Glaubwürdigkeit für Schadensätze

Glaubwürdigkeit für Schadensätze

Von H. Bühlmann und E. Straub, Zürich

τὸ εἰ δύνῃ, πάντα δυνατὰ τῷ πιστεύοντι
(Markus 9,23)[1])

Die risikogerechte Prämie

Die Versicherungstechnik benutzt als fundamentale Grösse die risikogerechte Prämie, deren Begriff intuitiv auf dem Prinzip der Selbstfinanzierung der Schäden über eine theoretisch unbegrenzte Zeitdauer beruht. Obwohl in diesem Sinne eigentlich ein Zeitmittel, wird die risikogerechte Prämie aber oft auch – mittels eines Gedankensprunges, der an die Ergodenhypothese in der Physik erinnert – als Kollektivmittel über eine grosse Gesamtheit von Risiken erklärt. Als theoretische Rechtfertigung dafür wird die Homogenität dieser Risikengesamtheit angeführt. Hier setzen aber in der Praxis die Diskussionen um das ganze Prämienkonzept ein. Soll nämlich einerseits ein Kollektiv nur eine einigermassen vernünftige Grösse haben, dann fällt in der Regel die Fiktion der Homogenität in sich zusammen und damit wird dann die als Kollektivmittel gerechnete Durchschnittsprämie nicht mehr als «gerecht» empfunden. Approximiert man andererseits die risikogerechte Prämie durch das kurzfristige Schadenzeitmittel des einzelnen Risikos (oder – was im Effekt auf das gleiche heraus kommt – kleiner Risikengesamtheiten) dann widerspricht das dem Versicherungsgedanken.

Es ist der Gegenstand dieser Arbeit, eine Möglichkeit zu zeigen, wie sich solche risikogerechten Prämien trotzdem exakt definieren und berechnen lassen. Das ist möglich, falls das zugrundeliegende Risikogeschehen durch ein geeignetes mathematisches Modell beschrieben wird.

[1]) Zitiert von Arthur Bailey in seiner Pionierarbeit über Glaubwürdigkeit «Credibility Procedures. Laplace's Generalization of Bayes' Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data», Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol. XXXVII, 1950.

2. Das Versicherungsportefeuille

Es macht für die in dieser Arbeit behandelten Fragen und die entsprechenden Resultate grundsätzlich keinen Unterschied, ob es sich um ein Prämienbestimmungsproblem der Direktversicherung oder der Rückversicherung handelt. Da wir jedoch bei der Konstruktion unseres Modells hauptsächlich an die Rückversicherung gedacht haben und da ausserdem der Direktversicherungsfall im hier entwickelten allgemeinen Modell enthalten ist, werden wir durchwegs das rückversicherungstechnische Vokabular verwenden. Risiko ist also im folgenden synonym mit Rückversicherungsvertrag (kurz «Vertrag») und für diesen gilt es eine risikogerechte Prämie zu ermitteln.

Betrachten wir also den Vertrag mit der Nummer j; $j = 1, 2, \ldots N$. Dabei ist N die Anzahl der Risiken (= Verträge) im Portefeuille des Rückversicherers. Das durch diesen Vertrag j im Jahr i verursachte Schadentotal ist eine Zufallsvariable S_{ij}: (Prinzipiell bezeichne der erste untere Index immer das Jahr, der zweite den Vertrag.)

S_{ij} = Schadentotal zulasten des Rückversicherers aus dem Vertrag j im Jahr i. Sei ausserdem

P_{ij} = Erstversicherungsprämienvolumen, welches im Jahr i dem Vertrag j zugrundeliegt.

Dann ist $X_{ij} = \dfrac{S_{ij}}{P_{ij}}$ = Schadensatz des Vertrags j im Jahr i.

Schliesslich soll die Grösse ϱ_{ij} die Vertragsbedingungen des Vertrags j im Jahr i charakterisieren. Zur Illustration der ϱ_{ij} betrachten wir ein Rückversicherungs-Portfeuille, das aus N Schadenexzendentenverträgen besteht, wobei

$$\left.\begin{array}{ll} r_{ij} & = \text{1. Risiko (= Selbstbehalt)} \\ R_{ij} & = \text{2. Risiko (= Deckungsbetrag)} \\ A_{ij} & = \text{Anzahl Originalschäden} \\ Y_{ij}^{(m)} & = \text{Betrag des } m\text{-ten Originalschadens} \end{array}\right\} \text{ des Vertrags } j \text{ im Jahr } i$$

Die *Vertragsbedingungen* ϱ_{ij} liefern dann die *Zuordnung* – oder der Mathematik sprachkonformer die *Abbildung* – von Erstversicherungsschadenverlauf zu Schadentotal des Rückversicherers. Im betrachteten Beispiel lautet die symbolische Schreibweise für die Abbildung ϱ_{ij}

$$(Y_{ij}^{(1)}, Y_{ij}^{(2)}, \ldots Y_{ij}^{(A_{ij})}) \xrightarrow{\varrho_{ij}} \sum_{m=1}^{A_{ij}} \min\{(Y_{ij}^{(m)} - r_{ij})^{+}, R_{ij}\}$$

Erläuterungen der Schreibweise:

Auf der linken Seite steht der Erstversicherungsschadenverlauf bestehend aus der Menge der Originalschäden $Y_{ij}^{(m)}$ $m = 1, 2, \ldots A_{ij}$. Diesem wird durch die Abbildung ϱ_{ij} das Schadentotal des Rückversicherers zugeordnet, welches man durch Aufsummieren der einzelnen Schadenexzedenten von der Höhe min $\{(Y_{ij}^{(m)} - r_{ij}), R_{ij}\}$, $m = 1, 2, \ldots A_{ij}$ erhält.

Wir halten uns aber im folgenden keineswegs nur an Schadenexzedenten sondern verstehen unter ϱ_{ij} die Bedingungen eines beliebigen Rückversicherungsarrangements. Insbesondere werden durch unsere Betrachtungsweise alle in der Praxis üblichen Vertragstypen wie Quote, Summenexzedent, Schadenexzedent, Stop Loss und jede Kom bination derselben erfasst.

3. Das Modell der Prämienberechnung

Es ist für unser Prämienberechnungsmodell entscheidend, dass die Verteilungsfunktion für den Schadensatz X_{ij} nicht bestimmt ist, sondern von einem unbekannten, das Risiko charakterisierenden Parameter ϑ_{ij} abhängt (neben der Dependenz vom bekannten Prämienvolumen P_{ij} und den bekannten Vertragsbedingungen ϱ_{ij}). Wir bringen diese Eigenschaft durch folgende Bezeichnung für die Verteilung von X_{ij} bei gegebenen Werten ϑ_{ij}, P_{ij} und ϱ_{ij} zum Ausdruck:

$$\mathrm{Prob}[X_{ij} \leqq x \,|\, \vartheta_{ij} = \vartheta, P_{ij} = P, \varrho_{ij} = \varrho] = F_{\vartheta}(x \,|\, P, \varrho)$$

(Wir verwenden im folgenden durchwegs die Bezeichnung Prob [ ] für die Wahrscheinlichkeit des in den eckigen Klammern angegebenen Ereignisses; analog E[ ] und Var [ ] für Erwartungswert und Varianz der in der eckigen Klammer stehenden Zufallsvariablen). Da für alle in der Praxis auftretenden Vertragstypen die beiden Identitäten

(i) $E[X_{ij}|\vartheta_{ij}=\vartheta, P_{ij}=P, \varrho_{ij}=\varrho]=\mu(\vartheta,\varrho)$ unabhängig von P

(ii) $$\text{Var}\,[X_{ij}|\vartheta_{ij}=\vartheta, P_{ij}=P, \varrho_{ij}=\varrho]=\frac{\sigma^2(\vartheta,\varrho)}{P}$$

angenommen werden dürfen, wollen wir dies auch hier stets voraussetzen. (Eine Rechtfertigung der Annahme findet man beispielsweise in [1].)

Unter der risikogerechten Prämie für den Vertrag j im Jahr i haben wir dann im allgemeinen ein geeignetes Funktional der Verteilung $F_{\vartheta_{ij}}(x\,|\,P_{ij}, \varrho_{ij})$ zu verstehen. Wir beschränken uns aber in dieser Arbeit auf den einfachsten Fall, wo dieses Funktional gleich dem Erwartungswert ist und definieren:

$$\text{Risikogerechter Prämiensatz} = \mu(\vartheta_{ij}, \varrho_{ij}) = \int x dF_{\vartheta ij}(x|P, \varrho_{ij})$$

In der Praxis wären zu diesem Erwartungswert notwendigerweise noch Zuschläge zu addieren, um eine sinnvolle Prämie zu erhalten. Im Sinne einer möglichst klaren Darstellung unserer Grundideen verzichten wir jedoch auf diese praktische Massnahme.

Das Problem, welches uns der Erwartungswert $\mu(\vartheta_{ij}, \varrho_{ij})$ aufgibt, ist dann bedingt durch die Tatsache, dass der Risikoparameter ϑ_{ij} unbekannt ist und es stellt sich die Frage, wie der gerechte Prämiensatz $\mu(\vartheta_{ij}, \varrho_{ij})$ auf Grund von statistischen Beobachtungen zu schätzen sei.

4. Die statistische Version des Prämienberechnungsproblems

Wir reservieren von hier an den Index k für den Vertrag, dessen Prämiensatz wir ermitteln wollen und verwenden den Index j für einen beliebigen Vertrag ($j = 1, 2, \ldots N$) wie bis anhin. Gleicherweise habe das Jahr wofür wir quotieren die reservierte Nummer 0.

Die Schätzung von $\mu(\vartheta_{0k}, \varrho_{0k})$ soll dann auf Grund der *beobachteten Schadensätze*

- des in Frage stehenden Vertrages k
- der übrigen Verträge $j \neq k$

erfolgen. Diese Abstützung auf beide Erfahrungsquellen (vertragseigene Information wie Portefeuilleinformation) ist für die hier gewählte Behandlung derartiger Schätzungsprobleme typisch. Der Praktiker wird sich bei den folgenden Gedankengängen wohl in erster Linie für die noch abzuleitende Entscheidungsregel interessieren, welche angibt, wie die Berücksichtigung der individuellen und kollektiven Schadenerfahrung zu erfolgen hat.

Noch etwas präziser verstehen wir unter dem *statistischen Prämienberechnungsproblem* die Aufgabe, für den Vertrag k im Jahre 0 den Erwartungswert $\mu(\vartheta_{0k}, \varrho_{0k})$ des Schadensatzes zu bestimmen, wenn die folgenden Grössen bekannt sind:

(i) $\mathfrak{P}$: Die (Erstversicherung-) Prämienvolumina
$\mathfrak{P} = [P_{ij};\ i = 1, 2, \dots n;\ j = 1, 2, \dots N]$, wobei P_{ij} dem Vertrag j im Jahre i zugrunde liege

(ii) $\mathfrak{X}$: Die beobachteten Schadensätze $\mathfrak{X} = [X_{ij};\ i = 1, 2, \dots n;\ j = 1, 2, \dots N]$

(iii) $\mathfrak{R}_1$: Die in der Vergangenheit in Kraft gewesenen Vertragsbedingungen $\mathfrak{R}_1 = [\varrho_{ij};\ i = 1, 2, \dots n;\ j = 1, 2, \dots N]$

(iv) $\mathfrak{R}_0$: Die in Zukunft (d.h. für das Jahr 0) für den zu tarifierenden Vertrag k gewünschten Vertragsbedingungen ϱ_{0k}

Wir schreiben kurz $(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}_1)$ für die gesamte Information über die Vergangenheit, $\mathfrak{R}_0$ für die zukünftigen Vertragsbedingungen und verwenden für $(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_0)$ die Schreibweise $(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R})$ wie auch $\mathfrak{R}$ für die Vereinigung von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_0$.

Es folgt aus der hier gewählten Sprache, dass wir die Jahre rückwärts numeriert haben, d.h. das Jahr l bedeutet für uns das l-letzte Jahr usw. Der Einfachheit halber haben wir auch angenommen, dass alle N Verträge während mindestens n Jahren unter Beobachtung gestanden haben, obwohl sich unsere Überlegungen auch auf den Fall verschieden langer Beobachtungsperioden anwenden liessen. Schliesslich möchten wir auch noch darauf hinweisen, wie man die für unser Problem relevanten Schadensätze in recht übersichtlicher Art in einem Schema darstellen kann.

Jahr Nr. / Vertrag Nr.	1	2		k		N
0	—	—		X_{0k}		—
1	X_{11}	X_{12}	......	X_{1k}	......	X_{1N}
2	X_{21}	X_{22}	......	X_{2k}	......	X_{2N}
......	......	......	......	......	......	......
n	X_{n1}	X_{n2}	......	X_{nk}	......	X_{nN}

Die unter dem Strich stehenden Schadensätze sind unser beobachtetes statistisches Material $\mathfrak{X}$ (vgl. (ii) vorhin). Von dem über dem Strich stehenden Schadensatz X_{0k} gilt es den Erwartungswert zu schätzen.

Gelegentlich – siehe z.B. unser Beispiel im Anhang – ist es vorteilhaft, die Reihenfolge der Zeilen umgekehrt zu wählen.

Nach diesen Vorbereitungen und unter Verwendung der eben eingeführten Terminologie kann die *statistische Problemstellung* schliesslich in gestraffter Form wie folgt gegeben werden:

«Auf Grund der Informationen $(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R})$ bestimme man eine Schätzfunktion

$$\hat{\mu}_k = \hat{\mu}_k(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R})$$

für den Erwartungswert $\mu(\vartheta_{0k}, \vartheta_{0k})$ des Vertrages k im Jahre 0, die in einem noch zu definierenden Sinne optimal ist.»

Dabei beschränken wir uns zum vornherein auf Schätzfunktionen die in den X_{ij} linear sind, d.h. Schätzfunktionen vom Typus

$$\hat{\mu}_k(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} X_{ij}$$

5. Voraussetzungen über die Schadendaten

Wir machen nun noch die folgenden Annahmen über die Zufallsvariabeln X_{ij} und deren Beobachtungen:

(i) *Unabhängigkeit der Schadensätze:* bei festen Werten der Parameter ϑ_{ij} $(i = 0, 1, 2, \ldots n,\ j = 1, 2, \ldots N)$ sollen die Variablen X_{ij} stochastisch unabhängig sein.

(ii) *Homogenität in der Zeit:* die Schadensätze desselben Vertrags sollen über die Zeit gleich verteilt sein, d.h. $\vartheta_{ij} = \vartheta_j$ unabhängig von i für $j = 1, 2, \ldots N$.

(iii) *Unabhängigkeit der Parameterwerte:* die Parameterwerte ϑ_j $(j = 1, 2, \ldots N)$ seien Zufallsvariabeln, welche stochastisch unabhängig und nach derselben Verteilungsfunktion $U(\vartheta)$ verteilt sind.

(iv) *Vorhandensein von vertragsweisen as-if-Statistiken:* Es soll $\varrho_{ij} = \varrho_j$ gelten unabhängig von i für $j = 1, 2 \ldots N$ und insbesondere auch $\varrho_{0k} = \varrho_k$ für den zu tarifierenden Vertrag k.

Diese vier Annahmen machen die Formulierung der folgenden Gedanken wesentlich einfacher; sie sind aber für die Beweise nicht überall notwendig. Im einzelnen möchten wir dazu noch folgendes bemerken:

Zu (i)

Die Hypothese der Unabhängigkeit kann nach erfolgter Zusammenfassung von Verträgen – dort wo diese sich anstecken – als praktikabel angenommen werden.

Zu (ii)

Die «klassische» statistische Problemstellung der Prämienberechnung geht von der *Homogenität* in der *Masse* wie auch in der *Zeit* aus (d.h. $\vartheta_{ij} = \vartheta$ unabhängig vom Jahr i und vom Vertrag j). Wir postulieren hier zwar immer noch die Homogenität in der Zeit, verlangen aber im Portefeuille der Verträge (in der Masse) keine Homogenität mehr (d.h. $\vartheta_{ij} = \vartheta_j$ hängt noch vom Vertrag j aber nicht vom Jahr i ab). Die verlockende Verallgemeinerung auch die Homogenität in der Zeit aufzugeben unterlassen wir einmal der Übersichtlichkeit halber und andererseits weil entsprechende Statistiken in der Praxis oft durch geeignete Transformationen mittels Trendfaktoren realisiert werden können.

Zu (iii)

Wir stellen uns vor, dass die einzelnen Verträge, deren Schadenverteilung durch den Parameter ϑ charakterisiert ist, aus einer grossen Gesamtheit von Verträgen, dem Kollektiv zufällig entnommen sind. Unsere Annahme besagt, dass diese Entnahmen unabhängig erfolgt seien mit gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung für jede von ihnen. Diese gemeinsame Verteilungsfunktion $U(\vartheta)$ beschreibt also die idealisierte Häufigkeit der ϑ-Werte im Kollektiv. Aus diesem Grunde nennen wir $U(\vartheta)$ auch Strukturfunktion. Diese setzen wir zunächst als bekannt voraus.

Zu (iv)

Diese Annahme bedeutet nicht, dass die effektiven Bedingungen des einzelnen Vertrages im Laufe der Zeit die gleichen bleiben müssen, sondern lediglich, dass es trotz Änderungen möglich sein soll eine Statistik der Schadensätze zu erstellen, die in früheren Jahren realisiert worden wäre, falls schon damals die gegenwärtigen Vertragsbedingungen gegolten hätten. Im Gegensatz zu Effektiv-Statistiken, die den effektiv realisierten Schadenverlauf wiedergeben, sprechen wir deshalb von (vertragsweisen) «as-if-Statistiken». Wir werden ausserdem den Begriff «einheitliche as-if-Statistik» gebrauchen, wenn $\varrho_j = \varrho$ unabhängig vom Vertrag j gilt, d.h. wenn es möglich ist die Schadendaten sämtlicher Verträge auf ein und dieselben Vertragsbedingungen zu transformieren.

Zur Illustration von Annahme (iv) verweisen wir auf das Zahlenbeispiel im Anhang zu dieser Arbeit.

6. Optimale Schätzung bei bekannter Struktur des Kollektivs

Für die Lösung des Prämienberechnungsproblems müssen wir schliesslich ein Kriterium einführen, welches besagt, wie die optimale Schätzfunktion in der Gesamtheit aller zugelassenen Schätzfunktionen zu bestimmen sei. Wir wählen hierfür das Kriterium der mittleren quadratischen Abweichung und geben folgende Definition:

Def: $\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij,k}^* X_{ij}$ heisst bezüglich $U(\vartheta)$ optimale Schätzung des risikogerechten Prämiensatzes $\hat{\mu}(\vartheta_k, \varrho_k)$ für den Vertrag k mit den Bedingungen ϱ_k im Jahre 0, falls

(i) $E[\{\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) - \mu(\vartheta, \varrho_k)\}^2] \leqq E[\hat{\mu}_k(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) - \mu(\vartheta_k, \varrho_k)\}^2]$

für alle linearen Schätzfunktionen $\hat{\mu}_k(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \varrho) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij,k} X_{ij}$

(kleinste quadratische Abweichung im Mittel)

(ii) $E[\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R})] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij,k}^* E[X_{ij}] = E[\mu(\vartheta_k, \varrho_k)]$

(Erwartungstreue)

Dabei verstehen wir hier und im folgenden unter $E[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich der «Dichte»

$$\prod_{j=1}^{N} [dU(\vartheta_j) \prod_{i=1}^{n} dF_{\vartheta_j}(x_{ij} \mid P_{ij}, \varrho_j)]$$

worin wie früher $\quad F_{\vartheta_j}(x_{ij} \mid P_{ij}, \varrho_j) = \mathrm{Prob}[X_{ij} \leqq x_{ij} \mid \vartheta_j, P_{ij}, \varrho_j]$.

Für die Bestimmung der optimalen Koeffizienten $\alpha^*_{ij,k}$ betrachten wir die Lagrangefunktion

$$\Phi_k(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{n1}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{n2}, \ldots \alpha_{1N}, \ldots \alpha_{nN}, \alpha) =$$

$$= E\left[\left\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} X_{ij} - \mu(\vartheta_k, \varrho_k)\right\}^2\right] - 2\alpha \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} E[X_{ij}]$$

(2α = Lagrangemultiplikator).

Das Gleichungssystem $\left\{\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial \alpha_{lh}} = 0, \; l = 1, 2, \ldots n, \; h = 1, 2, \ldots N\right\}$ für die besten Gewichte $\alpha_{lh} = \alpha^*_{lh,k}$ liefert dann

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \alpha_{lh}} = 2E\left[\left\{\sum_{i,j} \alpha^*_{ij,k} X_{ij} - \mu(\vartheta_k, \varrho_k)\right\} X_{lh}\right] - 2\alpha E[X_{lh}] = 0$$

das heisst
$$E\left[\mu(\vartheta_h, \varrho_h) \sum_{i,h} \alpha^*_{ij,k}\, \mu(\vartheta_j, \varrho_j) + \alpha^*_{lh,k} \frac{\sigma^2(\vartheta_h, \varrho_h)}{P_{lh}} - \right.$$
$$\left. - \mu(\vartheta_k, \varrho_k)\, \mu(\vartheta_h, \varrho_h)\right]$$
$$= \alpha E[X_{lh}] \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \ldots n \quad \text{und} \quad h = 1, 2, \ldots N$$

oder
$$E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)] \sum_{i,j} \alpha^*_{ij,k} E[X_{ij}] + \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k} \operatorname{Var}_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)] +$$
$$+ \alpha^*_{lh,k} E_U\left[\frac{\sigma^2(\vartheta, \varrho_h)}{P_{lh}}\right]$$
$$- E_U[\mu(\vartheta, \varrho_k)]\, E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)] - \delta_{hk} \operatorname{Var}_U[\mu(\vartheta, \varrho_k)] = \alpha E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)]\,.$$

Dabei steht $E_U[\;]$ bzw. $\operatorname{Var}_U[\;]$ für den Erwartungswert bzw. die Varianz bezüglich der Strukturfunktion $U(\vartheta)$ und δ_{hk} für das Kronekkersymbol.

Nach Einführung der Abkürzungen

$$m_h = E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)], \quad v_h = E_U[\sigma^2(\vartheta, \varrho_h)], \quad w_h = \operatorname{Var}_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)]$$

für $\quad h = 1, 2, \ldots N \quad$ und Berücksichtigung der Identität

$$\sum_{i,j} \alpha^*_{ij,k} E[X_{ij}] = m_k \qquad \text{(Erwartungstreue)}$$

fallen auf der linken Seite zwei Glieder weg und wir erhalten das Gleichungssystem

$$\text{1)}\quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k}\, w_h + \alpha^*_{lh,k}\, \frac{v_h}{P_{lh}} = \delta_{hk}\, w_k + \alpha m_h \qquad \begin{array}{l} \text{für} \quad l = 1, 2, \ldots n \\ \text{und } h = 1, 2, \ldots N \end{array}}$$

$$\text{Da} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k}\, w_h + \alpha^*_{lh,k}\, \frac{v_h}{P_{lh}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k}\, E\big[(X_{ih} - E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)])$$
$$(X_{lh} - E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)])\big]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k}\, \mathrm{Cov}[X_{ih}, X_{lh}] \quad (l = 1, 2, \ldots n)$$

und da jede Kovarianzmatrix ausser in degenerierten Fällen eine nichtverschwindende Determinante besitzt, hat dieses System für jedes α genau eine Lösung $\{\alpha^*_{lh,k}\}_{\substack{l = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots N}}$.

Diese Lösung können wir wie folgt explizit ermitteln: Festhalten von h, Multiplikation der l-ten Gleichung mit P_{lh} und Addition über l liefert unter Berücksichtigung der Schreibweise $P_{\cdot h} = \sum_{l=1}^{n} P_{lh}$:

$$P_{\cdot h}\, w_h \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k} + v_h \sum_{l=1}^{n} \alpha^*_{lh,k} = \alpha P_{\cdot h}\, m_h + \delta_{hk}\, P_{\cdot k}\, w_k$$

das heisst

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ih,k} = \frac{\alpha P_{\cdot h}\, m_h}{v_h + P_{\cdot h} w_h} + \delta_{hk}\, \frac{P_{\cdot k}\, w_k}{v_k + P_{\cdot k}\, w_k}$$

und damit

$$\alpha^*_{lh,k} = \frac{P_{lh}}{v_h + P_{\cdot h} w_h}\, \alpha m_h + \delta_{hk}\, \frac{P_{lk}\, w_k}{v_k + P_{\cdot k}\, w_k} \qquad \begin{array}{l} l = 1, 2, \ldots n, \\ h = 1, 2, \ldots \mathrm{N}. \end{array}$$

Multiplikation dieser Gleichungen mit $m_h = E[X_{lh}]$, Addition über l und h und Benutzung der Bedingung für Erwartungstreue liefert schliesslich den Multiplikator α, so dass wir wie folgt zusammenfassen können:

2)

$$\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \sum_{l,h} \overset{*}{\alpha}_{lh,k} X_{lh}$$

wobei
$$\overset{*}{\alpha}_{lh,k} = \frac{P_{lh}}{v_h + P_{\cdot h} w_h} \alpha m_h + \delta_{hk} \frac{P_{lk}}{v_k + P_{\cdot k} w_k} w_k$$

und
$$\alpha = \frac{m_k v_k}{v_k + P_{\cdot k} w_k} : \sum_{j=1}^{N} \frac{P_{\cdot j} m_j^2}{v_j + P_{\cdot j} w_j}$$

Dies stellt die Lösung unseres Schätzproblems bei bekannter Struktur des Kollektivs dar.

Wir möchten hier darauf hinweisen, dass diese Schätzregel und die in dieser Arbeit dargelegten Gedanken formal eng mit den Überlegungen in [2] zusammenhängen. Wir haben lediglich

- Schadensummen durch Schadensätze ersetzt
- den Begriff der Vertragsbedingungen miteinbezogen
- und die Menge der zugelassenen Schätzfunktionen etwas verschieden gewählt.

Dieser Zusammenhang mit [2] tritt insbesondere in der Diskussion der folgenden Spezialfälle hervor:

a) Der Direktversicherungsfall mit natürlicher Risikoeinheit

Sei $P_{lh} = 1$ für $l = 1, 2, \ldots n$ und $h = 1, 2, \ldots N$ d.h., es handle sich um N Einzelrisiken mit demselben «Risikoumfang» und dieser sei einfachheitshalber gleich eins gesetzt (z.B. Risikoeinheit $= 1$ Fahrzeughalter in der Automobil-Haftpflichtversicherung). Sei ausserdem $\varrho_h = \varrho$ für $h = 1, 2, \ldots N$, d.h. alle Risiken haben dieselben Versicherungsbedingungen (beispielsweise dieselbe Franchise etc.). Wir schreiben dann $m_h = m$, $v_h = v$ und $w_h = w$ und erhalten

$$\alpha = \frac{v}{nNm} \quad \text{und} \quad \overset{*}{\alpha}_{lh,k} = \frac{v}{v + nw} \cdot \frac{1}{nN} + \delta_{hk} \frac{nw}{v + nw} \cdot \frac{1}{n}$$

das heisst

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \frac{nw}{v+nw}\,\overline{X}_{\cdot k} + \frac{v}{v+nw}\,\overline{X} \\ &\text{worin} \quad \overline{X}_{\cdot k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ik} \qquad \text{und} \qquad \overline{X} = \frac{1}{nN}\sum_{i,j} X_{ij} \end{aligned}} \tag{3}$$

Unsere Schätzregel stimmt also in diesem Spezialfall mit der in [1] hergeleiteten Regel überein, falls man dort m durch seine Schätzung $\overline{X}$ ersetzt. Für die nächsten Beispiele erinnern wir noch daran, dass der Faktor $\frac{nw}{v+nw}$ üblicherweise «Glaubwürdigkeit» oder «Credibility» genannt wird. Diese Terminologie ist deshalb gerechtfertigt, weil die Regel

$$\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \frac{nw}{v+nw}\,\overline{X}_{\cdot k} + \frac{v}{v+nw}\,\overline{X}$$

in Worten etwa wie folgt formuliert werden kann:

Schätzwert = Faktor mal individuelle Schadenerfahrung $X_{\cdot k}$ plus (1-Faktor) mal allgemeine Schadenerfahrung $\overline{X}$

Der «Faktor» misst also die Glaubwürdigkeit der Statistik des individuellen Risikos k.

b) Der Fall einheitlicher as-if-Statistiken in der Rückversicherung

(Der Direktversicherungsfall mit «volumenmässiger» Risikodefinition – Versicherungssumme in der Feuerversicherung, Jahresumsatz in der Betriebshaftpflichtversicherung etc. – ist ebenfalls prinzipiell hier unterzubringen. Es ist dabei allerdings im Einzelfall abzuklären, ob die Voraussetzungen (i) und (ii) in Abschnitt 3 noch Gültigkeit haben.)

Im Falle beliebiger Prämienvolumina aber einheitlicher Vertragsbedingungen $\varrho_n = \varrho$ reduziert sich unsere Formel 2) auf

$$\alpha = \frac{v}{v + P_{\cdot k} w} \Bigg/ \sum_{j=1}^{N} \frac{m P_{\cdot j}}{v + P_{\cdot j} w} \quad \text{und} \quad \alpha^*_{lh,k} = \frac{v}{v + P_{\cdot k} w} \cdot \frac{\dfrac{P_{lh}}{v + P_{\cdot h} w}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{P_{\cdot j}}{v + P_{\cdot j} w}}$$

$$+ \delta_{hk} \frac{P_{\cdot k} w}{v + P_{\cdot k} w} \cdot \frac{P_{lk}}{P_{\cdot k}}$$

das heisst

4)
$$\boxed{\begin{array}{lll} & \hat{\mu}^*_k(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \dfrac{P_{\cdot k} w}{v + P_{\cdot k} w} \overline{X}_{\cdot k} + \dfrac{v}{v + P_{\cdot k} w} \overline{X} & \\ \text{wobei} & \overline{X}_{\cdot h} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{P_{lh}}{P_{\cdot h}} X_{lh} & \text{und} \quad \overline{X} = \displaystyle\sum_{h=1}^{N} \frac{\Pi_h}{\Pi} \overline{X}_{\cdot h} \\ \text{mit} & \Pi_h = \dfrac{P_{\cdot h}}{v + P_{\cdot h} w} & \text{und} \quad \Pi = \displaystyle\sum_{h=1}^{N} \Pi_h \end{array}}$$

Der beste Schätzwert ist also auch hier ein gewichtetes Mittel zwischen der individuellen Erfahrung $X_{\cdot k}$ und der Portefeuilleerfahrung $\overline{X}$. Als Glaubwürdigkeits-(Credibility-) Faktor tritt dabei $\dfrac{P_{\cdot k} w}{v + P_{\cdot k} w}$ auf.

Dabei ist noch folgendes zu beachten: Wenn über die Zeit gemittelt wird (d.h. bei Bildung der $\overline{X}_{\cdot h}$ für festes h), so sind die «natürlichen» Gewichte $P_{lh}/P_{\cdot h}$, welche aus den zugrundeliegenden Erstversicherungsprämienvolumina gebildet sind, zu verwenden; wenn aber diese Zeitmittel über das Portefeuille ausgemittelt werden, so sind die «verallgemeinerten Gewichte» Π_h/Π zu benutzen (siehe Anhang).

c) Der allgemeine Fall von vertragsweisen as-if-Statistiken

Die allgemeine Formel 2) kann auch wie folgt geschrieben werden

$$\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}) = \frac{P_{\cdot k} w_k}{v_k + P_{\cdot k} w_k} \bar{X}_{\cdot k} + \frac{v_k}{v_k + P_{\cdot k} w_k} \bar{X}$$

5) wobei $\bar{X}_{\cdot h} = \sum_{l=1}^{n} \frac{P_{lh}}{P_{\cdot h}} X_{lh}$ und $\bar{X} = \sum_{h=1}^{N} \frac{\Pi_h}{\Pi} \frac{m_k}{m_h} \bar{X}_{\cdot h}$

mit $\Pi_h = \frac{P_{\cdot h} m_h^2}{v_h + P_{\cdot h} w_h}$ und $\Pi = \sum_{h=1}^{N} \Pi_h$

Wir haben also auch in diesem allgemeineren Fall ein gewichtetes Mittel erhalten, das mit Glaubwürdigkeitsfaktor $\gamma_k = \frac{P_{\cdot k} w_k}{v_k + P_{\cdot k} w_k}$ die Erfahrung aus dem zu tarifierenden Vertrag berücksichtigt und mit dem komplementären Gewicht die Erfahrung aus dem Portefeuille. Die Schadensätze $\bar{X}_{\cdot h}$ werden zudem durch Multiplikation mit $\frac{m_k}{m_h}$ auf die Vertragsbedingungen des k. Vertrages transformiert, nachher geht man prinzipiell gleich vor wie im Spezialfall *b*). (Man beachte allerdings die leicht modifizierte Form von Π_h).

7. Optimale Schätzung bei unbekannter Strukturfunktion – Fall der einheitlichen as-if-Statistik

Wegen der einfachen Form unserer Schätzregel bildet die Berechnung von $\hat{\mu}_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{R})$ keinerlei rechnerische Schwierigkeiten, vorausgesetzt, dass die Zahlwerte für $m_h = E_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)]$, $v_h = E_U[\sigma^2(\vartheta, \varrho_h)]$ und $w_h = \mathrm{Var}_U[\mu(\vartheta, \varrho_h)]$ bekannt sind. Wo diese a priori Information fehlt, stellt sich die Frage, wie diese Werte auf Grund der Beobachtungen zu bestimmen seien. Die hier skizzierte Schätzmethode hat den Vorteil verteilungsfrei zu sein, bringt aber gewisse Schwierigkeiten anderer Art mit sich. Um diese Schwierigkeiten nicht all zu sehr in den Vordergrund zu rücken, behandeln wir deshalb nur den Fall der *ein-*

heitlichen as-if-Statistik. Damit beschränkt sich unsere Aufgabe auf die Bestimmung der beiden Grössen $v = E_U[\sigma^2(\vartheta, \varrho)]$ und $w = \mathrm{Var}_U[\mu(\vartheta, \varrho)]$.

Intuitiv hat dabei v die Bedeutung eines Masses der *Variabilität der Schadensätze innerhalb eines Vertrages* während w *die Variabilität der Schadensätze zwischen den Verträgen* ausdrückt. Je grösser w desto heterogener das Kollektiv; insbesondere bedeutet $w = 0$ Homogenität des Kollektivs. Es ist nun naheliegend für die Schätzung von v und w die folgenden statistischen Abweichungsmasse (nachstehend V und W genannt) zu betrachten.

a) V = beobachtete mittlere quadratische Abweichung vom Vertragsmittel

$$V = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^{n} \frac{P_{lh}}{P} (X_{lh} - \overline{X}_{\cdot h})^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} X_{lh}^2 - \frac{1}{N(n-1)} \sum_{h=1}^{n} \frac{P_{\cdot h}}{P} \overline{X}_{\cdot h}^2$$

b) W = beobachtete mittlere quatratische Abweichung vom Gesamtmittel

$$W = \frac{1}{Nn-1} \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} (X_{lh} - \tilde{\overline{X}})^2 = \frac{1}{Nn-1} \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} X_{lh}^2 - \frac{1}{Nn-1} \tilde{\overline{X}}^2$$

mit

$$P_{\cdot h} = \sum_{l=1}^{n} P_{lh}, \quad \overline{X}_{\cdot h} = \sum_{l=1}^{n} \frac{P_{lh}}{P_{\cdot h}} X_{lh}, \qquad \tilde{\overline{X}} = \sum_{h=1}^{N} \frac{P_{\cdot h}}{P} \overline{X}_{\cdot h} = \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} X_{lh}$$

und $$P = \sum_{h=1}^{N} P_{\cdot h} = \sum_{l,h} P_{lh} .$$

Wir berechnen nun die Erwartungswerte von V und W, wobei wir statt $E[\cdot \mid \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_N, \varrho]$ kurz $E[\cdot \mid \vec{\vartheta}, \varrho]$ schreiben.

a) Es ist dann für V:

$$N(n-1)\,E[V\,|\,\vec{\vartheta},\varrho] = \sum_{l,h,} \frac{P_{lh}}{P}\left\{\mu^2(\vartheta_h,\varrho) + \frac{\sigma^2(\vartheta_h,\varrho)}{P_{lh}}\right\}$$

$$-\sum_{h=1}^{N} \frac{P_{\cdot h}}{P}\left\{\mu^2(\vartheta_h,\varrho) + \frac{\sigma^2(\vartheta_h,\varrho)}{P_{\cdot h}}\right\}$$

$$= \frac{n-1}{P}\sum_{h=1}^{N}\sigma^2(\vartheta_h,\varrho)$$

(Man beachte, dass wir die Beziehung $\mathrm{Var}[\overline{X}_{\cdot h}|\vec{\vartheta},\varrho] = \dfrac{\sigma^2(\vartheta_h,\varrho)}{P_{\cdot h}}$ verwendet haben, die leicht aus den in Abschnitt 3 und 5 gemachten Annahmen hergeleitet werden kann.)

Schliesslich erhalten wir $\quad E[V|\varrho] = \dfrac{E_U[\sigma^2(\vartheta,\varrho)]}{P} = \dfrac{v}{P}$,

was bedeutet, dass die Grösse V eine erwartungstreue Schätzung für $\dfrac{v}{P}$ ist.

b) Andererseits ist für W

$$(nN-1)\,E[W|\vec{\vartheta},\varrho] = \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P}\left\{\mu^2(\vartheta_h,\varrho) + \frac{\sigma^2(\vartheta_h,\varrho)}{P_{lh}}\right\} - \left(\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}\mu(\vartheta_h,\varrho)\right)^2 -$$

$$-\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P^2}\sigma^2(\vartheta_h,\varrho) =$$

$$= \sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}\mu^2(\vartheta_h,\varrho) - \left(\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}\mu(\vartheta_h,\varrho)\right)^2 +$$

$$+\sum_{h=1}^{N}\left(\frac{n}{P} - \frac{P_{\cdot h}}{P^2}\right)\sigma^2(\vartheta_h,\varrho)$$

das heisst,

$$(nN-1)\,E[W\mid\varrho] = \sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}\{m^2+w\} - m^2 - \sum_{h=1}^{N}\frac{P^2_{\cdot h}}{P^2}\,w + (nN-1)\,\frac{v}{P}$$

$$= (nN-1)\,\frac{v}{P} + w\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}\left(1-\frac{P_{\cdot h}}{P}\right)$$

Die Grösse W ist also eine erwartungstreue Schätzung für die

Linearkombination $\dfrac{v}{P}+\tilde{\Pi}w$ mit $\tilde{\Pi} = \dfrac{1}{nN-1}\sum\limits_{h=1}^{N}\dfrac{P_{\cdot h}}{P}\left(1-\dfrac{P_{\cdot h}}{P}\right)$.

Zusammenfassend ist also

$$6)\qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\hat{v}}{P} \qquad\quad &= V \\ \frac{\hat{v}}{P} + \tilde{\Pi}\hat{w} &= W \end{aligned}}$$

wenn wir $\hat{v}$ und $\hat{w}$ für die Schätzwerte von v und w schreiben (siehe Anhang).

Nun sind diese Schätzwerte $\hat{v}$ und $\hat{w}$ zwar erwartungstreu (als lineare Funktionen der V und W) und können zudem, wie wir eben gesehen haben, leicht auf Grund der Beobachtungen V und W ermittelt werden. Ein Nachteil der hier vorgeschlagenen Methode besteht jedoch darin, dass der Schätzwert $\hat{w}$ für die nichtnegative Grösse $w = \mathrm{Var}_U[\mu(\vartheta, \varrho)]$ immer dann negativ ausfällt, wenn $W < V$ gilt, und dieser Fall kann tatsächlich eintreten wie folgende Überlegung zeigt: Es ist

$$W = \frac{1}{nN-1}\sum_{l,h}\frac{P_{lh}}{P}(X_{lh}-\tilde{X})^2 = \frac{1}{nN-1}\sum_{l,h}\frac{P_{lh}}{P}(X_{lh}-\bar{X}_{\cdot h})^2 +$$

$$+\frac{1}{nN-1}\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}(\bar{X}_{\cdot h}-\tilde{X}^2),\text{ das heisst,}$$

$W < V$ ist gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{nN-1}\sum_{l,l}\frac{P_{lh}}{P}(X_{lh}-\bar{X}_{\cdot h})^2+\frac{1}{nN-1}\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}(\bar{X}_{\cdot h}-\tilde{X})^2$$

$$<\frac{1}{N(n-1)}\sum_{l,h}\frac{P_{lh}}{P}(X_{lh}-\bar{X}_{\cdot h})^2$$

oder
$$\sum_{h=1}^{N}\frac{P_{\cdot h}}{P}(\bar{X}_{\cdot h}-\tilde{X})^2<\frac{N-1}{N(n-1)}\sum_{l,h}\frac{P_{lh}}{P}(X_{lh}-\bar{X}_{\cdot h})^2$$

was beispielsweise für $\bar{X}_{\cdot h}=\tilde{X}$ unabhängig von h und $X_{lh}\neq\bar{X}_{\cdot h}$ für mindestens ein l und h immer erfüllt ist.

Damit sind wir unversehens mit der Problematik negativer Schätzwerte für Varianzkomponenten konfrontiert (siehe z.B. [3]), auf die wir hier nicht näher eintreten wollen. Folgende Regel sollte für die Praxis genügen:

1. falls $W > V$ wähle obige Schätzwerte $\hat{v}$ und $\hat{w}$
2. falls $W \leqq V$ setze $\hat{w} = 0$, d.h. benutze die «homogene Schätzregel»

$$\hat{\mu}_k(\mathfrak{P},\mathfrak{X},\mathfrak{R})=\tilde{X}=\sum_{l,h}\frac{P_{lh}}{P}X_{lh}$$ (Durchschnittssatz über das Portefeuille für alle Verträge h)

Die intuitive Begründung dieser Regel ist offensichtlich: Falls $W \leqq V$ ist, so stützt die Statistik die Hypothese, dass die Verträge einem homogenen Kollektiv entnommen seien.

Am Rande sei vermerkt, dass man statt der hier gewählten verteilungsfreien Schätzmethode in der Tat durch zusätzliche Voraussetzungen über den Verteilungstypus der Schadensätze ein anderes Schätzverfahren angeben kann, welches direkt zu nichtnegativen Schätzwerten für w führt. Wir halten aber die verteilungsfreie Methode mit der am Schluss zitierten Zusatzregel für interessanter.

Anhang

Ein Zahlenbeispiel

1. Die vorgegebene Statistik

Im Sinne eines konkreten Beispiels stellen wir uns bei der folgenden Statistik einerseits vor, dass es sich um die Daten eines Haftpflichtschadenexzedentenportefeuilles handle, welche die üblichen Korrekturen für Schadeninflation, Tarifänderungen und inadäquate Schadenreservierung bereits enthalten und andererseits, dass alle Schadensätze bezüglich desselben 1. Risikos und derselben Deckungssumme gemeint sind (einheitliche as-if-Statistik). In Zahlen sieht dann eine solche Statistik etwa wie folgt aus:

Bruttoprämien P (in Mio) und Schadensätze X (in %) des Vertrags k im Jahr l

Vertrag:	$h=1$		$h=2$		$h=3$		$h=4$		$h=5$		$h=6$		$h=7$	
	P	X	P	X	P	X	P	X	P	X	P	X	P	X
Jahr:														
$l=5$	5	0.0	14	11.3	18	8.0	20	5.4	21	9.7	43	9.7	70	9.0
$l=4$	6	0.0	14	25.0	20	1.9	22	5.9	24	8.9	47	14.5	77	9.6
$l=3$	8	4.2	13	18.5	23	7.0	25	7.1	28	6.7	53	10.8	85	8.7
$l=2$	10	0.0	11	14.3	25	3.1	29	7.2	34	10.3	61	12.0	92	11.7
$l=1$	12	7.7	10	30.0	27	5.2	35	8.3	42	11.1	70	13.1	100	7.0
	41	3.1	62	19.5	113	5.0	131	7.0	149	9.5	274	12.1	424	9.2

wobei in der untersten Zeile für jeden Vertrag h

die Gesamtprämie $P_{\cdot h} = \sum_{l=1}^{5} P_{lh}$ und

der mittlere Schadensatz $\overline{X}_{\cdot h} = \sum_{l=1}^{5} \frac{P_{lh}}{P_{\cdot h}} X_{lh}$

ermittelt sind.

Für das ganze Schadenexzedentenportefeuille erhalten wir damit ein Bruttoprämienvolumen $P = \sum_{h=1}^{7} P_{\cdot h}$ von 1194 Mio und

einen mittleren Schadensatz $\tilde{\overline{X}} = \sum_{h=1}^{7} \frac{P_{\cdot h}}{P} \overline{X}_{\cdot h}$ von 9.6%

2. Optimale Schätzung bei bekannter Struktur des Kollektivs

Wir nehmen an, dass die in der Formel 4)

$$\mu_k^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \varrho) = \frac{P_{\cdot k}\, w}{v + P_{\cdot k} w} X_{\cdot k} + \frac{v}{v + P_{\cdot k} w} \overline{X}$$

auftretenden Parameter v und w bekannt seien und die Werte

$$v = 209.0 \cdot 10^{-4} \text{ und } w = 12.1 \cdot 10^{-4}$$

annehmen. In der Praxis können solche Zahlwerte beispielsweise auf Grund umfassender Gemeinschaftsstatistiken ermittelt werden, für unsere Zwecke haben wir hier für v und w einfachheitshalber die untenstehend nach den Methoden in Abschnitt 7 berechneten Schätzwerte $\hat{v}$ und $\hat{w}$ gewählt.

Zunächst ermitteln wir die Grössen $\gamma_h = \frac{P_{\cdot h}\, w}{v + P_{\cdot h}\, w}$ für $h = 1, 2, \ldots 7$

und $\frac{\Pi_h}{\Pi} = \frac{\gamma_h}{\gamma}$ mit $\sum_{h=1}^{7} \gamma_h = \gamma$ für $h = 1, 2, \ldots 7$.

Einsetzen der Zahlwerte liefert

	$h=1$	$h=2$	$h=3$	$h=4$	$h=5$	$h=6$	$h=7$
γ_h (in %)	70.4	78.2	86.7	88.4	89.6	94.1	96.1
γ_h/γ (in %)	11.7	13.0	14.4	14.6	14.8	15.6	15.9

Damit erhalten wir für die globale Schadenerfahrung

$$\overline{X} = \sum_{h=1}^{7} \frac{\Pi_h}{\Pi} \overline{X}_{\cdot h}$$

den Wert 9.4% (Man beachte die verschiedenen Werte für $\overline{X}$ und $\tilde{\overline{X}}$!) und können die Credibility-Prämie $\hat{\mu}_h^*$ ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{X}$, ϱ) für $h = 1, 2, \ldots 7$ berechnen gemäss

$$\hat{\mu}_h^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{X}, \varrho) = \gamma_h \overline{X}_{\cdot h} + (1-\gamma_h) \overline{X}$$

Einsetzen der Zahlwerte liefert schliesslich die folgende Zusammenstellung

Vertrag Nr.	$h=1$	$h=2$	$h=3$	$h=4$	$h=5$	$h=6$	$h=7$
Durchschnittsprämie $\tilde{\overline{X}}$	9.6%	9.6%	9.6%	9.6%	9.6%	9.6%	9.6%
Credibility-Prämie $\hat{\mu}_h^*$	5.0%	17.3%	5.6%	7.3%	9.5%	11.9%	9.2%
individuelle Prämie $\overline{X}_{\cdot h}$	3.1%	19.5%	5.0%	7.0%	9.5%	12.1%	9.2%

3. Schätzung der Parameter v und w

Auf Grund der Statistik berechnen wir die Zahlwerte

$$\sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} X_{lh}^2 = 107.6 \cdot 10^{-4}, \ \sum_{h=1}^{7} \frac{P_{\cdot h}}{P} \overline{X}_{\cdot h}^2 = 102.7 \cdot 10^{-4}, \tilde{\overline{X}}^2 = 92.2 \cdot 10^{-4}$$

sowie

$$\sum_{h=1}^{7} \frac{P_{\cdot h}}{P} \left(1 - \frac{P_{\cdot h}}{P}\right) = 0.781$$

Damit ist

$$V = \frac{1}{28} \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} X_{lh}^2 - \frac{1}{28} \sum_{h=1}^{7} \frac{P_{\cdot h}}{P} \overline{X}_{\cdot h}^2 = 0.175 \cdot 10^{-4} = \frac{\hat{v}}{1194}$$

und $$W = \frac{1}{34} \sum_{l,h} \frac{P_{lh}}{P} X_{lh}^2 - \frac{1}{34} \tilde{\overline{X}}^2 = 0.4529 \cdot 10^{-4} = \frac{\hat{v}}{1194} + \frac{0.781}{34} \hat{w}$$

woraus wir schliesslich unter Verwendung von 6)

$\hat{v} = 209.0 \cdot 10^{-4}$

und $\hat{w} = 12.1 \cdot 10^{-4}$ erhalten.

Literatur

[1] *H. Bühlmann*, A Distribution Free Method for General Risk Problems, ASTIN Bulletin Vol. 3 (1964)

[2] *H. Bühlmann*, Optimale Prämienstufensysteme, *Mitteilungen Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, Band 64 (1964)

[3] *W. A. Thompson*, The Problem of Negative Estimates of Variance Components, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 33 (1962)

Zusammenfassung

Es wird eine Formel entwickelt, welche für die einzelnen Risiken innerhalb eines heterogenen Portefeuilles eine erfahrungsgemässe Prämie liefert. Diese Prämie wird als gewichtetes Mittel der Kollektiverfahrung und der individuellen Erfahrung erhalten. Mit «Glaubwürdigkeit» (Credibility) bezeichnen wir dabei das der individuellen Erfahrung zugeordnete Gewicht. Während der Subjektivist dieses Gewicht als Ausdruck seines «Underwriting Judgement» auffasst, zeigen wir hier mit einer allgemeinen Methode, die gleichermassen für die Direkt- und Rückversicherung anwendbar ist, wie die Glaubwürdigkeit aus den statistischen Daten objektiv geschätzt werden kann.

Riassunto

In questo articolo abbiamo sviluppato una formula per calcolare il premio per un rischio individuale che si trova in un portafoglio eterogeno. Per tale premio si trova una media ponderata della sinistralità del portafoglio intero e della sinistralità del rischio individuale. Secondo si usa, denominiamo «credibility» il peso che corrisponde alla statistica individuale. Mentre i «soggettivisti» vedono questa «credibility» come un modo per esprimere il loro «underwriting judgement», vogliamo dimostrare che questa nozione può essere interpretata statisticamente e diamo un metodo generale (applicabile al caso dell' assicurazione e della riassicurazione) per il calcolo dei fattori di «credibility» nella pratica.

Résumé

Dans la présente note est développé une formule pour le calcul de la prime d'un risque individuel parvenant d'un portefeuille hétérogène. Pour cette prime on trouve une moyenne pondérée entre la statistique de sinistre du portefeuille entier et celle du risque individuel. Nous appelons d'habitude «credibility» le poids qui correspond à la statistique individuelle. Tandis que les subjectivistes voient la «credibility» comme un moyen d'exprimer leur «underwriting judgement», nous prouvons ici que cette notion peut être interprétée du point de vue statistique et nous développons aussi une méthode générale (qui comprend les cas de l'assureur et du réassureur) pour le calcul des facteurs de «credibility» dans la pratique.

Abstract

We are developing a formula for the calculation of the premium of each individual risk within a heterogenous portfolio. This premium is found to be a weighted average of the portfolio experience, on the one hand, and the individual claims experience on the other. The weight corresponding to the individual experience is called credibility as usual. Whereas the subjectivist sees «credibility» as a means to express his underwirting judgement, we shall prove here that this notion can be interpreted statistically and we also give a general method (including both the case of insurance and of reinsurance, for the calculation of credibility factors, in practice.