac{j}{100} ; & j = 0, 1, 2, \ldots, 8 \\ \bar{\omega} = \dfrac{4}{100} & \\ n = 100 & (= \text{Anzahl der befragten Personen}) \end{cases}$$

und in Anlehnung an 9.2.4., indem man ω durch ω_j ersetzt,

10.3. $$l(a_1, \omega_j) = \begin{cases} 0; & 0 \leqq j \leqq 4 \\ c(j-4); & 4 < j \leqq 8 \end{cases}$$
$$l(a_2, \omega_j) = \begin{cases} c(4-j); & 0 \leqq j \leqq 4 \\ 0; & 4 < j \leqq 8 \end{cases} .$$

Die mittleren entgangenen Gewinne (Risiken) berechnen sich nun nach 9.2.7. unter Berücksichtigung von 10.2. und 10.3. wie folgt:

10.4. $$r(d_k, \omega_j) = \begin{cases} c \cdot [1 - \Phi(k \mid \omega_j)] \cdot (4-j); & 0 \leqq j \leqq 4 \\ c \cdot \Phi(k \mid \omega_j) \cdot (j-4); & 4 < j \leqq 8 . \end{cases}$$

Bei der Optimierung kann man offenbar $c > 0$ vernachlässigen, und $\Phi(k|\omega_j)$ berechnet sich nach der Poisson-Verteilung mit hinreichender Genauigkeit:

10.5. $$\Phi(k \mid \omega_j) = \Phi\left(k \,\middle|\, \frac{j}{100}\right) \approx \sum_{s=0}^{k} \frac{e^{-j} \cdot j^s}{s!} ; \quad k = 0, 1, \ldots, 99 .$$

Die numerischen Werte von 10.5. wurden dem Tabellenwerk [13] entnommen.

Bis auf den konstanten Faktor $c > 0$ sind die mittleren entgangenen Gewinne $r(d_k, \omega_j)$ nachfolgend tabelliert.

Hierbei ist zu beachten: $\Phi(k \mid \omega_0) = \Phi(k \mid 0) = 1$ für $k = 0, 1, \ldots,$

$r(d_k, \omega_8) > 1$ für $k > 6$.

Tabelle 10.1. $\boxed{r(d_k, \omega_j)}$

$d_k \backslash \omega_j$	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	Max	
d_0	0	1.899	1.730	0.951	0	0.007	0.005	0.003	0.001	1.899	
d_1	0	0.795	1.188	0.801	0	0.040	0.034	0.021	0.009	1.188	
d_2	0	0.243	0.648	0.577	0	0.125	0.124	0.058	0.028	0.648	
d_3	0	0.057	0.286	0.353	0	0.265	0.302	0.243	0.168	$\boxed{0.353}$	Min Max
d_4	0	0.012	0.106	0.185	0	0.440	0.570	0.519	0.400	0.570	
d_5	0	0.003	0.034	0.084	0	0.616	0.890	0.900	0.573	0.900	
d_6	0	0	0.010	0.034	0	0.762	1.212	1.350	1.252	1.350	

Da $\max_j r(d_3, \omega_j) < \max_j r(d_i, \omega_j)$ für alle $i \neq 3$, folgt:

d_3 *ist die optimale Strategie.*

11. Risikosituation. Endlicher Zustandsraum

Über dem Zustandsraum $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m)$ sei eine A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung $W = \{\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m\}$ bekannt.

Unter dem Bayesschen Risiko $\bar{r}(d_k)$ verstehen wir gemäss 5.4.1.

11.1. $$\bar{r}(d_k) = \sum_{j=1}^{m} r(d_k, \omega_j) \cdot p(\omega_j) = \sum_{j=1}^{m} r(d_k, \omega_j) \cdot \pi_j .$$

Nach der integralen Methode ist d_k im Sinne des Bayesschen Kriteriums optimal (angewandt auf die entgangenen Gewinne), wenn

$$\bar{r}(d_k) \leqq \bar{r}(d_i); \qquad i \neq k .$$

Numerische Durchführung für das Beispiel in Abschnitt 10

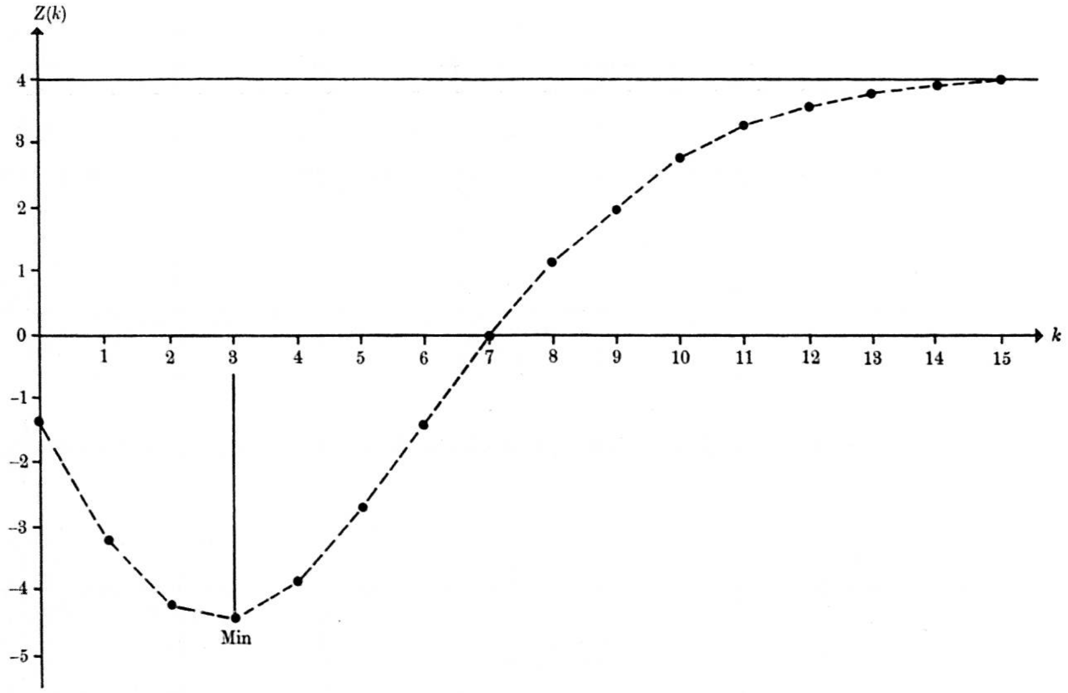
Neben 10.2. und 10.3. gelte:

$$\pi_2 = \text{konst.} \longrightarrow \text{Laplacesches Kriterium!}$$

Nach 10.4. berechnet sich dann das Bayessche Risiko (bis auf einen konstanten Faktor) wie folgt:

11.2.
$$\begin{aligned}\bar{r}(d_k) &= \sum_{j=0}^{8} r(d_k, \omega_j) \\ &= \sum_{j=0}^{4} [1-\Phi(k \mid \omega_j)] \cdot (4-j) + \sum_{j=5}^{8} \Phi(k \mid \omega_j)\,(j-4) \\ &= \sum_{j=0}^{8} \Phi(k \mid \omega_j) \cdot (j-4) + \sum_{j=0}^{4} 4-j \\ &= \sum_{j=1}^{8} \Phi(k \mid \omega_j) \cdot (j-4) + 6 = Z(k) + 6\,.\end{aligned}$$

Fig. 11.1.



11.3. $$Z(k) = \sum_{j=1}^{8} \Phi(k \mid \omega) \cdot (j-4)\,.$$

Für welchen Wert von $k = 0, 1, 2, \ldots, 99$ ist die Zielgrösse $Z(k)$ minimal?

Aus Figur 11.1 lesen wir ab:

$$\min_k Z(k) = Z(3)\,, \qquad \text{d.f.:}$$

d_3 ist die optimale Strategie nach Laplace.

Man beachte ausserdem:

$$\omega_j \in \Omega\,; \qquad \Phi(k \mid \omega_j) \approx 1 \qquad \text{für} \quad k > 15 \qquad \text{und somit}$$

$$Z(k) \approx \sum_{j=1}^{8} (j-4) = 4 \qquad \text{für} \ k > 15\,.$$

Graphische Interpretation der integralen und konstruktiven Methode mit Baumdiagrammen

11.4. *Integrale* Methode

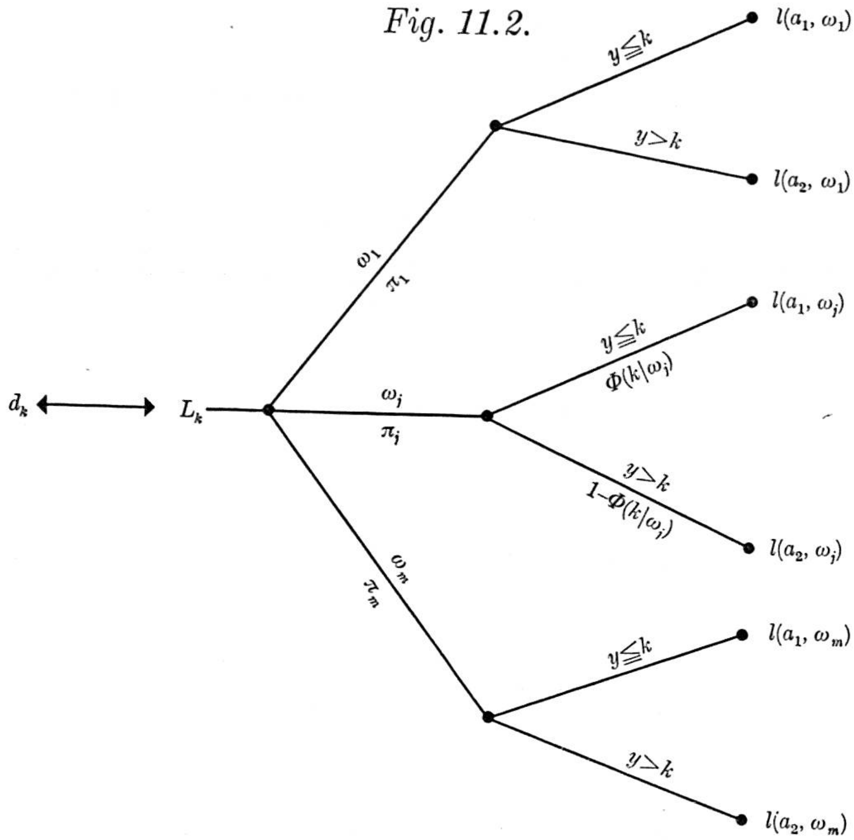
Wir versuchen das Bayessche Risiko $\bar{r}(d_k)$ graphisch zu illustrieren. In seiner ursprünglichen Form heisst es

$$\bar{r}(d_k) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{y=0}^{n} l[d_k(y), \omega_j] \cdot p(y \mid \omega_j) \right) \cdot \pi_j$$

$\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m$	Zustände der Umwelt
$y = 0, 1, \ldots n$	Ergebnisse der Stichprobe
$p(\omega_j) = \pi_j$	A-priori-Wahrscheinlichkeiten über Ω
$d_k(y) =$	Entscheidungsfunktion nach 9.2.6.

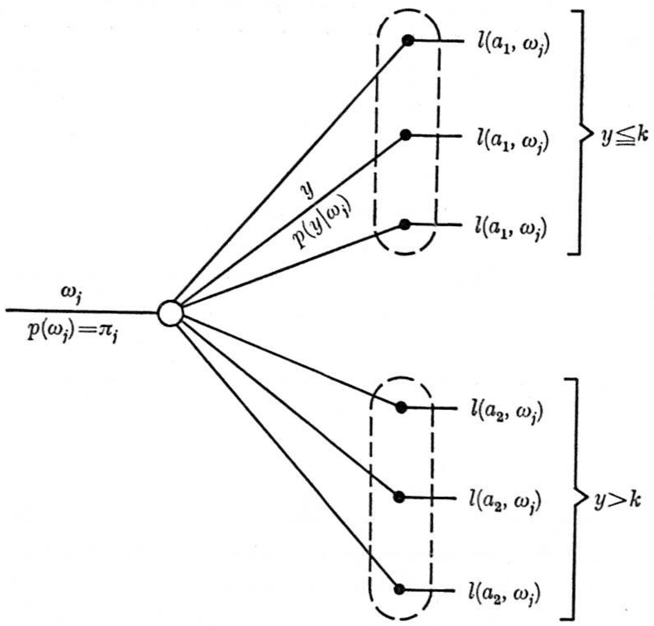
Jeder Entscheidungsfunktion $d_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ können wir das folgende *Baumdiagramm* in Form einer sogenannten *zusammengesetzten Lotterie* L_k zuordnen:

Fig. 11.2.



Nahaufnahme für irgendeinen Zustand ω_j:

Fig. 11.2a.



Das Bayessche Risiko $\bar{r}(d_k)$ kann somit als Erwartungswert der zusammengesetzten Lotterie L_k interpretiert werden, und d_k heisst optimal (nach der integralen Methode), wenn die zugehörige *Lotterie* L_k *den kleinsten Erwartungswert hat.*

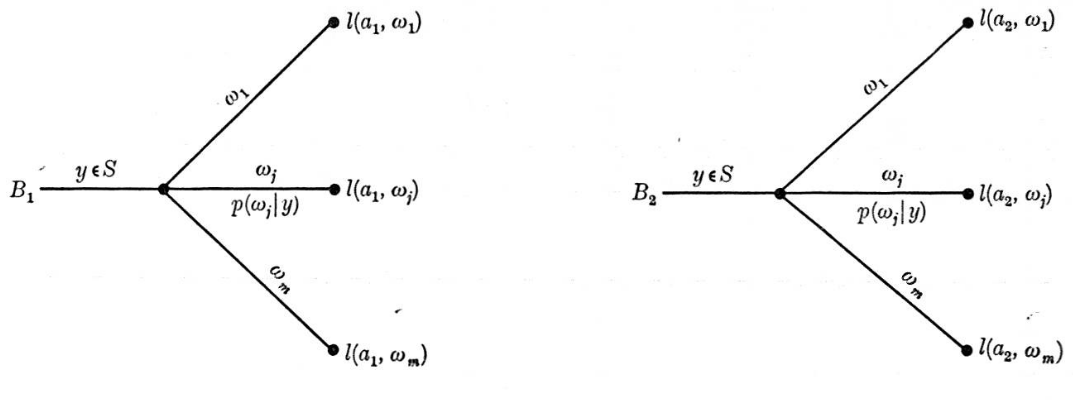
11.5. *Konstruktive* Methode

Jedem Stichprobenergebnis $y \in S$ $(y = 0, 1, \dots n)$ wird jene Aktion a_i zugeordnet $(i = 1, 2)$, für die der A-posteriori-Erwartungswert E_y

$$E_y = \sum_{j=1}^{m} l(a_i, \omega_j) \cdot p(\omega_j \mid y) \quad \text{möglichst klein ist.}$$

Jedem $y \in S$ können wir somit das folgende *Paar* (B_1, B_2) von Lotterien zuordnen.

Fig. 11.3.



Dabei wählen wir (zu $y \in S$) jene Aktion a_i, für die der Erwartungswert der Lotterie B_i minimal ist.

Der Baum in Figur 11.3. (konstruktive Methode) ist gerade die «*Umkehrung*» *des Baumes* von Fig. 11.2a. (integrale Methode). Die Bayessche Formel 6.2.2. gestattet uns, die transformierten Wahrscheinlichkeiten, die mit einer solchen Umkehrung verbunden sind, berechnen.

12. Risikosituation. Zustandsraum $\Omega = [0,1]$. A-priori-Betaverteilung über Ω

Sei $\varphi(\omega)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer beliebigen Verteilungsfunktion über $\Omega = [0,1]$

12.1. $$\varphi(\omega) \geqq 0; \qquad \int_0^1 \varphi(\omega)\, d\omega = 1; \qquad 0 \leqq \omega \leqq 1 .$$

Das *Bayessche Risiko* für das *2-Aktionen-Problem* nach 9.2. ist dann bekanntlich

12.2. $$\begin{aligned} \bar{r}(d_k) &= \int_0^1 \left(\sum_{y=0}^{n} l[d_k(y), \omega] \cdot p(y \mid \omega) \right) \cdot \varphi(\omega)\, d\omega \\ &= \int_0^1 \{\Phi(k \mid \omega) \cdot l(a_1, \omega) + [1 - \Phi(k \mid \omega)] \cdot l(a_2, \omega)\}\, \varphi(\omega)\, d\omega \\ &= \int_0^1 \Phi(k \mid \omega)\, [l(a_1, \omega) - l(a_2, \omega)]\, \varphi(\omega)\, d\omega + S . \end{aligned}$$

Nach der *integralen* Methode ist die Strategie d_i optimal, falls

$$\bar{r}(d_i) \leqq \bar{r}(d_k) \qquad \text{für alle } k \neq i$$

oder, da S von k unabhängig ist, falls für die Zielfunktion $Z(k)$ mit

12.3. $$Z(k) = \int_0^1 \Phi(k \mid \omega)\, [l(a_1, \omega) - l(a_2, \omega)]\, \varphi(\omega)\, d\omega$$

gilt: $$Z(i) \leqq Z(k) \qquad \text{für alle } k \neq i .$$

Wir wollen nun für $\varphi(\omega)$ eine ziemlich umfassende, zwei-parametrige Gesamtheit von A-priori-Verteilungen zulassen, nämlich die sogenannten *Beta-Verteilungen* [14].

Ihre Dichtefunktion $f_{\alpha,\beta}(\omega)$ ist wie folgt definiert:

12.4. $$\varphi(\omega) = f_{\alpha,\beta}(\omega) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)}\, \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1}, \qquad \begin{array}{r} 0 \leqq \omega \leqq 1 \\ \alpha, \beta > 0 \end{array}$$

mit der sogenannten *vollständigen Betafunktion* $B(\alpha, \beta)$, die bereits von Leonhard Euler in einer speziellen Form untersucht wurde.

12.4 a. $$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}\, d\omega$$

Ersetzt man nun in 12.3. die $l(a_i, \omega)$ durch die speziellen linearen Funktionen 9.2.4. und $\Phi(k|\omega)$ nach 9.2.5., so folgt:

12.5.

$$Z(k) = \frac{c}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \left[\sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} \omega^y (1-\omega)^{n-y} \right] \cdot (\omega - \bar{\omega})\, \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1} d\omega$$

$$= \frac{c}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} \left[B(\alpha+y+1, \beta+n-y) - \bar{\omega} \cdot B(\alpha+y, \beta+n-y) \right] \right\}.$$

Die Zielfunktion $Z(k)$ ist also im wesentlichen abhängig von der vollständigen Betafunktion.

Der folgende Hilfssatz gestattet uns, die erste Zeile von 12.5. umzuformen:

Hilfssatz: [16]:

Sei Y eine binomial verteilte Zufallsvariable und ω die zugehörige Grundwahrscheinlichkeit; dann gilt:

12.6.

$$p\{Y > k\,|\,\omega\} = 1 - \Phi(k\,|\,\omega) = \int_0^{\omega} \frac{t^k (1-t)^{n-k-1}}{B(k+1, n-k)}\, dt = \frac{B_{k+1,\, n-k}(\omega)}{B(k+1, n-k)},$$

wobei

12.6a. $$B_{\alpha,\beta}(\omega) = \int_0^{\omega} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$$

die sogenannte *unvollständige Betafunktion* darstellt [15].

Der erste Term in 12.5. geht dann über in

12.7.

$$Z(k) = \frac{c}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \left[1 - \frac{B_{k+1,\, n-k}(\omega)}{B(k+1, n-k)} \right] \cdot (\omega - \bar{\omega}) \cdot \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}\, d\omega \,.$$

Die Minimierung von $Z(k)$ ist somit äquivalent mit der Maximierung von

12.8.

$$Z^*(k) = \frac{1}{B(k+1; n-k)} \int_0^1 [B_{k+1, n-k}(\omega)] \cdot (\omega - \bar{\omega})\, \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1} dw\,.$$

Für den Spezialfall der sogenannten *Rechtecksverteilung*, d.h. für $\alpha = \beta = 1$, lässt sich Z^* (k) *explizite durch vollständige Betafunktionen beschreiben.*

12.8. geht unter den genannten Voraussetzungen über in:

$$Z^*(k) = \frac{1}{B(k+1; n-k)} \int_0^1 \left(\int_0^\omega t^k (1-t)^{n-k-1}\, dt \right) (\omega - \bar{\omega})\, d\omega\,.$$

Nach partieller Integration und einigen kleinen Umformungen findet man (von einem konstanten Summanden abgesehen):

12.9.

$$Z^*(k) = \frac{1}{B(k+1; n-k)} \left[\bar{\omega} \cdot B(k+2, n-k) - \frac{1}{2} B(k+3; n-k) \right].$$

Abschliessend wollen wir für den allgemeinen Fall ($\alpha, \beta > 0$ *beliebig*) die optimale Strategie nach der *konstruktiven Methode* ermitteln. Sie wird sich als flexibler und praktischen Problemen zugänglicher erweisen.

Nach der konstruktiven Methode ordnen wir jedem Stichprobenergebnis $y \in S$ $(y = 0, 1, \ldots n)$ jene Aktion $a_i \in A$ $(i = 1, 2)$ zu, für die der *A-posteriori-Erwartungswert* der entgangenen Gewinne

12.10. $$E_{a_i} = \int_0^1 l(a_i, \omega) \cdot p(\omega \mid y)\, d\omega\,; \qquad i = 1, 2$$

minimal ist.

$p(\omega | y)$ ist die sogenannte *A-posteriori-Dichte* über Ω und lässt sich nach der Bayesschen Formel wie folgt berechnen:

12.11. $$p(\omega) \mid y) = \frac{p(y \mid \omega) \cdot \varphi(\omega)}{\int\limits_0^1 p(y) \mid \omega) \cdot \varphi(\omega)\, d\omega}\,; \qquad \varphi(\omega) = \text{A-priori-Dichte}\,.$$

Unter Berücksichtigung der speziellen Annahmen für $l(a_i, \omega)$ nach 9.2.4. und für $\varphi(\omega)$ nach 12.4. folgt aus 12.10.:

$$E_{a_1} = \int\limits_{\bar{\omega}}^{1} (\omega - \bar{\omega}) \frac{\omega^{\alpha+y-1}(1-\omega)^{\beta+n-y-1}}{\int\limits_0^1 t^{\alpha+y-1}(1-t)^{\beta+n-y-1}\, dt}\, d\omega$$

und nach 12.4. $$= \int\limits_{\bar{\omega}}^{1} (\omega - \bar{\omega})\, f_{\alpha+y,\, \beta+n-y}(\omega)\, d\omega$$

analog: $$E_{a_2} = \int\limits_0^{\bar{\omega}} (\bar{\omega} - \omega)\, f_{\alpha+y,\, \beta+n-y}(\omega)\, d\omega\,.$$

Wir bilden nun die Differenz Δ der beiden Erwartungswerte

12.12. $$\Delta = E_{a_1} - E_{a_2} = \int\limits_0^1 (\omega - \bar{\omega})\, f_{\alpha+y,\, \beta+n-y}(\omega)\, d\omega$$

$$= \int\limits_0^1 \omega \cdot f_{\alpha+y,\, \beta+n-y}(\omega)\, d\omega - \bar{\omega}\,.$$

$\int\limits_0^1 \omega f\, d\omega$ ist aber der Erwartungswert einer betaverteilten Zufallsvariablen $\tilde{\omega}$ mit den Parametern $\alpha + y$ und $\beta + n - y$.

Nach [14], S. 60, ist der Erwartungswert der Betaverteilung

$$E(\tilde{\omega}) = \int\limits_0^1 \omega \cdot f_{\alpha,\beta}(\omega)\, d\omega = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,; \qquad \text{somit folgt}$$

12.13. $$\Delta = \frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} - \bar{\omega}\,.$$

Die konstruktive Methode besagt nun:

12.14.
$$\frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} > \bar{\omega} \longrightarrow a_2$$
$$\frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} = \bar{\omega} \longrightarrow a_1 \text{ oder } a_2$$
$$\frac{\alpha + y}{\alpha + \beta + n} < \bar{\omega} \longrightarrow a_1 .$$

12.14. gestattet uns, analog 8.7., die im Sinne der integralen Methode optimale Annahmekennzahl k^* zu berechnen:

$$k^* = [(\beta + n) \cdot \bar{\omega} - \alpha(1 - \bar{\omega})],$$

wobei $[x]$ = grösste ganze Zahl $< x$.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Bühlmann:* Optimale Prämienstufensysteme, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 64. Bd., Heft 2, 1964.

[2] *T. S. Ferguson:* Mathematical Statistics, New York 1967, S. 11–22.

[3] *Bühlmann, Loeffel, Nievergelt:* Einführung in die Theorie und Praxis der Entscheidung bei Unsicherheit, Berlin 1967.

[4] *H. Bühlmann;* Die beste erwartungstreue Schätzfunktion der Übersterblichkeit, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 59. Bd., Heft 1, 1959.

[5] *P. Nolfi:* Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 59. Bd., Heft 1, 1959.

[6] *A. Wald:* Statistical Decision Functions, New York 1950.

[7] *G. Menges:* Bibliographie zur statistischen Entscheidungstheorie 1950–1967, Köln und Opladen 1968.

[8] *G. Menges:* Statistik 1 Theorie, Köln und Opladen 1968, S. 288.

[9] *G. Menges* und *H. Diehl:* Über die operationelle Eignung von Entscheidungsmodellen, Statistische Hefte, Heft 1/2, 1966, S. 33–36.

[10] *H. Schneeweiss:* Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin 1967.

[11] *J. von Neumann* und *O. Morgenstern:* Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961, S. 176.

[12] *R. Schlaifer:* Probability and Statistics for Business Decisions, New York 1955, S. 117 ff.

[13] *W. Wetzel:* Statistische Tabellen, Berlin 1967, S. 87 ff.
[14] *D. Dumas de Rauly:* L'estimation statistique, Paris 1968, S. 53 ff.
[15] *W. E. Deming:* Some Theory of Sampling, New York 1966, S. 475 ff.
[16] *B. Harris:* Theory of Probability, London 1966, S. 90.

Zusammenfassung

In einem ersten Teil wird am Beispiel des Testens statistischer Hypothesen gezeigt, wie ein Problem der «klassischen» Statistik im ökonomischen Modell der Entscheidungstheorie (nach A. Wald, 1950) interpretiert und gelöst werden kann. Insbesondere werden nach dem sogenannten Bayesschen Kriterium optimale Strategien auf zwei verschiedenen, aber äquivalenten Wegen hergeleitet. Eine explizite Darstellung der sogenannten Annahmekennzahl in Funktion der relevanten ökonomischen und umweltsbedingten Parameter beschliesst dieses Kapitel.

Der zweite Teil ist der Planung bei Unsicherheit, beschränkt auf das 2-Aktionen-Problem, gewidmet. Unter der Annahme eines linearen Verlaufs der sogenannten entgangenen Gewinne und einer A-priori-Betaverteilung über dem Zustandsraum wird eine optimale Strategie konstruiert.

Summary

A central problem in the field of «classical» statistics (testing hypotheses) is presented and solved in the economic model of the mathematical decision theory in the sense of A. Wald. Particularly, optimal strategies are developed by two different but equivalent methods, based on the criterion of Bayes. It follows an explicit presentation of the acceptance number depending on the relevant economic and external parameters.

Secondly, the problem of design under uncertainty, limited to the case of two actions, is treated. Under the assumptions of a linear opportunity loss and an a *priori* Beta-distribution over the state space, an optimal strategy is constructed.

Résumé

Dans une première partie, un problème de la statistique «classique» (illustré à l'exemple du test) est présenté à l'aide du modèle de la théorie mathématique des décisions. Particulièrement on développe par deux méthodes différentes, mais équivalentes des stratégies optimales d'après le critère dit de Bayes. Suit une présentation du nombre d'acceptation (acceptance number) en fonction des paramètres économiques et ambientales.

La deuxième partie s'occupe du problème de la planification en cas d'incertitude, se limitant au cas de deux actions. Supposant une fonction linéaire des profits en perte (opportunity losses) et une distribution *a priori* de bêta sur l'espace des états, une stratégie optimale est construite.