

Über die Renditesatz-Faustformeln

Autor(en): **Neuhaus, Johannes**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisse = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **72 (1972)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967076>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über die Renditesatz-Faustformeln

Von Johannes Neuhaus, Küsnacht (Zürich)

1. Vorbemerkungen

Bekanntlich gibt es verschiedene Arten, bei gegebenem Nominalzinsfuß, gegebener fester Laufzeit und gegebenem Anfangskurs den Renditesatz einer festverzinslichen Kapitalanlage zu ermitteln.

In der Praxis handelt es sich oft darum, in kurzer Zeit (ohne Benützung von Tabellenwerken und komplizierten Formeln) ein Ergebnis zu gewinnen, welches nicht sehr genau zu sein braucht, aber auch dem Nichtmathematiker einleuchten soll. Bei einer solchen Sachlage greift man zu Faustformeln, auch wenn man damit zu weniger präzisen Ergebnissen gelangt als bei Verwendung der mathematisch abgeleiteten Näherungsformeln, die wir H. Jecklin, H. Kreis, E. Zwinggi und anderen Autoren verdanken, oder bei Anwendung von Iterations- oder Interpolationsmethoden oder der Nomogramme von E. Völm.

In Abschnitt 2 dieses Aufsatzes werden mehrere Renditesatz-Formeln in einheitlicher Darstellungsweise aufgeführt. Mit A und B sind die bekanntesten Renditesatz-Faustformeln wiedergegeben. Der angelsächsischen Fachliteratur sind die Faustformeln C ¹⁾ ²⁾ und D ³⁾ entnommen. O. Juzi⁴⁾ hat Verbesserungen der Formeln A und B vorgenommen; wir verwenden dafür die Bezeichnungen A' und B' . Eine weitere Formel, welche ebenfalls als Variante von B betrachtet werden

¹⁾ W. L. Hart, Mathematics of Investment, Boston 1946, p. 135.

²⁾ P. M. Hummel & Ch. L. Seebeck, Mathematics of Finance, New York 1948, p. 131.

³⁾ D. W. A. Donald, Compound Interest and Annuities-certain (Text-Book), Cambridge 1953, p. 250.

⁴⁾ O. Juzi, Über die Rentabilität von Tilgungsanleihen. Schweiz. Handelswissenschaftl. Zeitschrift, Nr. 4, 1917.

kann, ist mit B'' bezeichnet. Schliesslich wird eine Faustformeln-Schar definiert und eine (unseres Wissens neue) Faustformel E vorgeschlagen.

Eine Tabelle von Zahlenbeispielen enthält jeweils für gegebene Laufzeiten, Nominalzinsfüsse und Anfangskurse den genauen Renditesatz i und die nach den verschiedenen Faustformeln gerechneten Renditesätze.

Im weiteren wird in diesem Aufsatz versucht, für die verschiedenen Faustformeln die Güte der Näherung zu untersuchen⁵⁾.

2. Faustformeln und Zahlenbeispiele

Nachstehend werden folgende Annahmen und Bezeichnungen verwendet:

Nennwert = Rückzahlungswert = 1

Laufzeit in Jahren = n

jährlicher Nominalzinsfuss = i^*

Anfangskurs (Kaufpreis) = K

jährlicher genauer Renditesatz = i

nach Faustformel A ermittelter, jährlicher Renditesatz⁶⁾ = i_A
 sich ergebender Fehler⁶⁾ = $i_A - i = f_A$

Der *genaue Renditesatz* i ist durch jede der beiden folgenden Formeln bestimmt:

$$i = \frac{i^*}{K} + \frac{1 - K}{K \cdot s_{\overline{n}|}} \quad (1)$$

$$i = i^* + \frac{1 - K}{a_{\overline{n}|}} \quad (2)$$

⁵⁾ In mehreren finanzmathematischen Abhandlungen und Lehrbüchern sind einzelne Faustformeln aufgeführt; die Güte der Näherung kam aber selten zur Sprache. Soweit es sich um die Faustformel B handelt, behandelte J. Chuard (Sur le rendement des obligations remboursables au pair à échéance fixe, MVSV 59, 2, 1959) die sich ergebenden Fehler $i - i_B$. Vgl. Fussnote ⁸⁾.

⁶⁾ Analog hinsichtlich der Formeln A' , B , B' , B'' , C , D und E .

Im folgenden sind die Faustformeln und in Tabelle I mehrere Zahlenbeispiele zusammengestellt.

$$A \quad i_A = \frac{i^*}{K} + \frac{1-K}{K \cdot n}$$

$$A' \quad i_{A'} = \frac{i^*}{K} + \frac{1-K}{K \cdot n} \cdot \frac{100-n}{100}$$

$$B \quad i_B = \frac{i^*}{K} + \frac{1-K}{n}$$

$$B' \quad i_{B'} = \frac{i^*}{K} + \frac{1-K}{n} \cdot \frac{100-n}{100}$$

$$B'' \quad i_{B''} = i^* + (1-K) \left(\frac{1}{n} + i^* \right)$$

$$C \quad i_C = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{\frac{1+K}{2}}$$

$$D \quad i_D = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{\frac{n-1}{2n} + \frac{n+1}{2n} K} = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{1 - \frac{n+1}{2n} (1-K)}$$

$$E \quad i_E = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{0,4 + 0,6 K} = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{1 - 0,6 (1-K)}$$

Tabelle I: Renditesätze (in Prozent) nach verschiedenen Formeln

n	i^* in %	K in %	i	i_A	$i_{A'}$	i_B	$i_{B'}$	$i_{B''}$	i_C	i_D	i_E
1	4	98	6,12	6,12	6,10	6,08	6,06	6,08	6,06	6,12	6,12
2	3	95	5,72	5,79	5,74	5,66	5,61	5,65	5,64	5,71	5,72
3	4	95	5,87	5,96	5,91	5,88	5,83	5,87	5,81	5,86	5,87
5	4	95	5,16	5,26	5,21	5,21	5,16	5,20	5,13	5,15	5,15
10	3	75	6,47	7,33	7,—	6,50	6,25	6,25	6,29	6,38	6,47
		80	5,68	6,25	6,—	5,75	5,55	5,60	5,56	5,62	5,68
		85	4,94	5,29	5,12	5,03	4,88	4,95	4,86	4,90	4,95
		90	4,25	4,44	4,33	4,33	4,23	4,30	4,21	4,23	4,26
	4	90	5,31	5,56	5,44	5,44	5,34	5,40	5,26	5,29	5,32
	5	90	6,38	6,67	6,56	6,56	6,46	6,50	6,32	6,35	6,38
	6	110	4,72	4,55	4,64	4,45	4,55	4,40	4,76	4,74	4,72
	120	3,58	3,33	3,50	3,—	3,20	2,80	3,64	3,60	3,57	
15	5	90	6,03	6,30	6,19	6,22	6,12	6,17	5,96	5,99	6,03
	7	110	5,97	5,76	5,85	5,70	5,80	5,63	6,03	6,01	5,97
20	4	90	4,79	5,—	4,89	4,94	4,84	4,90	4,74	4,75	4,79
	5	90	5,86	6,11	6,—	6,06	5,96	6,—	5,79	5,80	5,85

3. Hilfsfunktionen

Bei der Beurteilung der Faustformeln erweisen sich die beiden Funktionen φ und ψ der (zunächst als unabhängig veränderlich betrachteten) Grössen n und i als nützlich.

Für den Bereich

$$1 \leq n \leq 20 \qquad 0,02 \leq i \leq 0,08, \qquad (3)$$

welcher sehr viele der praktisch vorkommenden Fälle erfasst, definieren wir:

$$\varphi(n, i) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{s_{\overline{n}|}}}{i} = \frac{\frac{1}{n} + i - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}}{i} \quad (4)$$

$$\psi(n, i) = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} \left(\frac{n}{a_{\overline{n}|}} - 1 \right) = i \left(1 - \frac{n\varphi}{a_{\overline{n}|}} \right) \quad (5)$$

Für die n und i des genannten Bereiches gilt:

φ ist stets positiv. Für $n = 1$ ist $\varphi = 0$. Vgl. Tab. II. (Im Teilbereich $5 \leq n \leq 20$ $0,02 \leq i \leq 0,08$ hat φ den Wertebereich $0,352 \leq \varphi \leq 0,443$.)

Tabelle II: Werte von $\varphi(i, n)$ in Prozent

n	$i = 0,02$	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
1	0	0	0	0	0	0	0
2	24,8	24,6	24,5	24,4	24,3	24,2	24,0
3	32,9	32,7	32,5	32,2	32,0	31,8	31,6
4	36,9	36,6	36,3	36,0	35,7	35,4	35,1
5	39,2	38,8	38,4	38,1	37,7	37,3	36,9
7	41,7	41,2	40,6	40,1	39,5	39,0	38,5
10	43,4	42,6	41,8	41,0	40,2	39,5	38,7
12	43,9	42,9	42,0	41,0	40,1	39,2	38,3
15	44,2	43,0	41,8	40,6	39,5	38,4	37,3
17	44,3	42,9	41,6	40,2	39,0	37,7	36,5
20	44,2	42,6	41,0	39,5	38,0	36,6	35,2

$\psi(n, i)$ ist ebenfalls stets positiv und steigt, wenn n gegeben ist und i von 0,02 bis 0,08 zunimmt, monoton laut numerischer Feststellung.

Im genannten Bereich existiert höchstens ein Renditesatz $i = i'$, welcher die Bedingung

$$\psi(n, i') = i^* \quad (6)$$

erfüllt.

Es ist

$$\operatorname{sgn}[\psi(n, i') - \psi(n, i)] = \operatorname{sgn}(i' - i) \quad (7)$$

Für $i^* = 0$ und für $n = 1$ ist stets $i' = i^*$.

Der zum Renditesatz i' gehörige Kurs sei mit K' bezeichnet.

4. Diskussion der Faustformeln A und A'

Um die Güte der Faustformel A zu prüfen, suchen wir den Fehler $f_A = i_A - i$ für eine gegebene künftige Laufzeit n und einen gegebenen Nominalzinsfuß i^* als Funktion des Anfangskurses zu berechnen. Wegen (1) gilt:

$$f_A = i_A - i = \frac{1-K}{K} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} \right) = \frac{1-K}{K} \cdot i \cdot \varphi. \quad (8)$$

In (8) treten ausser K auch die Grössen $s_{\overline{n}|}$ resp. i und φ (welche als Funktionen von n , i^* und K zu betrachten sind) auf⁷⁾.

Für $K < 1$ ist f_A positiv; für $K > 1$ ist f_A negativ. Für kleines $|1-K|$ sind die Absolutwerte der bei Anwendung von Faustformeln auftretenden Fehler klein.

Für $n = 1$ ist $f_A = 0$.

Beispiel: Für $n = 15$, $i^* = 0,05$, $K = 0,9$ ($i = 0,0603$, vgl. Tab. I) ergibt sich nach (9)

$$f_A = \frac{0,10}{0,90} \cdot 0,0603 \cdot 0,395 = 0,0026,$$

was (abgesehen von einer Rundungsdifferenz) der Differenz 6,30% - 6,03% (vgl. Tab. I) entspricht.

⁷⁾ Dadurch wird die numerische Anwendung von (8) sowie von weiteren Formeln zwar erschwert, aber nicht verunmöglicht; wer Renditesätze zu berechnen hat, kennt normalerweise die Grössenordnung des Ergebnisses zum vornherein.

Bei Anwendung der Formel A' resultiert folgende Abweichung:

$$f_{A'} = \frac{1-K}{K} (i\varphi - 0,01). \quad (9)$$

Aus dieser Formel wie auch aus den Vergleichstabellen I und III geht hervor:

$$|f_{A'}| \text{ ist klein bei Kleinheit von } \left| i - \frac{0,01}{\varphi} \right|,$$

resp. (für $5 \leq n \leq 20$ und $0,02 \leq i \leq 0,08$) von $|i - 0,025|$.

Tabelle III: Fehler (in Prozent des Nennwertes) für $n = 10$, $i^ = 0,05$*

K (in %)	f_A	$f_{A'}$	f_B	$f_{B'}$	$f_{B''}$
80	0,77	0,52	0,27	0,07	0,02
90	0,28	0,17	0,17	0,07	0,12
100	0	0	0	0	0
110	-0,14	-0,05	-0,24	-0,14	-0,28

5. Diskussion der Formeln B , B' und B''

Von einer festen zukünftigen Laufzeit n und einem festen Nominalzinsfuß i^* ausgehend⁸⁾, suchen wir i_B und f_B als Funktionen des Anfangskurses K auszudrücken. Wegen (1) und (4) ist

⁸⁾ In diesem Aufsatz wird ein anderer Weg eingeschlagen als in der in Fussnote ⁵⁾ zitierten Untersuchung.

$$f_B = i_B - i = \frac{1-K}{n} - \frac{1-K}{K \cdot s_{\overline{n}|}} = \frac{1-K}{K} \left(\frac{K}{n} - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} \right) = \quad (10)$$

$$= \frac{1-K}{K} \left(i\varphi - \frac{1-K}{n} \right).$$

Für $K > 1$ und damit $i < i^*$ ist $f_B < f_A < 0$; die Formel A ist der Formel B vorzuziehen.

Um den Fall $K < 1$ und damit $i > i^*$ beurteilen zu können, formen wir zunächst f_B um. Wegen (2), (5), (6) und (10) ist

$$f_B = \frac{1-K}{K} \cdot \frac{a_{\overline{n}|}}{n} \cdot \left[i^* - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} \left(\frac{n}{a_{\overline{n}|}} - 1 \right) \right] \quad (11)$$

$$= \frac{1-K}{K} \cdot \frac{a_{\overline{n}|}}{n} [\psi(n, i') - \psi(n, i)].$$

Aus (7) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Wenn} \quad K > K' \quad \text{und damit} \quad i < i', \quad \text{ist} \quad f_B > 0; \\ \text{wenn} \quad K < K' \quad \text{und damit} \quad i > i', \quad \text{ist} \quad f_B < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Falls $f_B > 0$, ist $f_B < f_A$. Aber auch negative Werte von f_B sind im allgemeinen betragsmässig kleiner als f_A . Wenn $K < 1$, ist also die Formel B der Formel A vorzuziehen (siehe Bemerkung).

Als *Beispiel* seien für $n = 10$, $i^* = 0,03$ die f_B und f_A für gegebene K (woraus jeweils i berechnet werden kann) aufgeführt:

⁹⁾ Für einen Teil der Zahlenpaare n, i^* existiert im Bereich $0,02 \leq i \leq 0,08$ kein i' , so dass dann (wenn $K < 1$) f_B immer positiv ist.

K (in %)	i (in %)	f_B (in %)	f_A (in %)
100	3,—	0	0
95	3,60	0,05	0,08
85	4,94	0,09	0,36
75	6,47	0,03	0,86
73,1 = K'	6,79 = i'	0	0,99
70	7,34	—0,06	1,23
65	8,28	—0,17	1,72

Für $n = 1$ und für $i^* = 0$ ist immer $i' = i^*$, so dass (wenn $K < 1$) stets $f_B < 0$.

Bemerkung: Für gewisse spezielle Zahlenpaare n, i^* existieren im Bereich $0,02 \leq i \leq 0,08$ eine Zahl $i = i''$ und eine Zahl K'' mit folgender Eigenschaft:

für $K < K''$ und damit $i > i''$ ist $|f_B| > f_A$.

Beispiel: $n = 2, i^* = 0,025$

K (in %)	i (in %)	f_B (in %)	f_A in (%)
100	2,50	0	0
99	3,02	0,002	0,008
98,34 = K'	3,37 = i'	0	0,014
97	4,09	—0,02	0,03
94,85 = K''	5,28 = i''	—0,07	0,07
92	6,92	—0,20	0,15

Bezüglich der Formeln B' und B'' kann festgestellt werden:

$$f_{B'} = f_B - 0,01(1 - K) \quad (13)$$

$$f_{B''} = (1 - K) [i^* - i(1 - \varphi)]. \quad (14)$$

Darnach ist $|f_{B''}|$ nur dann klein, wenn $|1 - K|$ klein und/oder $i \sim \frac{i^*}{1 - \varphi}$ ist (für $5 \leq n \leq 20$ und $0,02 \leq i \leq 0,08$ kann $1 - \varphi \sim 0,6$ gesetzt werden).

6. Eine Faustformeln-Schar

Der genaue Renditensatz i kann wegen (2) und (4) in der Form

$$i = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{\varphi + (1-\varphi)K} = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{K + \varphi(1-K)} \quad (15)$$

dargestellt werden. Wenn wir nun φ durch einen Parameter Φ ersetzen, ergibt sich eine Schar von Renditesatz-Faustformeln $i(\Phi)$. Es ist

$$i(\Phi) - i = -\frac{i(1-K)(\Phi - \varphi)}{K + \Phi(1-K)}, \quad (16)$$

woraus ersichtlich ist, dass $i(\Phi) - i$ das Vorzeichen von $(1-K)(\varphi - \Phi)$ hat.

Bei geeigneter Wahl von Φ kann sich eine bereits bekannte Formel ergeben;

für $\Phi = 0 \quad 0,5 \quad \frac{n-1}{2n}$

resultiert $i(\Phi) = i_A \quad i_C \quad i_D$

Darnach ergibt sich wegen (16)

für f_A die bereits genannte Formel (8)

$$f_C = -\frac{i \cdot (1-K) \cdot (1-2\varphi)}{1+K} \quad (17)$$

$$f_D = -\frac{i \cdot (1-K) \cdot (n-1-2n\varphi)}{n-1+(n+1)K} \quad (18)$$

Sowohl f_C wie f_D sind stets positiv, wenn $K > 1$, und negativ, wenn $K < 1$.

7. Die Formel E

Es liegt nahe, φ in (15) durch eine Konstante Φ , welche sich möglichst wenig von den in Betracht fallenden Zahlenwerten von φ unterscheidet, zu ersetzen. $|i(\Phi) - i|$ wird dann, wie aus (16) ersichtlich, klein.

Für $5 \leq n \leq 20$ und $0,02 \leq i \leq 0,08$ eignet sich, wie aus Tab. II hervorgeht, $\Phi = 0,4$. Der Höchstwert von $|\Phi - \varphi|$ ist dann 0,048, während er bei Faustformel A gleich 0,443, bei Formel C gleich 0,148 und bei Formel D gleich 0,123 ist.

Die sich ergebende Formel lautet:

$$i_E = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{0,4 + 0,6K} = \frac{i^* + \frac{1-K}{n}}{1 - 0,6(1-K)}. \quad (19)$$

Der Zähler ist gleich der Jahreseinnahme aus Zins und (gleichmässig auf die Jahre der Laufzeit verteiltem) Kapitalgewinn; der Nenner ist ein gewogenes Mittel zwischen Anfangskurs K und Rückzahlungswert 1; die Gewichte sind 0,6 und 0,4.

Im Bereich $1 \leq n \leq 20$, $0,02 \leq i \leq 0,08$ (und in dessen Nähe) machen die absoluten Beträge der allfälligen Fehler $f_E = i_E - i$ nur wenige Hundertstelprozente des Nennwertes aus (vgl. Tab. I).

Falls $n < 5$, kommt – statt $0,4 + 0,6K$ – folgender Nenner in Betracht:

bei Laufzeit 1 Jahr:	K
bei Laufzeit 2 Jahre:	$0,24 + 0,76K = 1 - 0,76(1-K)$
bei Laufzeit 3 Jahre:	$0,32 + 0,68K = 1 - 0,68(1-K)$
bei Laufzeit 4 Jahre:	$0,36 + 0,64K = 1 - 0,64(1-K)$.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, für $n < 5$ Formel D anzuwenden.

Die Formel E kann so geschrieben werden, dass sie auch den Fall Rückzahlungswert \neq Nennwert berücksichtigt; sie lautet dann (für $5 \leq n \leq 20$ und $0,02 \leq i \leq 0,08$):

$$i_E = \frac{Z + \frac{R - P}{n}}{0,6 P + 0,4 R} . \quad (20)$$

(Z = Jahreszins, P = Kaufpreis, n = Laufzeit in Jahren, R = Rückzahlungswert.)

Beispiel: Für $P = \text{Fr.} 4750.-$, $Z = \text{Fr.} 175.-$, $n = 10$, $R = \text{Fr.} 4500.-$ ergibt sich

$$i_E = \frac{175 - \frac{250}{10}}{4750 \cdot 0,6 + 4500 \cdot 0,4} = 0,0323 .$$

Zusammenfassung

Der Aufsatz enthält zunächst eine Zusammenstellung bekannter und weniger bekannter Renditesatz-Faustformeln samt Zahlenbeispielen; sodann wird die Güte der verschiedenen Faustformeln untersucht und eine neue Faustformel vorgeschlagen.

Summary

This paper contains a compilation of well-known and lesser-known rules of thumb for calculating rates of return together with numerical examples; the accuracy of the various rules is further examined and a new rule suggested.

Résumé

Cette étude présente tout d'abord une synthèse de règles empiriques connues et moins connues pour la détermination des taux de rendement et en donne des exemples numériques; puis l'auteur analyse la précision de ces différentes règles et en propose une nouvelle.

Riassunto

Questo studio presenta dapprima una sintesi di formule pratiche conosciute e meno conosciute per la determinazione del tasso di rendimento, aggiungendovi esempi numerici; in seguito l'autore esamina l'esattezza delle varie formule e ne propone una nuova.