Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 72 (1972)

Artikel: Über eine spezielle algebraische Mittelwertbildung

Autor: Jecklin, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine spezielle algebraische Mittelwertbildung

Von H. Jecklin, Zürich

Die vorliegende kleine Studie bildet in gewissem Sinne eine Ergänzung zu der Publikation «Über einfache und kombinatorische Potenzmittel» im 2. Heft des 66. Bandes dieser Mitteilungen. Damit die Ausführungen unabhängig für sich lesbar und verständlich sind, müssen einige Begriffe und Fakten kurz wiederholt werden.

Es sei gegeben eine Reihe von n positiven reellen Grössen

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \tag{1}$$

wobei der triviale Fall, dass alle n Grössen einander gleich sind, ausgeschlossen sein soll. Eine Mittelwertbildung der Gestalt

$$M(\ell) = \left(\frac{\Sigma a_i^{\ell}}{n}\right)^{1/\ell}, i = 1, 2, \ldots, n, -\infty < \ell < +\infty \tag{2}$$

liefert dann ein sogenanntes einfaches Potenzmittel. Dabei braucht ℓ nicht notwendigerweise ganzzahlig zu sein. Dass es sich bei $M(\ell)$ um einen echten Mittelwert handelt, d. h. dass

$$a_1 < M(\ell) < a_n,$$

ist in vorgenannter Arbeit gezeigt worden. Wir erhalten insbesondere für $\ell = 2$ das quadratische Mittel

$$M(2) = \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}}, \tag{3}$$

für $\ell = 1$ das arithmetische Mittel

$$M(1) = \frac{\Sigma a_i}{n}, \tag{4}$$

für $\ell = 0$ das geometrische Mittel

$$M(0) = \left(\Pi a_i\right)^{1/n}. \tag{5}$$

Das letztere Faktum, das sich aus Stetigkeitsüberlegungen ergibt, ist nicht ohne weiteres offensichtlich. Es sei diesbezüglich auf die Arbeit «Die elementaren Mittelwerte» in Heft I des 47. Bandes dieser Mitteilungen verwiesen. Wie ebendort u. a. gezeigt wird, gilt die Ungleichung

$$M(2) > M(1) > M(0), \tag{6}$$

d. h. das quadratische Mittel ist grösser als das arithmetische Mittel, und dieses wiederum grösser als das geometrische Mittel.
Nunmehr sei daran erinnert, was unter einem einfachen kombinatorischen Mittelwert zu verstehen ist. Man bildet aus den n positiven Grössen a_i die Kombinationen ohne Wiederholung der Klasse 1, 2, ..., n, und aus den einzelnen Kombinationsklassen die sog. elementarsymmetrischen Funktionen, nämlich die Summen

$$\begin{aligned}
{}_1s &= \Sigma a_i, && i = 1, 2, \ldots, n \\
{}_2s &= \Sigma a_i a_k, && i < k \\
{}_3s &= \Sigma a_i a_k a_\ell, && i < k < \ell \\
&\ldots \\
&\ldots \\
{}_ns &= a_1 a_2 \ldots a_n = \Pi a_i.
\end{aligned}$$

Es besteht demnach ${}_ts$ aus $\binom{n}{t}$ Summanden, die je ein Produkt von t verschiedenen a_i sind. Der t. einfache kombinatorische Mittelwert ist dann definiert als

$$K(t) = \left(\frac{{}_ts}{\binom{n}{t}}\right)^{1/t}. \tag{7}$$

Es ist demnach K(1) = M(1) und K(n) = M(0), d. h. der erste einfache kombinatorische Mittelwert der n Grössen a_i ist gleich ihrem arithmetischen Mittel, der n. einfache kombinatorische Mittelwert ist gleich ihrem geometrischen Mittel.
Wie genannten Ortes bereits gezeigt wurde, gilt

$$K(1) > K(2) > K(3) > \ldots > K(n). \tag{8}$$

Es bestehen eine ganze Anzahl bekannter elementarer Ungleichungssätze, von welchen der folgende für uns von besonderem Interesse ist:

$$\sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}} > \frac{\Sigma a_i}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma a_i a_k}{\binom{n}{2}}} \geqslant \sqrt[n]{\Pi a_i},\ i < k. \tag{9}$$

wobei das Gleichheitszeichen für $n = 2$ gilt. Demnach ist

$$\frac{1}{n}\Sigma a_i^2 > \frac{1}{\binom{n}{2}}\Sigma a_i a_k,\ i < k,$$

woraus, da

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1),$$

$$(n-1)\,\Sigma a_i^2 > 2\,\Sigma a_i a_k,\ i < k. \tag{10}$$

Für $n = 2$ ist dies der bekannte Satz, dass

$$a_1^2 + a_2^2 > 2a_1a_2,\ a_1 \neq a_2.$$

Man kann aber weiter aus den einfachen kombinatorischen Mittelwerten auch kombinatorische Potenzmittel $K(t,\ell)$ bilden, beispielsweise

$$K(2,2) = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k)^2}{\binom{n}{2}}\right)^{1/4},\ i < k, \tag{11}$$

und es gilt

$$\sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}} > \sqrt[4]{\frac{\Sigma(a_i a_k)^2}{\binom{n}{2}}} > \frac{\Sigma a_i}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma a_i a_k}{\binom{n}{2}}},\ i < k, \tag{12}$$

wie genannten Ortes bereits dargelegt. Die kombinatorischen Mittelwerte wurden erstmals ausführlich erwähnt und behandelt von G. F. Lipps in «Die Theorie der Collectivgegenstände», erschienen 1902 im Verlag W. Engelmann, Leipzig.

Es stellt sich nun die Frage, weshalb nur Kombinationen ohne Wiederholung zur Mittelwertbildung herangezogen werden sollen. Warum nicht auch Kombinationen mit Wiederholung, oder Variationen ohne oder mit Wiederholung? Bekanntlich ist bei n Grössen a_i für die t. Klasse die Anzahl
der Kombinationen ohne Wiederholung: $\binom{n}{t}$
der Kombinationen mit Wiederholung: $\binom{n+t-1}{t}$

der Variationen ohne Wiederholung: $t!\binom{n}{t}$
der Variationen mit Wiederholung: n^t
Für $t = 2$ gilt also insbesondere
Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung: $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$,
Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung: $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$,
Anzahl der Variationen ohne Wiederholung: $2\binom{n}{2} = n(n-1)$,
Anzahl der Variationen mit Wiederholung: $n^2 = n\,n$.
Seien beispielsweise die drei Grössen $a < b < c$ gegeben, dann hat man für $t = 2$ zu bilden

für Kombinationen ohne Wiederholung die Paare $a_i a_k$, $i < k$, also

$$ab, ac, bc,$$

für Kombinationen mit Wiederholung die Paare $a_i a_k$, $i \leqslant k$, also

$$a^2, ab, ac, b^2, bc, c^2,$$

für Variationen ohne Wiederholung die Paare $a_i a_k$, $i \neq k$, d.h. $i \gtrless k$ also

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb,$$

für Variationen mit Wiederholung die Paare $a_i a_k$, $i \gtreqless k$, also

$$a^2, ab, ac, b^2, ba, bc, c^2, ca, cb.$$

Wie man sich, ausgehend von diesen Beispielen, leicht überlegt, bringt die Beiziehung der Variationen für die Mittelwertbildung nichts Neues. Die Variationen ohne Wiederholung ergeben sich aus den Kombinationen ohne Wiederholung durch Permutation ihrer Elemente. Der mit Variationen ohne Wiederholung gebildete Mittelwert muss sich also einfach durch Kürzung auf den einfachen kombinatorischen Mittelwert gleicher Klasse zurückführen lassen. Es ist auf Basis unseres vorigen Beispiels

$$\left(\frac{ab + ac + ba + bc + ca + cb}{6}\right)^{1/2} = \left(\frac{2(ab + ac + bc)}{6}\right)^{1/2} = \left(\frac{ab + ac + bc}{3}\right)^{1/2}.$$

Der aus Variationen mit Wiederholung gebildete Mittelwert sodann ist lediglich eine komplizierte Darstellung des arithmetischen Mittels, denn es steht im Zähler einfach die t. Potenz eines Polynoms von n Summanden. Für unser voriges Beispiel haben wir

$$\left(\frac{a^2 + ab + ac + b^2 + ba + bc + c^2 + ca + cb}{9}\right)^{1/2} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{9}\right)^{1/2} =$$

$$\sqrt{\frac{(a + b + c)^2}{3^2}} = \frac{a + b + c}{3}.$$

Dagegen bringen die Kombinationen mit Wiederholung eine echte Erweiterung der algebraischen Mittelwertbildung, was wir am Beispiel der Klasse 2 demonstrieren wollen. Der betreffende Mittelwert hat die Gestalt

$$L(2) = \left(\frac{2\Sigma a_i a_k}{n(n+1)}\right)^{1/2}, \; i \leqslant k, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

oder, was dasselbe,

$$L(2) = \left(\frac{2(\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k)}{n(n+1)}\right)^{1/2}, \; i < k.$$

Dieser Mittelwert muss nach seinem Aufbau kleiner als das quadratische Mittel und grösser als das bezügliche einfache kombinatorische Mittel sein, was leicht zu zeigen ist. Wir greifen zurück auf die Ungleichung (10)

$$(n-1)\,\Sigma a_i^2 > 2\Sigma a_i a_k, \; i < k,$$

woraus

$$\frac{1}{2}\,n(n-1)\,\Sigma a_i^2 > n\Sigma a_i a_k$$

$$n\Sigma a_i^2 + \binom{n}{2}\,\Sigma a_i^2 > n\Sigma a_i^2 + n\Sigma a_i a_k$$

$$\left(n + \binom{n}{2}\right)\Sigma a_i^2 > n(\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k)$$

$$\frac{\Sigma a_i^2}{n} > \frac{\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k}{\frac{1}{2}\,n(n+1)}, \; i < k. \tag{14}$$

Anderseits folgt aus $\frac{1}{2}n(n-1)\,\Sigma a_i^2 > n\Sigma a_i a_k, \; i < k$

aber auch $$\binom{n}{2}\Sigma a_i^2 + \binom{n}{2}\Sigma a_i a_k > n\Sigma a_i a_k + \binom{n}{2}\Sigma a_i a_k$$

$$\binom{n}{2}(\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k) > \left(n + \binom{n}{2}\right)\Sigma a_i a_k$$

$$\frac{\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k}{\frac{1}{2}n(n+1)} > \frac{\Sigma a_i a_k}{\binom{n}{2}},\ i < k. \tag{15}$$

Letztere Ungleichung kann man noch verschärfen wie folgt. Es ist, wie vorhin

$$(n-1)\Sigma a_i^2 > 2\Sigma a_i a_k,\ i < k.$$

Man fügt beidseitig $(n+1)\Sigma a_i^2 + 2n\Sigma a_i a_k$

hinzu und erhält $$2n(\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k) > (n+1)(\Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i a_k),\ i < k$$
$$n^2(\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k) > \tfrac{1}{2}n(n+1)(\Sigma a_i)^2,$$

also $$\sqrt{\frac{\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k}{\frac{1}{2}n(n+1)}} > \frac{\Sigma a_i}{n},\ i < k. \tag{16}$$

Mithin haben wir, in Erweiterung von (9), für $i < k$ die Ungleichungen

$$\sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}} > \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_k}{n+\binom{n}{2}}} > \frac{\Sigma a_i}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma a_i a_k}{\binom{n}{2}}} \geqslant \sqrt[n]{\Pi a_i}. \tag{17}$$

Wir haben somit den einfachen kombinatorischen Mittelwerten K(t) die vollständigen kombinatorischen Mittelwerte L(t) als neue Spezies der formelmässigen algebraischen Mittelwerte gegenübergestellt.

$$K(1) = L(1) = M(1)$$

$$K(2) = \left(\frac{\Sigma a_i a_k}{\binom{n}{2}}\right)^{1/2},\ i < k \qquad L(2) = \left(\frac{\Sigma a_i a_k}{\binom{n+1}{2}}\right)^{1/2},\ i \leqslant k.$$

$$K(3) = \left(\frac{\Sigma a_i a_k a_\ell}{\binom{n}{3}}\right)^{1/3},\ i < k < \ell. \qquad L(3) = \left(\frac{\Sigma a_i a_k a_\ell}{\binom{n+2}{3}}\right)^{1/3},\ i \leqslant k \leqslant \ell$$

usw.

Die nähere Betrachtung der vollständigen kombinatorischen Mittelwerte von höherer als der 2. Klasse führt zu recht unübersichtlichen Entwicklungen, ohne wesentlich neue Erkenntnisse zu fördern. Für $t > 1$ muss sicher stets gelten

$$M(t) > L(t) > M(1), \tag{18}$$

denn der Zähler von $L(t)$ entsteht aus jenem von $M(t)$, indem zu den t. Potenzen der a_i die Kombinationen t. Klasse ohne Wiederholung hinzukommen, und wenn man noch zu Variationen mit Wiederholung erweitert, entsteht, wie gezeigt, $M(1)$. Es ist sehr wohl möglich, dass sich Ungleichung (18) linksseitig noch weiter einengen lässt.

Für die Praxis wird der vollständige kombinatorische Mittelwert kaum eine Rolle spielen, doch kann er m. E. eine anregende Beschäftigung für mathematische Mussestunden bilden. So kann man auch hier, wie bei den einfachen kombinatorischen Mittelwerten, die Konstruktion auf Potenzmittel ausdehnen. Es ist beispielsweise das bezügliche Potenzmittel p. Grades

für Klasse 2: $$L(2, p) = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k)^p}{\binom{n+1}{2}}\right)^{1/2p}, \; i \leqslant k,$$

für Klasse 3: $$L(3, p) = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k a_\ell)^p}{\binom{n+2}{3}}\right)^{1/3p}, \; i \leqslant k \leqslant \ell,$$

usw. In nachstehender Tabelle sind für $n = 4$ auf Basis der Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ für einige Positionen die einfachen und die vollständigen kombinatorischen Potenzmittel in roher Rechnung auf zwei Kommastellen angeführt. Die graphische Darstellung sodann zeigt den Verlauf der entsprechenden Kurven in der Nähe des Koordinatennullpunktes. Es bedeuten bei Tabelle und Graphik

$$A = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k a_\ell a_m)^p}{\binom{n+3}{4}}\right)^{1/4p}, \; i \leqslant k \leqslant \ell \leqslant m$$

$$B = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k a_\ell)^p}{\binom{n+2}{3}}\right)^{1/3p}, \; i \leqslant k \leqslant \ell$$

$$C = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k)^p}{\binom{n+1}{2}}\right)^{1/2p}, \; i \leqslant k$$

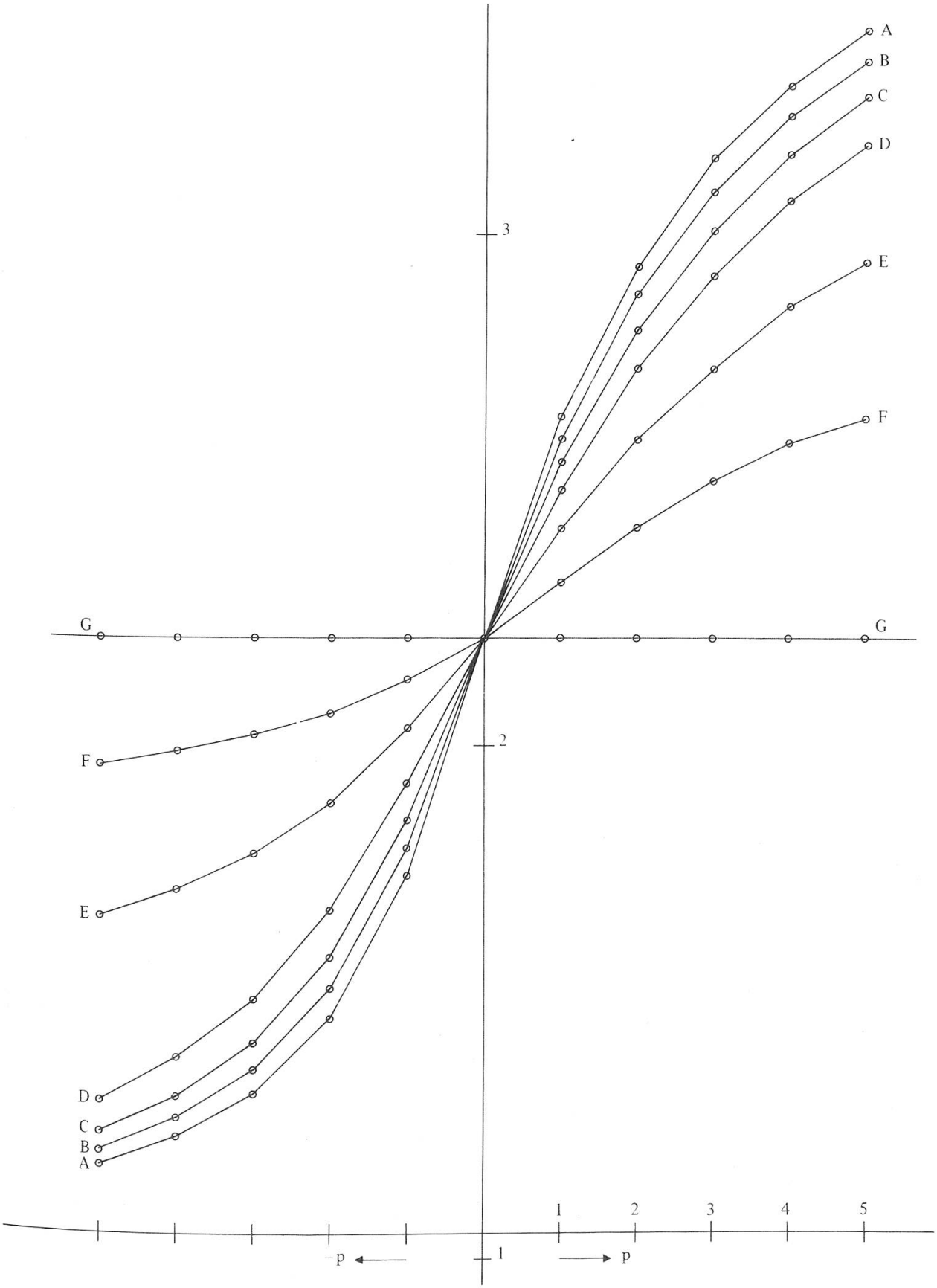
$$D = \left(\frac{\Sigma a_i^p}{n}\right)^{1/p}$$

$$E = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k)^p}{\binom{n}{2}}\right)^{1/2p}, \; i < k$$

$$F = \left(\frac{\Sigma(a_i a_k a_\ell)^p}{\binom{n}{3}}\right)^{1/3p}, \; i < k < \ell$$

$$G = \left((a_1 a_2 a_3 a_4)^p\right)^{1/4p} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

p	A	B	C	D	E	F	G
5	3.40	3.34	3.27	3.18	2.95	2.64	2.21
4	3.29	3.23	3.16	3.07	2.86	2.59	2.21
3	3.15	3.08	3.01	2.92	2.74	2.52	2.21
2	2.94	2.88	2.81	2.74	2.60	2.43	2.21
1	2.64	2.60	2.55	2.50	2.42	2.32	2.21
0	2.21	2.21	2.21	2.21	2.21	2.21	2.21
—1	1.75	1.81	1.81	1.92	2.03	2.13	2.21
—2	1.47	1.53	1.59	1.68	1.89	2.06	2.21
—3	1.32	1.37	1.42	1.50	1.79	2.02	2.21
—4	1.24	1.28	1.32	1.39	1.72	1.99	2.21
—5	1.19	1.22	1.25	1.31	1.67	1.97	2.21


A
B
C
D
E
F
G
G
F
E
D
C
B
A
3
2
1
1
2
3
4
5
−p
p

Die Kurven schneiden sich alle im Punkt des geometrischen Mittels. Bei der n. Klasse (in unserem Beispiel ist $n = 4$) liefert das einfache kombinatorische Potenzmittel jeden Grades stets das geometrische Mittel, das also eine ganze horizontale Gerade belegt. Tabelle und Figur liefern eine sinnvolle Ergänzung zu den entsprechenden Darstellungen in der zitierten Arbeit von Bd. 66, Heft 2 dieser Mitteilungen. Hier wie dort wird die Sonderstellung des geometrischen Mittels noch augenfälliger, wenn wir zu den verallgemeinerten Potenzmitteln übergehen. Diese erhalten wir, indem wir jede Grösse a_i mit einer Potenz ihrer selbst, z. B. mit $a_i^{a_i}$ als Gewicht versehen. Es ergibt sich auf diese Weise eine Erweiterung des genannten Ortes beschriebenen Flächenbündels um $(n - 1)$ Flächen, welche durch stetige Potenz-Variation der vollständigen kombinatorischen Potenzmittel der Klassen 2 bis n sowie ihrer Verallgemeinerungen der eben beschriebenen Art erzeugt werden.

Zusammenfassung

In früheren Arbeiten hat sich der Verfasser mit einfachen kombinatorischen Mittelwerten befasst. Diese erhält man, indem man ausgeht von Summen, gebildet aus Kombinationen ohne Wiederholung aus den zu mittelnden Werten. Nunmehr wird gezeigt, dass man eine sinnvolle Erweiterung der Menge der algebraischen Mittelwerte erhält, wenn man für die Summenbildung auch Kombinationen mit Wiederholung der zu mittelnden Werte verwendet. Auf der Basis aller kombinatorischen Mittelwerte lassen sich sodann einfache und erweiterte Potenzmittel bilden, deren Gesamtheit eine interessante geometrische Interpretation erlaubt.

Summary

In earlier works the author has treated simple combinatorial means. These are obtained by considering combinations *without* repetitions of the basic values. Now it is shown how the set of algebraic means can be enlarged if combinations *with* repetitions are taken into account. Based on all combinatorial means one can construct some simple and some extended power means forming a collection which allows an interesting geometrical interpretation.

Résumé

Dans d'autres articles l'auteur a traité les moyennes combinatoires simples, lesquelles ont été obtenues en considérant les combinaisons *sans* répétitions des valeurs de base. Maintenant l'auteur montre que l'ensemble des moyennes algébriques peut être élargie en ajoutant les combinaisons *avec* répétitions. En prenant comme point de départ toutes les moyennes combinatoires, on peut construire des moyennes de puissance simples et élargies, qui permettent une simple interprétation géométrique.

Riassunto

In precedenti articoli l'autore ha discusso le medie combinatorie semplice. Queste si ottengono guardando le combinazioni *senza* ripetizioni dei valori di base. Ora si deriva che l'insieme delle medie algebriche può essere esteso considerando anche le combinazioni *con* ripetizioni. Prendendo come punto di partenza tutte le medie combinatorie si può costruire delle medie di potenza semplici e estese che permettono una semplice interpretazione geometrica.