Die statistische Erfassung von Zeitschäden und ihre Zuordnung zu den Lebensaltern in der Krankenversicherung

Die statistische Erfassung von Zeitschäden und ihre Zuordnung zu den Lebensaltern in der Krankenversicherung

Von B. Romer, Basel

Allgemeines

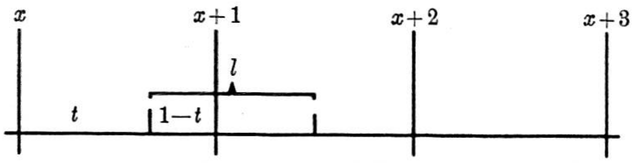
Zeitschäden weisen eine Dauer auf (Beispiel: Länge eines Spitalaufenthaltes, einer Arbeitsunfähigkeit); eine Person, welche von einem solchen Versicherungsfall betroffen ist, durchläuft somit während der Schadendauer eine gewisse Altersstrecke vom Beginn des Schadenfalles an bis zu dessen Ende. Wir setzen im folgenden voraus, dass die Prämie wie in der Lebensversicherung anhand einer Sterbetafel nach dem Äquivalenzprinzip für mehrjährige (evtl. lebenslängliche) Versicherungen kalkuliert wird. Es entsteht sogleich die Frage: Welchen Lebensaltern sind dann die Schäden zuzuordnen? Die pro Versicherungsjahr anfallende durchschnittliche Anzahl Schadentage gehört nach der ersten Methode zum erreichten Lebensalter beim Schadenbeginn, nach einer zweiten zum jeweils erreichten Alter (ausgedrückt in vollen Altersjahren) während des Schadenfalles.

Kalkulatorisch richtig ist für die Prämie nur das erste Verfahren. Man erkennt dies daran, dass jeder neu in die Versicherung Aufgenommene nur für Versicherungsfälle aufzukommen haben sollte, die von seinem Eintritt an entstehen, und nicht auch noch für früher begonnene, welche sich bis zu seinem Eintrittsalter und noch weiter erstrecken. Statistisch geht man jedoch im allgemeinen nach dem zweiten Verfahren vor und verwendet dessen Ergebnisse für die Tarifberechnung. Es erscheint daher der Vergleich beider angezeigt, um festzustellen, ob die Verschiebungen tragbar sind. Das soll im folgenden geschehen.

Die Grundbegriffe für den Vergleich

Wir beziehen unsere Gedankengänge auf Männer des Alters x. Das Alter sei nicht ganzzahlig abgestuft (wie das in den Statistiken gebräuchlich ist), sondern gelte als stetig. x braucht somit nicht ganzzahlig zu sein. Wir tragen später jedoch den ganzzahligen Alterssprüngen Rechnung.

Wir setzen das Bestehen von Wahrscheinlichkeitsdichten (Frequenzfunktionen) voraus, und zwar benötigen wir:



1) $w_x(t)$: Ein Schadenfall, der zwischen x und $(x+1)$ entstanden ist, hat die Wahrscheinlichkeit $w_x(t)\ dt$, auf dem Altersabschnitt $(x+t,\ x+t+dt)$ begonnen zu haben. Dabei ist $0 < t \leqq 1$. Man hat

$$\int_0^1 w_x(t)\, dt = 1 . \tag{1}$$

Wir nehmen also hier (und stetsfort auch später) Bezug auf eine «statistische Jahresmenge der entstandenen Schadenfälle», alle beginnend in $(x,\ x+1)$. Man beachte, dass die Zahlenwerte entspringen aus Schadenfällen, *nachdem* diese entstanden sind. $w_x(t)$ ist somit eine bedingte Wahrscheinlichkeit und hat nichts zu tun mit der Wahrscheinlichkeit eines Schadenfalles, im betreffenden Altersbereich zu entstehen.

2) $f_{x+t}(l)$: Ein Schadenfall habe, nachdem er zwischen $(x+t,\ x+t+dt)$ entstanden ist, die Wahrscheinlichkeit $f_{x+t}(l)\ dl$, eine Dauer zwischen l und $(l+dl)$ aufzuweisen, d.h. zwischen $x+t+l$ und $x+t+l+dt+dl$ zu enden. Die Schadendauer sei endlich; es gibt somit eine – vorläufig noch als von x beeinflusst gedachte – Schranke L_x, für welche $0 < l \leqq L_x > 1$. Man hat

$$\int_0^{L_x} f_{x+t}(l)\, dl = 1 . \tag{2}$$

Die von x abhängigen L_x ersetzen wir durch deren kleinste obere Schranke L, indem wir $f_{x+t}(l)$ für $l > L_x$ einfach Null setzen. Dann gewinnt man allgemein, wie leicht nachzuweisen ist,

$$\int_0^1 \int_0^L w_x(t)\, f_{x+t}(l)\, dt\, dl = 1\,. \tag{3}$$

3) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zwischen x, $(x+1)$ entstandener Schadenfall sich über $(x+1)$ hinaus erstreckt, wird (vgl. Bild 1)

$$\int\int_{t+l>1} w_x(t)\, f_{x+t}(l)\, dt\, dl = \int_0^1 w_x(t) \int_{1-t}^{L} f_{x+t}(l)\, dl\, dt. \tag{4a}$$

Die Verteilung in l ist links gestutzt, und zwar bei t.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Altersbereich $(x,\ x+1)$ entstandener Schadenfall zwischen $(x+1)$ und $(x+2)$ endet (linker Rand aus-, rechter Rand eingeschlossen), wird

$$\int\int_{1<t+l\leq 2} w_x(t)\, f_{x+t}(l)\, dl\, dt = \int_0^1 w_x(t) \int_{1-t}^{2-t} f_{x+t}(l)\, dl\, dt\,. \tag{4b}$$

Dies ist fortsetzbar um je ein Jahr, bis die obere Schranke L erreicht bzw. übertroffen wird.

4) Wichtig sind indessen die insgesamt durchlaufenen Schadendauern (Zeitlängen), verbunden mit ihren Wahrscheinlichkeiten. Die Schadentage, ausgedrückt in Jahresbruchteilen, entfallen je nach der Ausdehnung eines Schadenfalles auf den Altersabschnitt zwischen $(x+1)$ und $(x+2)$, $(x+2)$ und $(x+3)$ usw. Sie werden nach dem eingangs geschilderten zweiten Verfahren im Altersabschnitt mitgezählt.

Der Erwartungswert $\bar{L}_x$ der Schadendauer für einen Schadenfall, nachdem dieser zwischen x und $(x+1)$ entstanden ist, beträgt

$$\bar{L}_x = \int_0^1 w_x(\mathrm{t}) \int_0^L l f_{x+t}(l)\, dl\, dt\,. \tag{5}$$

Es wird also zuerst summiert über alle Schadenfälle, welche zwischen $x+t$ und $x+t+dt$ entstanden sind, und dann ein weiteres Mal summiert über alle Altersabschnitte zwischen x und $(x+1)$ gemäss der Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieser Zeitstrecke entstanden zu sein.

Der Erwartungswert $\bar{L}_x\,(1;2)$ der bei einem solchen Schadenfall auf die Altersstrecke von $(x+1)$ bis $(x+2)$ entfallenden Schadentage (gemessen in Jahren) wird sinngemäss

$$\bar{L}_x(1;2) = \int_0^1 w_x(t) \int_{1-t}^{2-t} (l+t-1)\, f_{x+t}(l)\, dl\, dt +$$

$$+ \int_0^1 w_x(t)\,\big[(2-t)-(1-t)\big] \int_{2-t}^{L} f_{x+t}(l)\, dl\, dt\,. \qquad (6\,\mathrm{a})$$

$\bar{L}_x(1;2)$ zerfällt nämlich in zwei Teile: einerseits in Schadentage derjenigen Schadenfälle, welche zwischen den Altern $(x+1)$ und $(x+2)$ enden; anderseits die Schadentage derjenigen Schadenfälle, welche sich darüber hinaus erstrecken. Bei den ersten zählt nur die Schadendauer nach dem Alter $(x+1)$, d.h. die Zeitstrecke $l-(1-t)$; bei den zweiten zählt dagegen die volle Dauer zwischen $(x+1)$ und $(x+2)$, also 1.

$\bar{L}_x(1;2)$ lässt sich auch schreiben als

$$\bar{L}_x(1;2) = \int_0^1 w_x(t) \int_{1-t}^{2-t} \left(\int_l^L f_{x+t}(\lambda)\, d\lambda \right) dl\, dt\,. \qquad (6\,\mathrm{b})$$

Denn dass ein Schadenfall, soeben zwischen $(x+t)$ und $(x+t+dt)$ entstanden, über die Zeitstrecke l hinaus währt, hat die Wahrscheinlichkeit $\int_l^L f_{x+t}(\lambda)\, d\lambda$; jedem, der diese Eigenschaft erfüllt, d.h. nach l jeweils noch übrigbleibt, weisen wir die durchlaufene Schadenzeit dl zu und summieren diese durchlaufene Schadenzeit-Abschnitte zwischen $l=1-t$ und $l=2-t$ entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit. Schliesslich ist noch über alle Entstehungszeiten dt entsprechend deren Wahrscheinlichkeit zu summieren. Der so gebildete Ausdruck muss mit (6a) übereinstimmen, da nur der Rechnungsgang sich anders vollzieht. Die Gleichheit lässt sich übrigens leicht durch partielle Integration von

$$\int_{1-t}^{2-t} \int_l^L f_{x+t}(\lambda)\, d\lambda\, dt$$

nachweisen.

(6b) ist trotz der drei auftretenden Integrale handlicher, sofern wir für das innerste Integral die Kurzbezeichnung $F_{x+t}(l)$ einführen:

$$F_{x+t}(l) = \int_{l}^{L} f_{x+t}(\lambda)\, d\lambda . \tag{7}$$

Entsprechendes gilt für den Altersabschnitt zwischen $(x+2)$ und $(x+3)$, zwischen $(x+3)$ und $(x+4)$, ... zwischen $(x+n-1)$ und $(x+L)$, wenn $n-1 < L \leqq n$, indem man die Integralgrenzen sinngemäss überträgt.

Der Erwartungswert der Länge der Zeitstrecke, welche sich von $(x+1)$ an bis zum Auslaufen eines Schadenfalles ausdehnt, heisse $\bar{L}_x(1;L)$; er wird

$$\bar{L}_x(1;L) = \int_0^1 w_x(t) \int_{1-t}^{L} F_{x+t}(l)\, dl\, dt . \tag{8a}$$

In gleicher Weise gilt wiederum

$$\bar{L}_x = \int_0^1 w_x(t) \int_0^L F_{x+t}(l)\, dl\, dt . \tag{8b}$$

Der Übergang zu den zu vergleichenden statistischen Masszahlen

x werde von nun an als ganzzahlig unterstellt.

k_x sei die nach dem zweiten Zählverfahren auf einen einzelnen Versicherten entfallende durchschnittliche Zahl der Schadentage (gemessen in Jahren). Es werden folglich die auf der Altersstrecke von $(x+1)$ bis $(x+2)$ liegenden Schadentage bei k_{x+1} mitgezählt, diejenigen zwischen $(x+2)$ und $(x+3)$ bei k_{x+2} usw., auch wenn der Schadenfall vor $(x+1)$ entstanden ist.

k_x^* sei die nach dem (kalkulatorisch richtigen) ersten Verfahren auf einen Versicherten entfallende durchschnittliche Zahl der Schadentage (wiederum gemessen in Jahren). Man zählt dabei nur die zwischen x und $(x+1)$ entstandenen Schadenfälle, für diese jedoch alle dazugehörigen Schadentage, gleichgültig in welchem Altersbereich nach x sie dann liegen.

Damit wird $l_x k_x^*$ bzw. die Gesamtzahl der entsprechend gezählten Schadentage für alle x-jährigen zusammen. Unter l_x ist die bei der statistischen Ermittlung der k_x, k_x^* massgebende Überlebensgesamtheit zu verstehen.

Von den $l_x k_x^*$ entstandenen Schadentagen entfällt der Verhältnisanteil $\bar{L}_x(1;2)/\bar{L}_x$ auf die Altersstrecke zwischen $(x+1)$ und $(x+2)$ – und so fort. $l_x k_x^*$ enthält also den «Übertrag» in die nächsthöheren Alter, soweit sich die Schadendauern überhaupt erstrecken können, ermangelt dafür des «Vortrages» von Schadenzeiten aus Schadenfällen, die vor x entstanden sind. Daher ergibt sich

$$l_x k_x - l_x k_x^* = -l_x k_x^* \frac{\bar{L}_x(1;L)}{\bar{L}_x} + l_{x-1} k_{x-1}^* \frac{\bar{L}_{x-1}(1;2)}{\bar{L}_{x-1}} + \\ + l_{x-2} k_{x-2}^* \frac{\bar{L}_{x-2}(2;3)}{\bar{L}_{x-2}} + \ldots + l_{x-n} k_{x-n}^* \frac{\bar{L}_{x-n}(n-1;L)}{\bar{L}_{x-n}} \,. \qquad (9)$$

Dies ist unsere Hauptgleichung. Wir halten fest, dass die Differenz der k_x, k_x^* zunächst untrennbar mit der ursprünglichen, statistisch verwendeten Absterbeordnung verbunden bleibt und dann eben gedanklich auf andere übertragen werden muss. Das trifft überdies auch für $w_x(t)$, $f_{x+t}(l)$ und die daraus abgeleiteten Grössen zu.

Wir versuchen nun zu vereinfachen, soweit dies aus statistischen Erfahrungen vertretbar ist.

1) Wir setzen $w_x(t) = \text{const}$ im Bereich $0 < t \leqq 1$. Das bedeutet, dass das Auftreten von Schadenfällen innerhalb eines Lebensjahres gleichmässig verteilt ist. Wegen (1) wird $w_x(t) = 1$.

2) Es gelte $$\frac{\partial f_{x+t}(l)}{\partial t} = 0 \,.$$

Das besagt, dass sich das Kurvenprofil von $f_{x+t}(l)$ lediglich mit x verändert, beim Verrücken von t dagegen starr bleibt. Man kann also schreiben $f_x(l)$ und $F_x(l)$ statt $f_{x+t}(l)$, $F_{x+t}(l)$.

3) Ist $f_x(l)$ sogar bezüglich x nur träge veränderlich, dann auch $F_x(l)$. Innerhalb der Zeitlänge L würden sich dann $F_x(l)$, $F_{x-1}(l)$,

$F_{x-n}(l)$ einander gleichsetzen lassen, und $f_x(l)$ würde innerhalb dieses Bereiches zu $f(l)$, $F_x(l)$ zu $F(l)$.

Dann tritt anstelle von $\bar{L}_x$

$$\bar{L} = \int_0^1 \int_0^L l f(l)\, dl\, dt = \int_0^1 \int_0^L F(l)\, dl\, dt\,;{}^{1)} \tag{10}$$

anstelle von $\bar{L}_x(1;L)$

$$\bar{L}(1;L) = \int_0^1 \int_{1-t}^{L} F(l)\, dl\, dt\,; \tag{11a}$$

anstelle von $\bar{L}_x(1;2)$

$$\bar{L}(1;2) = \int_0^1 \int_{1-t}^{2-t} F(l)\, dl\, dt \tag{11b}$$

usw.

und zudem ist

$$\bar{L} = \bar{L}(0;1) + \bar{L}(1;L) = \bar{L}(0;1) + \bar{L}(1;2) + \\ + \ldots + \bar{L}(n-1;L)\,. \tag{12}$$

Der Unterschied nach der Hauptgleichung (9) vereinfacht sich dadurch zu

$$l_x k_x - l_x k_x^* = (-l_x k_x^* + l_{x-1} k_{x-1}^*)\,\frac{\bar{L}(1;2)}{\bar{L}} + (-l_x k_x^* + l_{x-2} k_{x-2}^*)\,\frac{\bar{L}(2;3)}{\bar{L}} + \\ + \ldots + (-l_x k_x^* + l_{x-n} k_{x-n}^*)\,\frac{\bar{L}(n-1;L)}{\bar{L}}\,. \tag{13}$$

Die Differenz auf der linken Seite ist somit ein gewogener Durchschnitt von Differenzen der erwarteten Schadentage rechts, wobei als Gewichte die zugeteilten Schadentage aus den unterstellten Häufigkeitsverteilungen dienen.

---

[1]) Die Integration nach t von Null bis Eins könnte nun hier überhaupt wegfallen.

l_x fällt mit steigendem x monoton. Man kann sich daher gewisse Abschätzungen überlegen, z. B. so:

Im Bereich fallender Produkte $l_x k_x^*$ ist die rechte Seite grösser als Null, also $k_x > k_x^*$;

im Bereich steigender Produkte $l_x k_x^*$ ist die rechte Seite kleiner als Null, also $k_x < k_x^*$.

Im allgemeinen wird k_x^* mit x steigen. Das Produkt $l_x k_x^*$ ist dann meist weniger veränderlich als k_x^* für sich allein. Nehmen wir an, man könne mit $0 < \vartheta < 1$ setzen

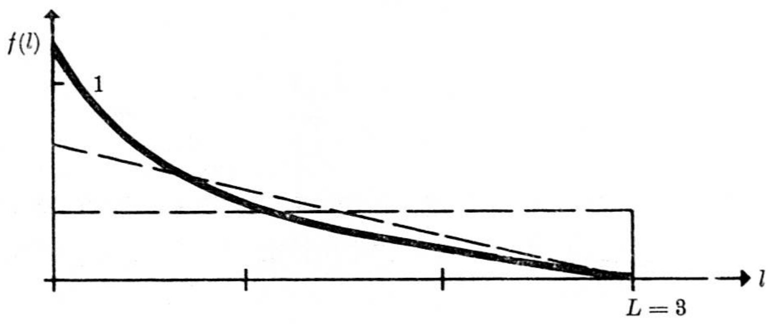
$$|l_{x-h} k_{x-h}^* - l_x k_x^*| < \vartheta l_x k_x^*, \quad h = 1, 2, \dots n. \tag{14}$$

Dann gewinnt man aus (13) nach Division durch $l_x k_x^*$ die Ungleichung

$$\frac{|k_x - k_x^*|}{k_x^*} \leqq \vartheta \frac{\bar{L}(1; L)}{\bar{L}} . \tag{15}$$

Zahlenmässige Abschätzungen

Um schliesslich Zahlenwerte für die Abschätzungen zu bekommen, kann man Gedankenmodelle oder aus der Erfahrung stammende Verteilungen heranziehen. So eignen sich z. B. folgende Modelle zu vorsichtigen Abschätzungen (Bild 2):



1) Eine Rechteck-Verteilung der $f(l)$; die Wahrscheinlichkeitsdichte hat den Wert $\frac{1}{L}$, die Verteilung erstreckt sich von 0 bis L.

2) Eine Dreieck-Verteilung der $f(l)$; sie lässt sich in allgemeiner Gestalt darstellen und ist dann vielseitig verwendbar mit vier wesentlichen (gegenseitig unabhängigen) Parametern (z. B. als «fast-U-Verteilung»). Wir verwenden wegen des allmählichen Auslaufens der $f(l)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Nullpunkt und Achsenabschnitten als Katheten; die Seite auf der $f(l)$-Achse ist $2/L$ lang, diejenige auf der l-Achse L.

3) Ein Hyperbel-Abschnitt für die $f(l)$ zwischen Null und L; das verlangt anstelle eines einzigen Parameters deren zwei, indem man aus der Darstellung

$$f(l) = \frac{A_1 l + B_1}{A_2 l + B_2} \qquad \text{mit } A_2, B_2 \neq 0$$

über die Umgestaltung

$$f(l) = a + \frac{b}{c+l}, \qquad c > 0,$$

durch Einführen von $f(0)$ und wegen $f(L) = 0$ umwandelt in

$$f(l) = \frac{cf(0)}{L}\left[\frac{c+L}{c+l} - 1\right].$$

Wegen der Gleichung (2) lässt sich einer der drei Parameter $f(0)$, c, L noch entfernen. Wir behalten c und L bei und erhalten

$$1 = \frac{cf(0)}{L}\left[(c+L)\,ln\,\frac{c+L}{c} - L\right]$$

und damit

$$f(0) = \frac{L}{c\,(c+L)\,ln\left(1+\frac{L}{c}\right) - cL}.$$

4) Eine Exponentialfunktion der Gestalt

$$f(l) = A\,(e^{-al} - e^{-aL}) \qquad \text{mit } A, a > 0.$$

Wiederum mittels $f(0)$ und der «Durchhangkonstanten» a für den Auslauf ausgedrückt, wird dies

$$f(l) = \frac{f(0)}{1-e^{-aL}}\,(e^{-al}-e^{-aL})\,.$$

Wegen der Gleichung (2) hat man

$$1 = \frac{f(0)}{1-e^{-aL}}\left\{\frac{1}{a}\,(1-e^{-aL})-Le^{-aL}\right\},$$

woraus sich $f(0)$ schliesslich durch a und L allein ersetzen lässt. Man erhält

$$f(l) = \frac{a}{1-e^{-aL}(1+aL)}\,(e^{-al}-e^{-aL})\,.$$

Wir werden diese vierte Variante aber nicht weiter verfolgen.

Es ergibt sich für die drei erstgenannten Musterfälle:

1) $$f(l) = \frac{1}{L}, \qquad F(l) = \frac{1}{L}\,(L-l), \qquad \bar{L} = \frac{L}{2}$$

$$\bar{L}(1;L) = \frac{3L(L-1)+1}{6L}\,.$$

2) $$f(l) = \frac{2}{L^2}\,(L-l), \qquad F(l) = \left(1-\frac{l}{L}\right)^2, \qquad L = \frac{L}{3}$$

$$\bar{L}(1;L) = \frac{1}{12\,L^2}\left[L^4-(L-1)^4\right].$$

3) $$f(l) = \frac{1}{(c+L)\,ln\left(1+\dfrac{L}{c}\right)-L}\;\frac{L-l}{c+l}$$

$$F(l) = \frac{1}{(c+L)\, ln\left(1+\frac{L}{c}\right) - L} \left[(c+l)\, ln \frac{c+L}{c+l} - (L-l)\right]$$

$$\bar{L} = \frac{L^2}{2(c+L)\, ln\left(1+\frac{L}{c}\right) - 2L} - c$$

$$\bar{L}(1\,;L) = \frac{1}{(c+L)\, ln(1+L/c) - L}$$

$$\left\{[c+L]\left[\left(c+\frac{1}{2}\right)\left(ln\frac{c+1}{c+L} - \frac{1}{2}\right) + \frac{c^2}{2}\, ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \left[L - \frac{1}{2}\right]\left[c + \frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{24}\right\}.$$

Die beiden ersten Modelle dürfen insofern als vorsichtig gelten, als das Absinken von $f(l)$ mit steigendem l bei statistischen Erfahrungsverteilungen schneller vor sich geht als hier, nämlich als schwach konkaver Verlauf, von der l-Achse her gesehen («Durchhang»). Dieser Tatsache tragen die beiden andern Modelle Rechnung. Nehmen wir an, für L seien die Werte 3 oder 5 oder 10 Jahre und ausserdem zum Vergleich $L=1$ eingesetzt, für c beim Hyperbelabschnitt der Wert 1 (in Bild 2 sind $L=3$ und $c=1$ verwendet). Es ergibt sich für $\bar{L}(1\,;L)/\bar{L}$:

	$L=3$	$L=5$	$L=10$	$L=1$
Rechteckverteilung	0,70	0,81	0,90	0.33
Dreieckverteilung	0,60	0,74	0,86	0.25
Hyperbelabschnitt	0,54	0,67	0,80	0.23

Für Erfahrungsverteilungen darf man wohl noch etwas kleinere Werte als diejenigen der Hyperbel vermuten.

Die Tabellenwerte stehen als Faktoren bei ϑ. Wie gross ist aber ϑ selber? Auch hier wird man auf statistische Erfahrungszahlen greifen, wie sie sich bei Spitalaufenthalten und bei Arbeitsunfähigkeit ergeben. Weil die l_x fallen, die k_x^* dagegen steigen, lässt sich ϑ nach (14) niedriger ansetzen, als es für eine Ungleichung der Gestalt

$$|k_{x-h}^* - k_x^*| < \vartheta k_x^*$$

der Fall wäre. Diese letztere, von der Absterbe-Ordnung befreite Ungleichung liefert somit eine gröbere Abschätzung, lässt sich aber z.B. mit den statistischen Zahlen nach Robert[2]) für Spitalaufenthalt und der Krankenkasse des Kantons Bern[3]) für die Arbeitsunfähigkeit füllen. Allerdings müssen bei Frauen die von Schwangerschaft, Geburt und Wochenbett herrührenden Leistungsteile beiseite gelassen werden, und man muss zudem beachten, dass für das Krankengeld die Grenzdauer mit einem Jahr bemessen ist, ohne dass ein Schadenfall beendet sein müsste. $f(l)$ läuft somit nicht bei L gegen Null aus[4]).

Aus den erwähnten Unterlagen vermag man grob etwa zu schliessen:

Ungefähr bis zum Alter 40 steigt ϑ für *Spitalaufenthalte* gegen 0,1; nachher nimmt es bei Männern schnell zu bis etwa 0,2, bei Frauen langsamer bis etwa 0,15. Für *Arbeitsunfähigkeit* sind die Schranken ϑ eher noch niedriger ausser im Altersbereich gegen 60 und darüber, wo die durchschnittliche Zahl der Krankentage sowieso schon hoch ist. Es ist immerhin nochmals darauf zu verweisen, dass bei Arbeitsunfähigkeit die statistischen Zahlen auf einem künstlichen $L = 1$ beruhen. Es steht zu erwarten, dass für grössere L und entsprechend grössere k, k^* die Schranke ϑ ziemlich kleiner angesetzt werden kann, indem die k_x, k^* zwar grösser sind, ihr Anstieg mit dem Alter indessen nicht im gleichen Ausmasszunimmt. Dafür wiederum wächst der Faktor $\bar{L}(1; L)/\bar{L}$, wie obige Tabelle zeigt.

Um schliesslich in einem summarischen Urteil zusammenzufassen: die relative Abweichung der k_x von den k_x^* (gemessen an diesen letzte-

---

[2]) J.P. Robert: Bases techniques des assurances en cas d'hospitalisation, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 1953, Heft 2.

[3]) 75 Jahre Krankenkasse für den Kanton Bern, 1945. Es ist klar, dass sich hier auch mit den Reduktionsfaktoren im Zusammenhang mit unseren Gedankengängen operieren liesse (H. Burckhardt: Neue Reduktionsfaktoren für die Krankengeldversicherung, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 1948, Heft 2).

[4]) Durch geeignetes Zusammenfügen der Rechteckverteilung mit einer der andern wäre dies auch darstellbar.

ren) wird über weite Altersstrecken 5% kaum übersteigen, sich nur von mittleren Lebensaltern ab 40 Jahren gegen 10% hinbewegen und erst in hohen Altern mit stark wachsendem k, k^* diesen Schwellenwert überschreiten. Richtige Tarifkalkulation und statistischer Brauch lassen dann allerdings dort Differenzen hervortreten, die nicht mehr zu vernachlässigen sind. Wegen der im allgemeinen mit den Altern steigenden Produkte $l_x k_x^*$ ist aber auch schon in den unteren Altersklassen k_x kleiner als k_x^*, und daher erscheint der Gebrauch von k_x anstelle von k_x^* bei Prämienrechnungen nur angezeigt, wenn man mit entsprechenden Sicherheitszuschlägen arbeitet.

Diese Überlegungen sind abgeleitet aus den Erfahrungswerten k_x, welche mangels der k_x^* grössenordnungsmässig an deren Stelle für die Abschätzung verwendet worden sind.

Eintritte und Austritte

Die Hauptgleichung (9) stützt sich auf eine Absterbe-Ordnung. Aber sowohl beim Gewinnen der ursprünglichen k_x und k_x^* als auch beim Untersuchen von Vergleichsbeständen gibt es neben den Todesfällen Eintritte und Austritte. Wie verändern sie die k_x und k_x^* und die Beziehung (9)?

Wäre man berechtigt, zu unterstellen, dass der *Neuzugang* jedes Alters keinen beachtlichen wesensbedingten (signifikanten) Unterschied im Leistungsverlauf gegenüber dem Bestand aufweist, so würde einzig der Umstand verbleiben, dass die in einem bestimmten Alter neu eintretenden Bestandesmitglieder vorher eben gefehlt haben und daher im Eintrittsjahr und in dessen Folgejahren keine Überträge aus früheren Jahren mitbringen. Die Differenz zwischen $l'_x k_x$ und $l'_x k_x^*$, d.h. die Differenz der Summe der Schadentage, welche auf einen Altersjahrgang des Neuzugangs-Bestandes bezogen werden, wird also insoweit verringert. Der Gegeneffekt, der Vortrag von Schadentagen bei den $l'_x k_x^*$ in die späteren Jahre, verbleibt indessen, so dass die Differenz eher wächst. Setzt man den Neuzugangs-Bestand l'_x und den Hauptbestand l_x zusammen, so wäre zu erwarten, dass $(l'_x + l_x)\, k_x$ und $(l'_x + l_x)\, k_x^*$ sich relativ mehr voneinander unterscheiden als $l_x k_x$ und $l_x k_x^*$ es tun. Wie stark sich dies auf k_x und k_x^* auswirkt, ist von vornherein nicht auszumachen und hängt vom Neuzugang der Alter $< x$ ab.

Bezieht man die Risikoauslese mit ein, welche für die ersten Versicherungsjahre weniger Krankheitstage pro Versicherten erwarten lässt, so wird man daran zu denken haben, dass sich die Selektion bei den neuentstehenden Krankheitsfällen in bezug auf k_x und k_x^* in etwa gleicher Weise äussert, insofern von ihr vor allem die Krankheitshäufigkeit (und nicht die Dauer) berührt wird. Die vorher genannte Feststellung bleibt daher im wesentlichen erhalten. Immerhin fallen durch die Selektion k_x und k^* kleiner aus, also wohl auch ihre Differenz.

Austritte während des Leistungsgenusses sind wohl unbeachtlich. Daher tragen sie zu einer Verschiebung zwischen $l_x k_x$ und $l_x k_x^*$ nichts bei, sehr wohl dagegen zu einer solchen zwischen k_x und k_x^*, weil diese letzteren Werte ja aus den gezählten Schadentagen durch Division mit dem Bestand entstehen und bei den von Krankheit Nichtbetroffenen durch Austritte die Anzahl geringer wird. k_x und k_x^* erhöhen somit ihre Differenz.

Entscheidend ist natürlich, in welchem Ausmass die Eintritte und Austritte erfolgen, verglichen mit dem Bestand selber. Die Retuschen am «wahren» Verlauf können unter Umständen doch recht spürbar sein, vor allem deshalb, weil da Korrekturen sich einseitig addieren.

Zusammenfassung

Die Anzahl Krankheitstage, welche durchschnittlich auf einen Versicherten eines bestimmten Alters entfällt, kann verschieden aufgefasst werden – entweder so, dass man die Krankheitstage dem jeweils erreichten, oder so, dass man sie dem Alter beim Krankheitsbeginn zuweist. Statistik und Prämientarif-Kalkulation stimmen im Ausgangsansatz hier nicht überein. Der Vergleich der Ergebnisse beider Berechnungsweisen soll zeigen, wie weit der eine Wert durch den andern ersetzbar erscheint. Es werden dafür Abschätzungen gegeben auf Grund von Modellen und von statistischen Erfahrungen, die aus der Schweiz stammen.

Résumé

Le nombre de jours de maladie à attribuer à un assuré d'un âge quelconque peut être conçu de diverses façons: on les assigne soit à chaque âge atteint soit à l'âge lors du début de la maladie. C'est précisément dans ce principe de base que statistique et tarification diffèrent. Une comparaison des résultats obtenus en appliquant chaque méthode doit avoir pour but de montrer dans quelle mesure les deux valeurs peuvent se remplacer l'une l'autre. L'auteur fournit des estimations basées sur des modèles et sur des chiffres tirés d'expériences statistiques suisses.

Summary

The number of days of illness to be assigned on average to an insured person of any age can be expressed in several ways – either by attributing these days to each attained age or to the age at the beginning of the illness. Statistics and premium tarification differ here in the basic ideas. The comparison of the results of both methods of calculation is to show how far the one value can be replaced by the other one. The author gives estimations based on models and on statistical experiences derived in Switzerland.